Kangourou Sans Frontières

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy
i Nauk Matematycznych

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny
KANGUR 2014

Student

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

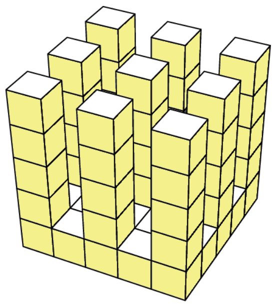
S

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!

Pytania po 3 punkty

1. Ze 125 sześciennych klocków o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ zbudowano sześcian. Z sześcianu tego usunięto pewną liczbę klocków, pozostawiając nienaruszoną dolną warstwę i kolumny jednakowej wysokości (patrz rysunek). Ile klocków usunięto?



A) 56 B) 64 C) 68 D) 78 E) 80

2. Jeżeli $a^b = \frac{1}{2}$, to a^{-3b} jest równe

A) $\frac{1}{8}$. B) 8. C) -8. D) 6. E) $\frac{1}{6}$.

3. Kacper, Melchior i Baltazar obchodzą dziś urodziny. Kacper dodał lata, które każdy z nich ukończył i otrzymał liczbę 44. Po pewnym czasie suma ich lat będzie znowu liczbą dwucyfrową o równych cyfrach. Jaka to liczba?

A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99

4. Który z następujących wielomianów nie jest podzielny przez wielomian $x + 1$?

A) $2x + 2$ B) $x^2 - 1$ C) $x^2 + x$ D) $-1 - x$ E) $x^2 + 1$

5. Ile jest równa wartość wyrażenia $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$?

A) 1 B) 2 C) 2^{2011} D) 2^{2012} E) 2^{2013}

6. W trzech koszach różnej wielkości umieszczono 48 jajek. Liczba jajek w koszu średniej wielkości jest dwukrotnie większa od liczby jajek w koszu najmniejszym i dwukrotnie mniejsza od sumy jajek w pozostałych dwóch koszach. Ile jaj jest w koszu największym?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

7. Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

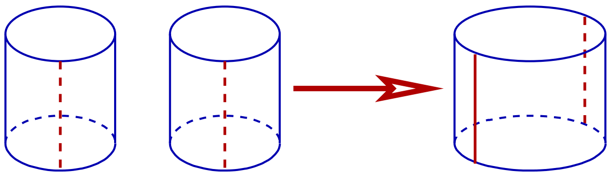
A) 27 B) 55 C) 77 D) 110 E) 111

8. W liczbie 2014, wyrażającej bieżący rok, cyfry są różne i ostatnia z nich jest większa od sumy pozostałych. Ile lat temu ostatnio zdarzyła się taka sytuacja?

A) 5 B) 205 C) 215 D) 305 E) 315

9. Po rozwinięciu powierzchni bocznych dwóch małych identycznych walców otrzymano dwa prostokąty, które sklejono w jeden większy prostokąt wzdłuż boku odpowiadającego wysokości tych walców.

Otrzymany prostokąt pokrywa się z powierzchnią boczną dużego walca o takiej samej wysokości jak małe walce (patrz rysunek obok). Ile razy objętość dużego walca jest większa od objętości małego walca?



A) 2 B) 3 C) π D) 4 E) 8

10. Pan Hilary ma w biurku cztery szuflady. Wczoraj otrzymał osiem listów i każdy z nich włożył do którejś z szuflad. Które z następujących zdań jest na pewno prawdziwe?

A) W każdej szufladzie biurka są dwa listy.
B) Wszystkie listy nie mogą być w jednej szufladzie.
C) W każdej szufladzie jest co najmniej jeden list.
D) W którejś z szuflad są co najmniej dwa listy.
E) Dwie szuflady zawierają co najmniej po dwa listy.

Pytania po 4 punkty

11. Dany jest prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$, gdzie $a < b < c$, oraz liczba dodatnia d. Jeżeli jeden z wymiarów prostopadłościanu zwiększymy o d, to wzrośnie objętość prostopadłościanu. Zwiększenie którego z wymiarów spowoduje największy wzrost objętości prostopadłościanu?

