MATURA

POZIOM ROZSZERZONY

ARKUSZE MATURALNE

MATEMATYKA

2017

2016

2015

Wydawnictwo AKSJOMAT - Toruń

Dorota Masłowska, Tomasz Masłowski,
Piotr Nodzyński, Elżbieta Słomińska, Alicja Strzelczyk

Arkusze maturalne z matematyki dla poziomu rozszerzonego

Wydawnictwo Aksjomat
Toruń 2014

Dorota Masłowska, Tomasz Masłowski,
Piotr Nodzyński, Elżbieta Słomińska, Alicja Strzelczyk

Arkusze maturalne z matematyki dla poziomu rozszerzonego

Składamy podziękowanie

Pani mgr Elżbiecie Słomińskiej z I Liceum Ogólnokształcącego w Toruniu za szereg uwag pomocnych przy powstaniu tego zbioru.

Recenzent: mgr Zbigniew Bobiński UMK Toruń

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej. Zamówienia prosimy nadsyłać na adres:

Wydawnictwo „Aksjomat", Piotr Nodzyński
ul. Wita Stwosza 1/7, 87-100 Toruń
tel. (56) 622-69-41, tel. i fax (56) 655-52-09
www.aksjomat.torun.pl, wydawnictwo@aksjomat.torun.pl

Kopiowanie, powielanie w całości lub części, bez zgody wydawcy, zabronione
© Copyright by Wydawnictwo „Aksjomat", Toruń 2014
Wydanie pierwsze

ISBN 978-83-60689-94-3

Skład: Anna Toruńska, Mateusz Toruński
Druk: Drukarnia MW - Drukarnia Świecie
86-100 Świecie, ul. Gen. J. Hallera 7G
drukarnia@drukarniamw.pl

Spis treści

Wstęp 4

Struktura i forma egzaminu 5

ARKUSZ I 19

ARKUSZ II 29

ARKUSZ III 39

ARKUSZ IV 47

ARKUSZ V 55

ARKUSZ VI 63

ARKUSZ VII 71

ARKUSZ VIII 81

ARKUSZ IX 91

ARKUSZ X 101

ARKUSZ XI 111

ARKUSZ XII 119

Odpowiedzi oraz schematy punktowania 127

Wstęp

W liceach od 2015 roku, a w technikach od 2016 na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym obowiązuje nowa podstawa programowa. Zakres wymagań egzaminacyjnych szczególnie zmienił się na poziomie rozszerzonym: pojawiły się nowe działy takie jak granice ciągów, rachunek różniczkowy, oraz prawdopodobieństwo całkowite.

Niniejsze opracowanie wychodzi naprzeciw oczekiwaniom uczniów, którzy na egzaminie jako przedmiot dodatkowy wybrali matematykę rozszerzoną.

Nasze 12 arkuszy jest zbudowanych według zasad zawartych w „Informatorze o egzaminie maturalnym" z matematyki od roku szkolnego 2014/2015 wydanym przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Arkusze zawierają nowe typy zadań egzaminacyjnych: zadania zamknięte i zadania kodowanej odpowiedzi oraz zadania na dowodzenie, zadania otwarte krótkiej jak i rozszerzonej odpowiedzi. Do wszystkich zadań otwartych przedstawiliśmy przykładowe rozwiązania wraz z holistycznymi kryteriami ich oceny.

Będziemy wdzięczni za wszelkie uwagi dotyczące stopnia trudności, jak i zakresu badanych umiejętności.

Autorzy

Struktura i forma egzaminu

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem pisemnym sprawdzającym wiadomości i umiejętności określone w podstawie programowej z matematyki i polega na rozwiązaniu zadań zawartych w arkuszach egzaminacyjnych.

1. Egzamin maturalny z matematyki, zdawanej jako przedmiot obowiązkowy, jest zdawany na poziomie podstawowym. Egzamin trwa 170 minut i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych sprawdzających rozumienie pojęć i umiejętność ich zastosowania w życiu codziennym oraz zadań o charakterze problemowym. Zadania egzaminacyjne obejmują zakres wymagań dla poziomu podstawowego.

2. Egzamin maturalny z matematyki, zdawanej jako przedmiot dodatkowy, jest zdawany na poziomie rozszerzonym. Egzamin trwa 180 minut i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych wymagających rozwiązywania problemów matematycznych. Zadania egzaminacyjne obejmują zakres wymagań dla poziomu rozszerzonego.

Opis arkusza dla poziomu podstawowego
Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań:

1. **grupa** — zawiera od 20 do 30 zadań zamkniętych. Do każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0-1. Zdający udziela odpowiedzi, zaznaczając je na karcie odpowiedzi.

2. **grupa** — zawiera od 5 do 10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi punktowanych w skali 0-2.

3. **grupa** — zawiera od 3 do 5 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi punktowanych w skali 0-4, albo 0-5, albo 0-6.

Opis arkusza dla poziomu rozszerzonego
Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań:

1. **grupa** — grupa zawiera zadania zamknięte. Dla każdego z tych zadań zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swoją decyzję na karcie odpowiedzi. Zadania punktowane są w skali 0-1.

2. **grupa** — grupa zawiera zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, w tym zadania z kodowaną odpowiedzią. Zadania te punktowane są w skali 0-2, 0-3 albo 0-4. W zadaniach z kodowaną odpowiedzią zdający udziela odpowiedzi wpisując żądane cyfry otrzymanego wyniku do odpowiedniej tabeli. Ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź.

3. **grupa** — grupa zawiera zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Rozwiązując zadania z tej grupy, zdający w szczególności ma wykazać się umiejętnością rozumowania oraz dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków. Zadania te punktowane są w skali 0-5, 0-6 albo 0-7.

Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający może uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych

1. Zadania otwarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzają i oceniają egzaminatorzy powołani przez dyrektora okręgowej komisji egzaminacyjnej.
2. Rozwiązania poszczególnych zadań oceniane są na podstawie szczegółowych kryteriów oceniania, jednolitych w całym kraju.
3. Egzaminatorzy w szczególności zwracają uwagę na:
   - poprawność merytoryczną rozwiązań,
   - kompletność prezentacji rozwiązań zadań – wykonanie cząstkowych obliczeń i przedstawienie sposobu rozumowania.
4. Ocenianiu podlegają tylko te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia. Komentarze, nawet poprawne, nie mające związku z poleceniem nie podlegają ocenianiu.
5. Gdy do jednego polecenia zdający podaje kilka rozwiązań (jedno prawidłowe, inne błędne), to egzaminator nie przyznaje punktów.
6. Za całkowicie poprawne rozwiązania zadań, uwzględniające inny tok rozumowania niż podany w schemacie punktowania, przyznaje się maksymalną liczbę punktów.
7. Zapisy w brudnopisie nie są oceniane.
8. Zdający zdał egzamin maturalny z matematyki, jeżeli otrzymał co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań z arkusza dla poziomu podstawowego.
9. Wynik egzaminu maturalnego z matematyki ustalony przez komisję okręgową jest ostateczny.