A) a B) b C) c
D) Objętość zawsze wzrośnie o tyle samo. E) Zależy to od wartości a, b, c.

12. W meczu piłki nożnej zwycięzca otrzymuje 3 punkty, pokonany 0 punktów, a w przypadku remisu obie drużyny otrzymują po 1 punkcie.

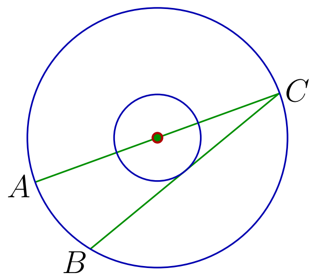
Cztery drużyny: A, B, C, D uczestniczyły w turnieju. Każda rozegrała trzy mecze, po jednym z każdą inną. Po zakończeniu turnieju drużyna A miała 7 punktów, drużyny B i C po 4 punkty. Ile punktów zdobyła drużyna D?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13. Ile trójek liczb całkowitych (a, b, c), gdzie $a > b > c > 1$, spełnia nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Nieskończenie wiele.

14. Rysunek obok przedstawia dwa współśrodkowe okręgi, których promienie są w proporcji $1:3$. Odcinek AC jest średnicą dużego okręgu, BC jego cięciwą styczną do małego okręgu, $|AB| = 12$. Ile jest równy promień dużego okręgu?



A) 13 B) 18 C) 21 D) 24 E) 26

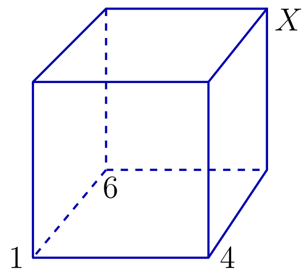
15. Dla jakiego n sześć tygodni to dokładnie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ sekund?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

16. Dane są trzy niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c oraz dodatnia liczba całkowita n. Wiadomo, że liczby $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ oraz $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ mają ten sam znak. Która z następujących nierówności jest na pewno prawdziwa?

A) $a > 0$ B) $b > 0$ C) $c > 0$ D) $a < 0$ E) $b < 0$

17. Wierzchołki sześcianu ponumerowano liczbami od 1 do 8 w taki sposób, że suma liczb w czterech wierzchołkach każdej ściany jest taka sama. Liczby 1, 4 i 6 zostały zaznaczone na rysunku obok. Jaka liczba jest w wierzchołku zaznaczonym literą X?

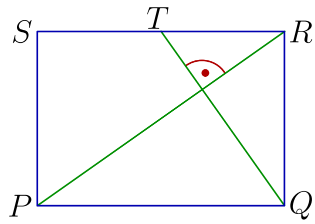


A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

18. Opakowanie serka zawiera następujące informacje: zawartość tłuszczu w produkcie 24%, zawartość tłuszczu w suchej masie 64%. Jaki procent wody zawiera ten serek?

A) 88% B) 62,5% C) 49% D) 42% E) 37,5%

19. Dany jest prostokąt $PQRS$ (rysunek obok) i środek T jego boku RS. Ile jest równy stosunek $|PQ| : |QR|$, jeżeli odcinek QT jest prostopadły do odcinka PR?



A) $2 : 1$ B) $\sqrt{3} : 1$ C) $3 : 2$ D) $\sqrt{2} : 1$ E) $5 : 4$

20. Funkcja $f(x) = ax + b$ spełnia równości: $f(f(f(1))) = 29$, $f(f(f(0))) = 2$. Ile jest równe a?

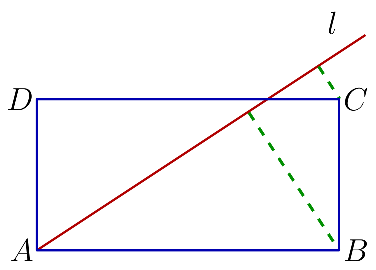
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Pytania po 5 punktów

21. Danych jest 10 różnych dodatnich liczb całkowitych. Dokładnie 5 z nich jest podzielnych przez 5 i dokładnie 7 podzielnych przez 7. Niech M będzie największą z tych 10 liczb. Ile jest równa najmniejsza możliwa wartość M?