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

IV etap edukacyjny (liceum, technikum) zakres rozszerzony

Cele kształcenia - wymagania ogólne

Uczeń posiada umiejętności w zakresie:

1. **Wykorzystanie i tworzenie informacji.** Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

2. **Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.** Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

3. **Modelowanie matematyczne.** Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

4. **Użycie i tworzenie strategii.** Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.

5. **Rozumowanie i argumentacja.** Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Treści nauczania - wymagania szczegółowe

1. **Liczby rzeczywiste. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu pod stawowego, a ponadto:

1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x-a|=b$, $|x-a|<b$, $|x-a|\geq b$,
2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

2. **Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^3$ oraz $a^3\pm b^3$;
2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax+b$;
3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;
4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany;
5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.

3. **Równania i nierówności. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje wzory Viète'a;
2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;
3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;
4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$;
5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;
6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych;
7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe;
8) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: $\frac{x+1}{x+3}>2$, $\frac{x+3}{x^2-16}<\frac{2x}{x^2-4x}$, $\frac{3x-2}{4x-7}\leq\frac{1-3x}{5-4x}$;
9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $||x+1|-2|=3$, $|x+3|+|x-5|>12$.

4. **Funkcje. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$;
2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;
3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

5. **Ciągi. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów;
3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

6. **Trygonometria. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego);
3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\mathrm{tg} x > a$);
5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;
6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

7. **Planimetria. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;
2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;
3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);

4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;
5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

8. **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności;
2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;
4) oblicza odległość punktu od prostej;
5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności;
6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu;
7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;
8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

9. **Stereometria. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;
2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

10. **Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych;
2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;
3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

11. **Rachunek różniczkowy. Uczeń:**

spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;
2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;
3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;

4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;
5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Podstawa programowa przedmiotu matematyka

IV etap edukacyjny (liceum, technikum) zakres podstawowy

Cele kształcenia - wymagania ogólne

Uczeń posiada umiejętności w zakresie:

1. **Wykorzystanie i tworzenie informacji.** Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.

2. **Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.** Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

3. **Modelowanie matematyczne.** Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

4. **Użycie i tworzenie strategii.** Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

5. **Rozumowanie i argumentacja.** Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Treści nauczania - wymagania szczegółowe

1. **Liczby rzeczywiste. Uczeń:**

   1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);
   2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
   3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;
   4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
   5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
   6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;
   7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;
   8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
   9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

2. **Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:**

   1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

3. **Równania i nierówności. Uczeń:**

   1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
   2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
   3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
   4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
   5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
   6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
   7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;
   8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

4. **Funkcje. Uczeń:**

1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;
2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;
3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;
6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;
7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);
11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);
13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

5. **Ciągi. Uczeń**

1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

6. **Trygonometria. Uczeń:**

   1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;
   2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
   3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
   4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;
   5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

7. **Planimetria:**

   1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;
   2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
   3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;
   4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

8. **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:**

   1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
   2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
   3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
   4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
   5) wyznacza współrzędne środka odcinka;
   6) oblicza odległość dwóch punktów;
   7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

9. **Stereometria. Uczeń:**

   1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;
   2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;

3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;
5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

10. **Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:**

1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio po grupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;
2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;
3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

ARKUSZE

ARKUSZ I

Zadanie 1. *(1 pkt)*
Liczba $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$ jest równa

A. 5 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 2. *(1 pkt)*
Funkcja $f(x) = x^2 - |x - 2|$

A. ma jedno miejsce zerowe
B. ma dwa miejsca zerowe
C. ma trzy miejsca zerowe
D. ma cztery miejsca zerowe

Zadanie 3. *(1 pkt)*
Kąt α spełnia warunek $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$, zatem $\sin 2\alpha$ równa się

A. $-\frac{15}{16}$ **B.** $-\frac{15}{32}$ **C.** $\frac{15}{16}$ **D.** $\frac{15}{32}$

Zadanie 4. *(1 pkt)*
Jeśli $\log_2 3 = a$, to $\log_6 3$ równa się

A. $1 + \frac{1}{a}$ **B.** $\frac{a}{a+1}$ **C.** $\frac{1}{a+1}$ **D.** $\frac{a}{a-1}$

Zadanie 5. *(1 pkt)*
Niech $A, B \subset \Omega$ oraz $P(B) = 0{,}5$ i $P(A|B) = 0{,}3$. Wtedy prawdopodobieństwo $P(B - A)$ jest równe

A. 0,35 **B.** 0,2 **C.** 0,15 **D.** 0,1

Zadanie 6. *(1 pkt)*
Granica $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3 - 9x}{x+3}$ jest równa

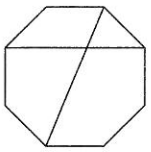
A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 18

Zadanie 7. *(1 pkt)*
W ilu ćwiartkach układu współrzędnych znajduje się okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$?

A. jednej **B.** dwóch **C.** trzech **D.** czterech

Zadanie 8. *(1 pkt)*

Wyznacz miarę stopniową kąta ostrego, pod jakim przecinają się przekątne ośmiokąta foremnego przedstawionego na rysunku. Zakoduj cyfry dziesiątek, jedności i części dziesiętnych otrzymanego wyniku.



Zadanie 9. *(2 pkt)*

Równanie $x^2 - 11x + 4 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ jest liczbą naturalną. Znajdź tę liczbę. Zakoduj jej cyfry setek, dziesiątek i jedności.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

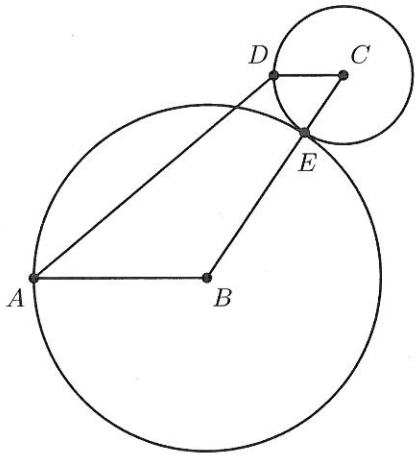
W malejącym nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_2 = 48$ oraz $a_4 = 27$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Udowodnij, że funkcja $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ dla $x > 0$, przyjmuje wartości niemniejsze od 3.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Dany jest trapez $ABCD$ oraz dwa styczne okręgi o środkach w punktach B i C (patrz rysunek). Uzasadnij, że kąt DEA jest kątem prostym.



Zadanie 13. *(4 pkt)*

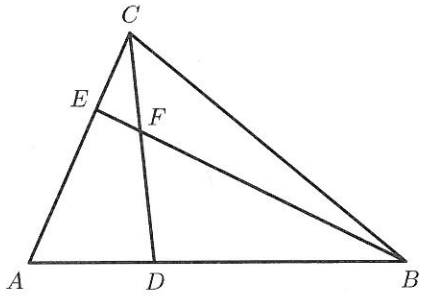
Rozwiąż nierówność $\cos 3x > \cos\frac{\pi}{3}$, gdzie $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Zadanie 14. *(4 pkt)*

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = (0,0)$ i $D = (4,0)$. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie, przechodzącej przez punkt F leżący w I ćwiartce układu współrzędnych.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

W trójkącie ABC punkty D, E leżą odpowiednio na bokach AB i AC tak, że $|AD|:|DB| = 1:2$ oraz $|AE|:|EC| = 2:1$. Wyznacz jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole czworokąta $ADFE$.



Zadanie 16. *(5 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^3 - 3x + 2 = m$ ma dwa pierwiastki ujemne i jeden dodatni.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których co najmniej jedna cyfra jest siódemką?

Zadanie 18. *(7 pkt)*

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem o obwodzie 24. Jakie wymiary musi mieć ten stożek, aby jego objętość była jak największa?

ARKUSZ II

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego: $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \ldots$ jest równa

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Niech $(2+\sqrt{5})^3 = a + b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in C$. Zatem $a + b$ równa się

A. 13 B. 33 C. 40 D. 55

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = (x-4)(x-3)(x-2)$ przez dwumian $x-1$ jest równa

A. -24 B. -6 C. 6 D. 24

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt $A = (\log_3 2, 4)$, zatem a jest równe

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 3 D. 9

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Równanie $||x| - 2015| = 2015$ ma

A. cztery rozwiązania
B. trzy rozwiązania
C. dwa rozwiązania
D. jedno rozwiązanie

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Stosunek pola sześciokąta foremnego opisanego na danym okręgu do pola sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równy

A. 4:3 B. $2:\sqrt{3}$ C. 3:2 D. $3:\sqrt{3}$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Prawdopodobieństwo uzyskania dwóch szóstek, pod warunkiem otrzymania co najmniej jednej szóstki, jest równe

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{11}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{36}$

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Wielomian $W(x) = x^3 - 21x^2 + 22x - 2$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Wyznacz sumę kwadratów wszystkich pierwiastków tego równania. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzyskanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Niech $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x}$, gdzie $x \neq 0$. Oblicz $f'(0{,}1)$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzyskanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego jest równa 165°. Wyznacz liczbę przekątnych tego wielokąta. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzyskanego wyniku.

Zadanie 11. *(2 pkt)*

Dany jest ciąg określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 4a_n + 1. \end{cases}$ Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzyskanego wyniku.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC, BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio $\alpha, 2\alpha$ i 8α. Wykaż, że trójkąt jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Zadanie 13. *(4 pkt)*

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Zadanie 14. *(4 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 + mx$ ma dwa różne punkty x_1 i x_2 spełniające warunek konieczny ekstremum, będące liczbami tego samego znaku.

Zadanie 15. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 16. *(4 pkt)*

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w tym ustawieniu iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb będzie parzysty. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 17. *(5 pkt)*

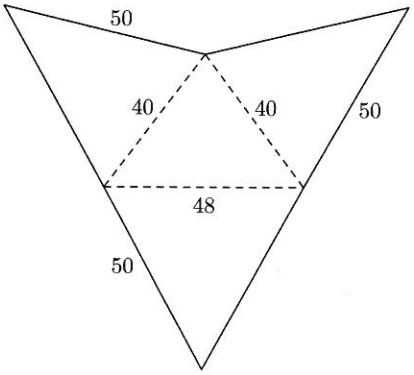
Ramiona trójkąta mają długości 3 i 7, a kąt między nimi 120°. Wyznacz długość odcinka dwusiecznej kąta rozwartego zawartego w trójkącie.

Zadanie 18. *(5 pkt)*

Okręgi $(x+1)^2+y^2=5$ i $x^2+y^2-10x-6y+m=0$ są zewnętrznie styczne. Wyznacz wartość parametru m oraz współrzędne punktu styczności.

Zadanie 19. *(6 pkt)*

Oblicz objętość ostrosłupa, którego siatka przedstawiona jest na rysunku.



ARKUSZ III

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Równanie $|3x - m| = 7$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków dla

A. $m = 10$ **B.** $m = 7$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = -10$

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Jeśli $2^a = 3$ i $3^b = 5$, to iloczyn ab jest równy

A. $\log_3 5$ **B.** $\log_6 5$ **C.** $\log_2 5$ **D.** $\log_5 6$

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Równanie $\sin x = \frac{1}{3}$ w przedziale $(-570°, 570°)$ ma

A. 4 rozwiązania **B.** 5 rozwiązań **C.** 6 rozwiązań **D.** 7 rozwiązań

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Wykres której z poniższych funkcji nie posiada asymptoty poziomej

A. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **B.** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

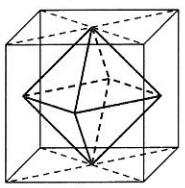
C. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ **D.** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Jaką część objętości sześcianu stanowi objętość ośmiościanu foremnego?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$



Zadanie 6. *(1 pkt)*

Boki trójkąta mają długości 2 i 3, a miara kąta między nimi jest równa 60°. Trzeci bok trójkąta ma długość

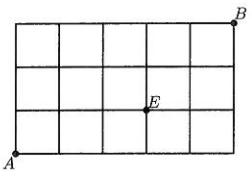
A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{7}$ **C.** $\sqrt{11}$ **D.** $\sqrt{19}$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Liczba najkrótszych dróg, prowadzących po bokach kwadratów od punktu A do punktu B przez punkt E, jest równa

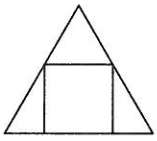
A. 8 **B.** 10

C. 16 **D.** 24



Zadanie 8. *(2 pkt)*

W trójkąt równoboczny o boku długości 6 wpisano kwadrat (patrz rysunek). Wyznacz długość boku tego kwadratu. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.



Zadanie 9. *(2 pkt)*

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 2n}{(2n+3)^3}$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb między 10 a 100000, które są kwadratami liczb naturalnych. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

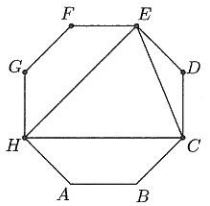
Niech $A, B \subset \Omega$, $P(B) = \frac{6}{11}$ oraz $P(A|B) = \frac{1}{2}$. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność $\frac{3}{11} \leq P(A) \leq \frac{8}{11}$.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Dany jest nieskończony zbieżny ciąg geometryczny $a_1, a_2, a_3, \ldots$, w którym $a_1 > 0$. Niech S oznacza sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Udowodnij, że $S \geq 4a_2$.

Zadanie 13. *(4 pkt)*

Wyznacz, jaką część pola ośmiokąta foremnego stanowi pole trójkąta HCE.



Zadanie 14. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $\cos 3x = \cos 5x$, gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Wyznacz równanie okręgu wpisanego w romb $ABCD$, którego trzy wierzchołki mają współrzędne $A = (0,0)$, $B = (5,0)$ i $C = (9,3)$.

Zadanie 16. *(6 pkt)*

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^5 - 15x^3$. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla którego równanie

$$2015^{2x} - 6 \cdot 2015^x + m^2 - 8m = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 18. *(6 pkt)*

Wyznacz wymiary zbiornika w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i objętości 32 m^3 tak, aby suma pól ścian bocznych i podstawy była jak najmniejsza.