A) 105 B) 77 C) 75 D) 63 E) Inna liczba.

22. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2|AD|$ (rysunek obok). Prosta l przechodząca przez wierzchołek A ma tę własność, że jej odległości od punktów B i C są odpowiednio równe 6 i 2. Ile jest równa długość boku AB?

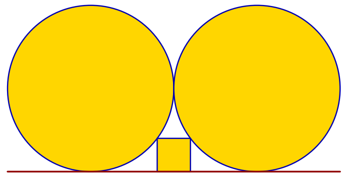


A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) $4\sqrt{3}$

23. Na płaszczyźnie wybrano 9 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Część wybranych punktów pokolorowano na czarno, pozostałe na niebiesko.

Rozważamy trójkąty o wierzchołkach w wybranych punktach. Trójkąt taki nazwiemy *czarnym*, jeśli wszystkie jego wierzchołki są czarne. Ile punktów zostało pokolorowanych na czarno, jeśli liczba czarnych trójkątów ma się do liczby wszystkich trójkątów jak $2 : 3$?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8



24. Rysunek obok przedstawia kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na prostej, a pozostałe dwa na zewnętrznie stycznych okręgach o promieniu 1, stycznych do tej prostej. Jaka jest długość boku tego kwadratu?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

25. Pan Eustachy wypisał pewne liczby naturalne, z których żadna nie przekracza 100 i których iloczyn nie jest podzielny przez 54. Ile co najwyżej liczb mógł wypisać pan Eustachy?

A) 8 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

26. Dane są dwa wielokąty foremne o wspólnym boku długości 1, leżące jeden na zewnątrz drugiego. Pierwszy z nich jest 15-kątem $ABCD\ldots$, drugi n-kątem $ABZY\ldots$. Dla jakiej wartości n odległość punktów C i Z jest równa 1?

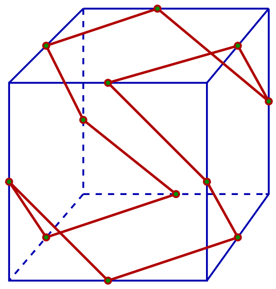
A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

27. Dla dodatnich liczb całkowitych k, m, n zachodzą równości

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1.$$

Ile różnych wartości może przyjmować m?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Nieskończenie wiele.



28. Na rysunku obok przedstawiona jest łamana zamknięta, której wierzchołki są środkami krawędzi sześcianu. Dla każdej pary sąsiednich odcinków łamanej wyznaczamy miarę kąta wypukłego między tymi odcinkami. Ile jest równa suma miar tych kątów?

A) 1800° B) 1440° C) 1200° D) 1080° E) 720°

29. Funkcja f, określona na zbiorze liczb całkowitych, spełnia warunki:

$$f(4) = 6 \quad \text{oraz} \quad xf(x) = (x-3)f(x+1) \text{ dla wszystkich } x \text{ całkowitych.}$$

Ile jest równe $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

A) 2013 B) 2014 C) $2013 \cdot 2014$ D) 2013! E) 2014!

30. W lasach jednej z wysp Archipelagu Bergamutów żyją trzy rodzaje zwierząt: sarny, wilki i lwy. Wilki zjadają sarny, lwy zjadają zarówno sarny jak i wilki. Gdy wilk zje sarnę, zmienia się w lwa. Gdy lew zje sarnę, zmienia się w wilka, a gdy zje wilka, zmienia się w sarnę.

Początkowo na wyspie było 17 saren, 55 wilków i 6 lwów. Jaka jest największa możliwa liczba zwierząt, które mogą pozostać na tej wyspie w sytuacji, gdy żadne zwierzę nie może zjeść innego?

A) 1 B) 6 C) 17 D) 23 E) 35