ARKUSZ IV

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Setną cyfrą zaokrąglenia rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{7}{22}$ do stu cyfr po przecinku jest

A. 2 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 8

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Jeśli $|x-6| \leq 2$ oraz $|8-y| \leq 3$, to największa wartość wyrażenia $|x-y|$ jest równa

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 11

Zadanie 3. *(1 pkt)*

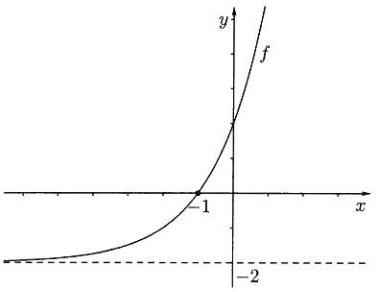
W układzie współrzędnych przedstawiono szkic wykresu funkcji $f(x) = 2^{x+a} + b$. Suma $a+b$ jest równa

A. -4

B. 0

C. 2

D. 4



Zadanie 4. *(1 pkt)*

Które trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny?

A. $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ **B.** $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ **C.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ **D.** $\sqrt{18}, \sqrt{8}, \sqrt{2}$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Liczba $(0{,}04)^{\log 2} \cdot (0{,}025)^{\log 2}$ jest równa

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Granica $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1-x}{x-2}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -1 **D.** ?

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Liczb trzycyfrowych, utworzonych z cyfr 0, 2, 4 jest

A. 6 **B.** 18 **C.** 24 **D.** 27

Zadanie 8. *(2 pkt)*

W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 120. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów tego ciągu. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzyskanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w czworościanie foremnym. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{x-2}{4x^2+1}$ w punkcie $x = 1$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

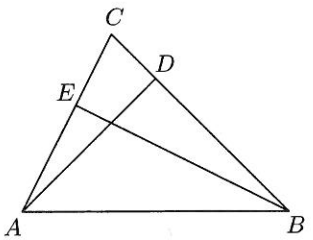
Zadanie 11. *(3 pkt)*

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+1}{y} + (yx+1)y > 2.$$

Zadanie 12. *(3 pkt)*

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu.



Zadanie 13. *(3 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (m + 2)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 1$.

Zadanie 14. *(3 pkt)*

Dana jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 4. Wyznacz równanie stycznej do paraboli w punkcie A.

Zadanie 15. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $1 + 2\cos^2 x = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Wyznacz ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+1)$. Wykonaj wykres tej funkcji w przedziale $\langle -2, 4 \rangle$.

Zadanie 17. *(5 pkt)*

Z urny, w której znajduje się 6 kul białych i 3 czarne losujemy dwie kule. Z pozostałych kul losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie biała.

Zadanie 18. *(5 pkt)*

Dane są cztery liczby, które zapisano w pewnej kolejności. Trzy początkowe tworzą ciąg geometryczny, zaś trzy końcowe ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych jest równa 16, suma liczb środkowych 15. Wyznacz te liczby.

Zadanie 19. *(6 pkt)*

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość h, a kąt między krawędziami bocznymi ma miarę α. Wyznacz objętość ostrosłupa.

ARKUSZ V

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Jeśli $x^2yz^3 = 7^3$ oraz $xy^2 = 7^9$, to xyz równa się

A. 7^4 **B.** 7^6 **C.** 7^8 **D.** 7^9

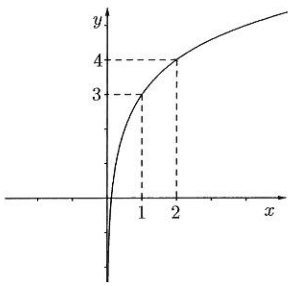
Zadanie 2. *(1 pkt)*

Równanie $x^2 - 4x = m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy

A. $m \in (0, +\infty)$ **B.** $m \in (0, 4)$ **C.** $m \in (-4, +\infty)$ **D.** $m \in (4, +\infty)$

Zadanie 3. *(1 pkt)*

W układzie współrzędnych przedstawiono szkic wykresu funkcji $f(x) = \log_a x + b$. Różnica $a - b$ jest równa

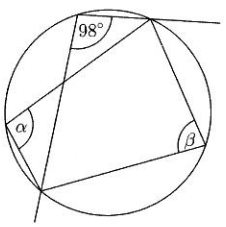


A. -2 **B.** -1

C. 0 **D.** 1

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Różnica $\alpha - \beta$ jest równa



A. 0° **B.** 4°

C. 8° **D.** 16°

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Jeśli $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2}$, to $f'(-1)$ równa się

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{1}{2}$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$, gdzie $x \in R$, jest przedział

A. $\langle 0, 2\rangle$ **B.** $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$ **C.** $\langle -2, 2\rangle$ **D.** $\langle -1, 1\rangle$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Liczb trzycyfrowych, w których iloczyn cyfr jest równy sześć jest

A. 6 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 12

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2x^3-16}$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Trzy okręgi o promieniach długości 6, 10 i 24 są zewnętrznie parami styczne. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołki są środkami tych okręgów. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*
Rozwiąż równanie $53|x-50| = 47|x+10|$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności większego z otrzymanych rozwiązań.

Zadanie 11. *(3 pkt)*
Uzasadnij, że jeśli $2\mathrm{tg}\alpha - \sin\alpha + 5\cos\alpha = 10$, to $\mathrm{tg}\alpha = 5$.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Udowodnij, że dla liczb dodatnich a i b, niewiększych od 1, prawdziwa jest nierówność $ab^2 - a^2b \leq \frac{1}{4}$.

Zadanie 13. *(4 pkt)*

W wycinek koła o kącie środkowym 60° wpisano koło. Wyznacz stosunek pola koła do pola wycinka.

Zadanie 14. *(4 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których pierwiastki x_1 i x_2 równania $x^2 - 2x = p(p - 14)$ spełniają warunek $7x_2 - 4x_1 = 47$.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie są dokładnie dwie cyfry parzyste.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Prostokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2+y^2+6x+4y-12=0$, a jego bok jest zwarty w prostej o równaniu $2x+y-2=0$. Znajdź współrzędne wierzchołków prostokąta i oblicz jego pole.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

Spośród trapezów równoramiennych, w których długości ramion i krótszej podstawy są równe 4, wybieramy ten, który ma największe pole. Oblicz jaką długość ma dłuższa podstawa tego trapezu.

Zadanie 18. *(6 pkt)*

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o ramionach długości b i kącie między nimi α. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Wyznacz objętość ostrosłupa.

ARKUSZ VI

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Liczba $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$ jest równa

A. -18 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 18

Zadanie 2. *(1 pkt)*

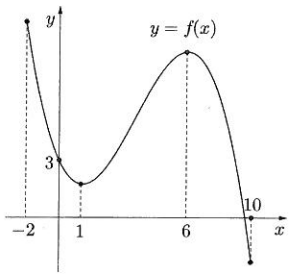
Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Pochodna $f'(x)$ spełnia warunek

A. $f'(0) = 3$

B. $f'(7) > 0$

C. $f'(3) = 0$

D. $f'(-1) < 0$



Zadanie 3. *(1 pkt)*

Zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{5^x}{10} - 1$ jest równy

A. $(-1, +\infty)$ **B.** $(0, +\infty)$ **C.** $\left(-\frac{9}{10}, +\infty\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Liczba 2,(06) jest równa

A. $2\frac{1}{15}$ **B.** $2\frac{2}{33}$ **C.** $2\frac{3}{50}$ **D.** 2,0(6)

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Okręgiem stycznym do okręgu o środku w punkcie $S = (1, -2)$ i promieniu $r = 2$ jest okrąg o równaniu

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Sinus kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny jego podstawy jest równy

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Z talii 52 kart losujemy jedną kartę, a z pozostałych drugą. Prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy asa jeśli wiadomo, że pierwszą kartą był kier, jest równe

A. $\frac{1}{13}$ **B.** $\frac{4}{51}$ **C.** $\frac{3}{52}$ **D.** $\frac{3}{51}$

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Niech x_1, x_2, x_3 i x_4 będą rozwiązaniami równania $|x|(11 - |x|) = 24$. Oblicz $x_1x_2x_3x_4$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{48} + \ldots + \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, w których jest więcej cyfr nieparzystych niż cyfr parzystych. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Uzasadnij, że jeśli $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, to liczba $\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Udowodnij, że liczby $\frac{1}{\log_2 3}, \frac{1}{\log_6 3}, \frac{1}{\log_{18} 3}$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 13. *(4 pkt)*

W trójkącie o bokach długości 3, 3,5 i 4,4 na najdłuższym boku znajduje się punkt równooddalony od dwóch pozostałych boków. Wyznacz długości odcinków na jakie dzieli ten punkt najdłuższy bok trójkąta.

Zadanie 14. *(4 pkt)*

Wyznacz pole trójkąta ograniczonego styczną do paraboli $y = 4 - x^2$ w punkcie $x_0 = 1$ i osiami układu współrzędnych.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 2 czarne, wybieramy losowo trzy kule, a następnie rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry tyle razy, ile wylosowaliśmy białych kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najmniej raz sześć oczek na kostce.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Suma długości przekątnych równoległoboku jest równa 8. Wyznacz jaką najmniejszą wartość może mieć suma kwadratów długości wszystkich boków równoległoboku.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^3 - mx + 2 = 0$ ma trzy rozwiązania.

Zadanie 18. *(7 pkt)*

Pole podstawy stożka, pole powierzchni kuli wpisanej w ten stożek oraz pole powierzchni bocznej stożka tworzą, w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy.

ARKUSZ VII

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Wykresy funkcji $f(x) = |x-4| + 1$ i $g(x) = -|x| + 5$

A. nie mają punktów wspólnych
B. mają jeden punkt wspólny
C. mają dwa punkty wspólne
D. mają nieskończenie wiele punktów wspólnych

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Liczba $a = \dfrac{3^{261} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot \sqrt{9^{41}}}}{27^{12} \cdot 81^{24}}$ jest równa

A. 3^{404} **B.** 9^{71} **C.** 9^{142} **D.** 3^{202}

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Wielomian $w(x) = x^3 + 2mx^2 - 5x + 6$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$ dla

A. $m = -2$ **B.** $m = -\frac{1}{2}$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = -3$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Suma wszystkich wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ jest równa

A. 4 **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** -4

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Obrazem punktu $A = (-2, 3)$ w jednokładności o środku w punkcie $S = (1, 1)$ i skali $k = -3$ jest punkt A' o współrzędnych

A. $(8, -5)$
B. $(-10, 7)$
C. $(-8, 7)$
D. $(10, -5)$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Granica $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{\log_{25} x}{x - 5}$ jest równa

A. 0
B. $-\infty$
C. $+\infty$
D. $\frac{1}{20}$

Zadanie 7. *(2 pkt)*

Niech x_1 i x_2 będą rozwiązaniami równania $2x^2 - 10x - 15 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia $x_1^3 + x_2^3$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 1$ i podaj najmniejsze dodatnie rozwiązanie tego równania. Podstaw $\pi = 3{,}14$ i zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+4}$ w punkcie $x = \frac{2}{3}$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb parzystych czterocyfrowych, w zapisie których występują trzy różne cyfry, a powtarzającą się cyfrą w liczbie jest cyfra jedności. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest określony wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_3 a_{n+1}}{\log_3 a_n} = 1$.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

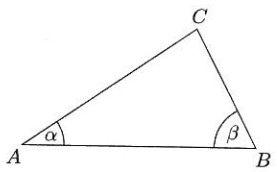
Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt C jest prosty, $|CA| = 2\sqrt{2}$ i $|CB| = 2$. Wykaż, że środkowe BD i CE tego trójkąta są do siebie prostopadłe.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Wyznacz wszystkie punkty o całkowitych współrzędnych leżące na wykresie funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez te punkty.

Zadanie 14. *(3 pkt)*

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\beta$ (zobacz rysunek). Oblicz stosunek pól kwadratów o bokach AC i BC oraz wykaż, że $|AB| < 2{,}5 \cdot |BC|$.



Zadanie 15. *(3 pkt)*

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 1$.

Zadanie 16. *(3 pkt)*

Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, zawierający krawędź dolnej podstawy i punkt przeciwległej krawędzi bocznej, jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 30°$. Oblicz pole tego przekroju, jeśli wiadomo, że odcina on od danego graniastosłupa ostrosłup o objętości $V = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Zadanie 17. *(5 pkt)*

W trójkącie równoramiennym ABC o ramionach AC i BC dane są $A = (-3, -4)$ i $B = (5, 2)$. Wysokość trójkąta poprowadzona do podstawy AB ma długość 10. Oblicz współrzędne punktu C (rozpatrz wszystkie przypadki).

Zadanie 18. *(6 pkt)*

Trójkąt ABC obracamy wokół prostej zawierającej bok AB. Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły wiedząc, że $|AB| = 5(\sqrt{3}+1)$, $|\angle CAB| = 60^\circ$ i $|\angle CBA| = 45^\circ$. Czy na tej bryle można opisać kulę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 19. *(7 pkt)*

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką do gry. Zdarzenie A polega na tym, że najmniejsza liczba oczek w otrzymanej trójce liczb jest trzykrotnie mniejsza od największej liczby oczek w tej trójce. Zdarzenie B polega na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od 13. Oblicz, które zdarzenie A czy B jest bardziej prawdopodobne.

ARKUSZ VIII

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Równanie $|x-7|+|x+2|=11$

A. nie ma rozwiązań
B. ma jedno rozwiązanie
C. ma dwa rozwiązania
D. ma trzy rozwiązania

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Z pudełka zawierającego trzy kule białe i siedem kul czarnych wyjmujemy losowo dwie kule, a z pozostałych kul losujemy jedną. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała jest równe

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{3}{10}$ **C.** $\frac{14}{45}$ **D.** $\frac{4}{7}$

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Niech r będzie liczbą dodatnią. Układ równań $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ x^2+(y-3)^2=r^2 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y ma jedno rozwiązanie, gdy r spełnia warunek

A. $|r-3|=12$
B. $|r+\sqrt{3}|=\sqrt{12}$
C. $|r-\sqrt{12}|=3$
D. $|r-12|=3$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Styczna do paraboli $y=-2x^2+15x-22$, nachylona do osi OX pod kątem $135°$, ma równanie

A. $y=-x+2$
B. $y=-x+4$
C. $y=-x+6$
D. $y=-x+10$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach długości 6, 25 i 29. Każda ściana boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Objętość tego ostrosłupa równa się

A. 120 **B.** 60 **C.** 40 **D.** 30

Zadanie 6. *(2 pkt)*

Oblicz, dla jakiej wartości parametru a liczba $\sqrt{6}-1$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)=x^3+x^2-12x+\frac{a}{5\sqrt{6}}$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 7. *(2 pkt)*

Oblicz $\frac{\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}}$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Oblicz sumę $(2+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})+(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+\ldots$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. *(3 pkt)*

Wykaż, że dla dowolnej liczby $n > 0$ i $n \neq 1$

$\log_n(n+1) \cdot \log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+2}(n+3) \cdot \log_{n+3} n = 1.$

Zadanie 10. *(3 pkt)*

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty E, F, G i H są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD i DA oraz $|EG| = |FH|$. Wykaż, że pole tego czworokąta jest niewiększe niż $\frac{1}{2}(\frac{a+b}{2})^2$, gdzie a i b oznaczają długości przekątnych czworokąta.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Dwaj pracownicy, pracując razem, wykonali w czasie 20 godzin pewną liczbę jednakowych detali. Gdyby tę samą pracę miał wykonać tylko pierwszy pracownik, to zajęłoby mu to 36 godzin. Ile czasu potrzebuje na samodzielne wykonanie tej pracy drugi pracownik?

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{(2^x-4)^2}{|2^x-4|}$ i podaj, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Każdy z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ ma dodatnie współrzędne i długość 10. Wektor $\vec{u}$ jest prostopadły do prostej $3x + 4y - 8 = 0$, a wektor $\vec{w}$ jest równoległy do prostej $y = \frac{7}{24}x + 4$. Wyznacz długość wektora $\vec{u} + \vec{w}$.

Zadanie 14. *(3 pkt)*

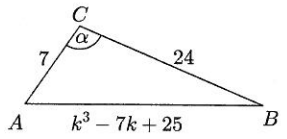
Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt, którego jeden bok jest zawarty w osi OX, a dwa pozostałe boki są zawarte w wykresie funkcji $f(x) = -\frac{4}{3}|x| + 4$.

Zadanie 15. *(3 pkt)*

Z liczb zbioru $\{2, 3, 4, 5, 11, 12\}$ wybieramy po kolei bez zwracania dwie liczby i tworzymy ułamek zwykły w ten sposób, że pierwsza wylosowana liczba jest licznikiem, a druga mianownikiem ułamka. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia ułamka nieskracalnego, pod warunkiem, że ułamek jest mniejszy od 1.

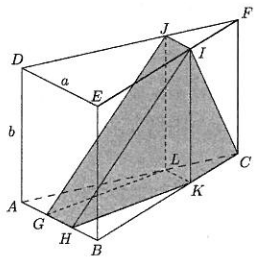
Zadanie 16. *(6 pkt)*

Wyznacz zbiór wszystkich wartości liczby k, dla których kąt α w trójkącie ABC (zobacz rysunek) nie jest ostry.



Zadanie 17. *(6 pkt)*

Z graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości $a = 9$ i krawędzi bocznej długości $b = 8$ wycięto bryłę zacieniowaną na rysunku. Oblicz objętość tej bryły, jeśli wiadomo, że czworokąty $GHKL$ i $LKIJ$ są prostokątami oraz $|AL|:|LC| = |BK|:|KC| = 2:1$.



Zadanie 18. ***(6 pkt)***

Ze wszystkich stożków wpisanych w kulę o promieniu długości R tak, że środek kuli należy do wysokości stożka, wyznacz ten, który ma największą objętość. Oblicz objętość wyznaczonego stożka.

ARKUSZ IX

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Liczba $\frac{\log_7 3 - 3\log_7 0,(3)}{\log_7 2 - \log_7 6}$ równa się

A. 4 **B.** -4 **C.** $\frac{243}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Suma odwrotności pierwiastków równania $\sqrt{10}x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{5} = 0$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Granica ciągu $a_n = \left(n - \frac{kn^2 - 3k + 2n^2}{n+1}\right)$ jest równa 1 dla parametru k równego

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Zadanie 4. *(1 pkt)*

W przesunięciu równoległym obrazem dowolnego punktu $A = (x, y)$ płaszczyzny jest punkt $A' = (x', y')$, taki, że $x' = x + 1$ i $y' = y - 3$. W tym przesunięciu obrazem okręgu o równaniu $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 1$ jest okrąg o równaniu

A. $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 1$
B. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 1$
C. $(x+6)^2 + (y-9)^2 = 1$
D. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 1$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

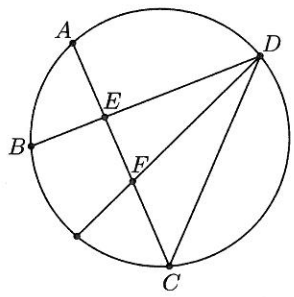
Wśród poniższych wzorów funkcji wskaż wzór tej funkcji, która nie ma ekstremum.

A. $f(x) = x^4 + x^2$
B. $f(x) = x^4 - 2x$
C. $f(x) = x^3 + x$
D. $f(x) = x^3 + x^2$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Na rysunku $|AE| = x$, $|BE| = y$, $|EF| = 3$, $|FC| = 4$ i $|CD| = 12$ oraz $|\angle BDF| = |\angle CDF|$. Liczba $\frac{x}{y}$ jest równa

A. $\frac{9}{7}$
B. $\frac{7}{9}$
C. $\frac{12}{7}$
D. $\frac{4}{3}$



Zadanie 7. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych mniejszych od 835, które z dzielenia przez 6 dają resztę 5. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $\frac{0{,}2x^2-3x+10}{(x-8)^2} < 0$. Zakoduj, w kolejności rosnącej, wszystkie liczby naturalne spełniające tę nierówność.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

W trójkącie o bokach długości 13, 14 i 15 oblicz kwadrat długości środkowej poprowadzonej do boku o długości 14. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Wyznacz najmniejsze dodatnie miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3}$. Wykorzystując podstawienie $\pi = 3{,}14$ zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej x ułamek $\frac{7x+4}{2x+1}$ jest nieskracalny.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

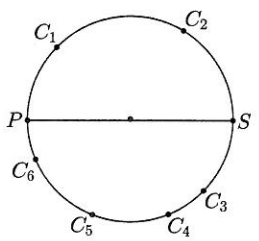
Wykaż, że kwadrat długości średnicy okręgu wpisanego w trapez równoramienny jest równy iloczynowi długości podstaw tego trapezu.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Na płaszczyźnie z układem współrzędnych dane są punkty $A = (2, -1)$, $B = (7, 2)$ i $C = (5, 3)$. Wyznacz współrzędne wektora o długości 1 równoległego do wektora $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Zadanie 14. *(5 pkt)*

Odcinek PS jest średnicą okręgu. Na jednym półokręgu zaznaczamy punkty C_1 i C_2, a na drugim półokręgu punkty C_3, C_4, C_5 i C_6 różne od punktów P i S (zobacz rysunek). Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką. Jeśli wypadnie para różnych liczb oczek (m, n), gdzie $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, to tworzymy kąt wpisany o ramionach C_mP i C_mC_n, a jeśli wypadnie para (m, m), to tworzymy kąt wpisany o ramionach C_mP i C_mS. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia w ten sposób kąta rozwartego, pod warunkiem, że co najmniej jedna z liczb wyrzuconej pary oczek jest parzysta.



Zadanie 15. *(5 pkt)*

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zadanie 16. *(6 pkt)*

Oblicz pole trójkąta utworzonego przez styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$ w punkcie $x_0 = 3$ z osiami układu współrzędnych.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

W jakim stosunku należy podzielić dany odcinek o długości a na dwie części tak, aby objętość stożka, którego promień będzie utworzony z jednej z tych części, a wysokość z drugiej, była największa?

Zadanie 18. *(7 pkt)*

Wierzchołki trójkąta o bokach długości 5, 8 i 9 leżą na powierzchni kuli o promieniu długości 5.

a) Wykaż, że dwa boki tego trójkąta widać ze środka kuli pod kątem rozwartym.

b) Oblicz objętość ostrosłupa, którego podstawą jest dany trójkąt, a czwarty wierzchołek ostrosłupa jest środkiem tej kuli.

ARKUSZ X

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego: $-\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}-\ldots$ jest równa

A. $2(1-\sqrt{2})$ **B.** $2(\sqrt{2}-1)$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $-2\sqrt{2}$

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Liczbę $2^{2014}\cdot 5^{2014}$ zapisano w systemie dziesiętnym. Liczba jej cyfr jest równa

A. 2014 **B.** 4028 **C.** 2015 **D.** 10^{2014}

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Granica $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** 4 **C.** 0 **D.** $+\infty$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Równanie $(4-x)(x+6)=a$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla

A. $a=-1$
B. $a=1$
C. $a=24$
D. $a=25$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej na jednej kostce wypadnie jedynka, jeżeli wiadomo, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek, jest równe

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 0,6

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Które z poniższych zdań jest fałszywe?

A. $\sin 1000^\circ=-\cos 10^\circ$
B. $-\sin^2 105^\circ+\cos^2 105^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\mathrm{tg}40^\circ\mathrm{tg}45^\circ\mathrm{tg}50^\circ=1$
D. $\sin 120^\circ\cdot\cos 540^\circ=-1$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Promień okręgu wpisanego w romb o kącie 60° jest równy $\sqrt{3}$. Wówczas

A. przekątne rombu mają długości 2 i $2\sqrt{3}$
B. pole rombu jest równe $\sqrt{3}$
C. obwód rombu jest równy 8
D. bok rombu ma długość 4

Zadanie 8. *(2 pkt)*

O liczbach a i b wiemy, że $4^a = 25$ oraz $8^b = 27$. Oblicz 2^{a-b}. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Do pewnej prostej należą punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (4, 5)$. Wyznacz tangens kąta nachylenia tej prostej do osi OX. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\sqrt{3n-4}+3>n$. Oblicz jej sześcian. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzykanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Dane są wektory $\vec{u}=[3,-1]$, $\vec{v}=[-5,-3]$, $\vec{w}=[-1,2]$. Udowodnij, że jeśli wektory $k\vec{u}-m\vec{v}$ oraz $\vec{w}$ są prostopadłe, to $m=5k$.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Uzasadnij, że liczba $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

W trójkącie ABC dane są $A=(-2,4)$, $\overrightarrow{AB}=[6,-5]$, $\overrightarrow{BC}=[1,4]$. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie $O=(0,0)$ i skali $k=-\frac{1}{2}$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B, C, A_1, B_1, C_1.

Zadanie 14. *(3 pkt)*

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$.

Zadanie 15. *(4 pkt)*

W okrag o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ wpisano kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

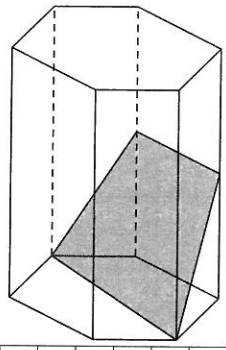
Zadanie 17. ***(5 pkt)***
Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = |x| - x^2$.

Zadanie 18. *(5 pkt)*

Pan Masłowski kupił dwie kwadratowe wykładziny i zapłacił za nie razem 1705 zł. Cena pierwszej wykładziny była równa 30 zł/m^2, zaś cena drugiej 25 zł/m^2. Oblicz wymiary wykładzin wiedząc, że długość boku pierwszej była o 3 m mniejsza od długości boku drugiej.

Zadanie 19. *(6 pkt)*

Oblicz miarę kąta nachylenia płaszczyzny zaznaczonego przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Pole przekroju jest równe 24 cm^2, a krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 4 cm.



ARKUSZ XI

Zadanie 1. *(1 pkt)*

W pewnym ciągu $a_3 = 5$, $a_5 = 8$ oraz $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 7$ dla każdego $n \in C_+$. Wyraz a_{2014} jest równy

A. 5 **B.** 8 **C.** 6 **D.** -6

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Określ, w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta α, jeżeli $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$ i $\sin\alpha + \cos\alpha < 0$.

A. *I* **B.** *II* **C.** *III* **D.** *IV*

Zadanie 3. *(1 pkt)*

Która z poniższych równości jest prawdziwa dla każdych liczb $x, y \in R$.

A. $|x + y| = |x| + |y|$
B. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
C. $|x - y| = ||x| - |y||$
D. $|x - y| = |x| - |y|$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3-5n}{n+1}$. Granicą tego ciągu jest liczba

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -5

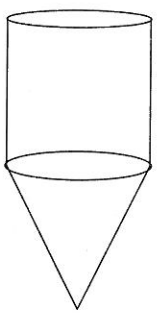
Zadanie 5. *(1 pkt)*

Wektor $\vec{u} = [-3, 1 - a]$ ma długość równą 5. Wskaż wartości parametru a.

A. $a = -3$ lub $a = 5$
B. $a = -5$ lub $a = -3$
C. $a = 3$ lub $a = 5$
D. $a = 3$ lub $a = -5$

Zadanie 6. *(1 pkt)*

Górna część zbiornika (patrz rysunek) jest walcem o średnicy równej jego wysokości, a dolna jest stożkiem o wysokości równej promieniowi podstawy. Jaką część objętości całego zbiornika stanowi objętość tej części, która jest stożkiem?



A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{7}$
D. $\frac{1}{6}$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Pole trójkąta o bokach długości $2\sqrt{7}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{15}$ jest równe

A. $2\sqrt{7}$ **B.** $4\sqrt{14}$ **C.** $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ **D.** 6

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Okrąg ma środek w punkcie $S = (-2, 1)$ i przechodzi przez początek układu współrzędnych. Oblicz długość promienia tego okręgu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Niech $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, gdzie $x \neq 2$. Znajdź $f'(x)$. Oblicz $-100 \cdot f'(1)$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzykanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Wielomian $W(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Wyznacz sumę sześcianów pierwiastków tego wielomianu. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzykanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

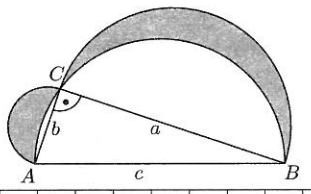
Uzasadnij, że $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = 1$.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Rozwiąż równanie $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 2$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Uzasadnij, że suma pól księżyców Hipokratesa jest równa polu trójkąta prostokątnego ABC.



Zadanie 14. *(5 pkt)*

Odległość między miastami A i B jest równa 60 km. Samochód osobowy przebywa tę drogę o 45 minut szybciej niż rowerzysta. Średnia prędkość samochodu jest większa od średniej prędkości rowerzysty o 40 km/h. Oblicz średnie prędkości rowerzysty oraz samochodu.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 3$, gdzie $b > 0$ ma różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy -3. Wiedząc, że funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość równą (-4), oblicz:

a) współczynniki a i b,

b) miejsca zerowe funkcji f.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Wyznacz wspólne rozwiązania równań $\cos 3x = \cos x$ oraz $\sin 4x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 17. *(6 pkt)*

Funkcja $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ osiąga ekstrema w punktach x_1 i x_2. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez środek odcinka AB, gdzie $A = (x_1, f(x_1))$, $B = (x_2, f(x_2))$ i równoległej do stycznej poprowadzonej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x_0 = 4$.

Zadanie 18. *(7 pkt)*

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48. Wyznacz wymiary tego graniastosłupa tak, aby jego objętość była największa.

ARKUSZ XII

Zadanie 1. *(1 pkt)*

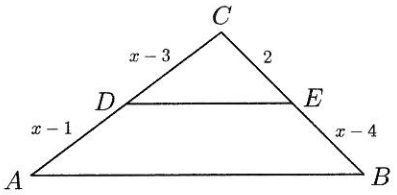
Która z następujących funkcji ma skończoną granicę w nieskończoności?

A. $h(x) = x + \frac{1}{x}$ **B.** $f(x) = x - x^2$ **C.** $g(x) = \frac{x+5}{x-5}$ **D.** $t(x) = 1 + |x|$

Zadanie 2. *(1 pkt)*

Dla jakiej wartości x odcinek DE jest równoległy do podstawy AB trójkąta ABC?

A. $x = 2$ i $x = 7$
B. tylko dla $x = 2$
C. tylko dla $x = 7$
D. dla $x \geq 7$



Zadanie 3. *(1 pkt)*

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, którego pierwszym wyrazem jest 5, a suma jego wszystkich wyrazów równa się 25.

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** 5

Zadanie 4. *(1 pkt)*

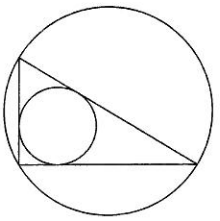
Zbiorem rozwiązań nierówności $3x - |x + 2| < 6$ jest

A. $(-\infty, 4)$ **B.** $(-\infty, 4\rangle$ **C.** $(1, 4)$ **D.** $(-1, 4)$

Zadanie 5. *(1 pkt)*

Niech a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego. Jeśli r jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, a R jest długością promienia okręgu opisanego na nim, to $2r + 2R$ równa się

A. $\frac{1}{2}(a + b)$
B. $\sqrt{ab}$
C. $a + b$
D. $\sqrt{a^2 + b^2}$



Zadanie 6. *(1 pkt)*

Cosinus kąta między przekątną ściany bocznej i sąsiednią ścianą boczną w graniastosłupie trójkątnym, którego ściany boczne są kwadratami, jest równy

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Zadanie 7. *(1 pkt)*

Prosta o równaniu $y = 2x + k$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, jeśli k jest równe

A. $k = -2$ lub $k = 2$ **B.** $k = 1$ lub $k = -1$
C. tylko dla $k = 2$ **D.** tylko dla $k = -1$

Zadanie 8. *(2 pkt)*

Liczba $1+\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem równania $x^2+px+q=0$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Oblicz wartość wyrażenia $-100(p+q)$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności uzykanego wyniku.

Zadanie 9. *(2 pkt)*

W trójkącie ABC dane są: $|AB|=3$, $|BC|=1$, a miara kąta ABC równa się 60°. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Z urny zawierającej 2 kule białe i 6 czarnych losujemy trzy razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jedna z nich będzie biała. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Udowodnić, że jeżeli $x + y = 4$ i $x^3 + y^3 = 16$, to wartość wyrażenia $4x^2y^2$ jest równa 64.

Zadanie 12. *(3 pkt)*

Prosta o równaniu $x + y = r$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r$. Uzasadnij, że wówczas $r = 2$.

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0$ w przedziale $x \in \langle 0, 4\pi \rangle$.

Zadanie 14. *(3 pkt)*

Wielomian $W(x) = x^3 - (k+m)x^2 - (k-m)x + 3$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$ oraz przez dwumian $x - 3$. Oblicz wartości parametrów k oraz m tego wielomianu.

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych, które nie są podzielne ani przez 12, ani przez 15.

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 0)$ i $B = (-1, 2)$ należy do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 17. *(7 pkt)*

Trójkąt równoramienny o danym obwodzie m obraca się dookoła podstawy. Podaj maksymalną objętość powstałej w ten sposób bryły.

Zadanie 18. *(7 pkt)*

Napisz równania stycznych do wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, na których leży punkt $P = (2, -4)$.

ODPOWIEDZI I SCHEMATY PUNKTOWANIA

ARKUSZ I

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	B	C	B	A	D	D	6 7 5	1 1 7	2 5 6

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Zapisanie nierówności w postaci $\frac{4x^3-3x+1}{x} \geq 0$.
2 pkt Zapisanie nierówności w postaci $x(x+1)(2x-1)^2 \geq 0$.
3 pkt Uzasadnienie, że powyższa nierówność jest prawdziwa dla $x > 0$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zauważenie, że trójkąty ABE i ECD są równoramienne oraz tego, że suma miar kątów ABE i ECD jest równa $180°$.
2 pkt Zapisanie równości $|\angle BEA| + |\angle DEA| + |\angle DEC| = 180°$.
3 pkt Uzasadnienie na podstawie powyższej równości, że $|\angle DEA| = 90°$.

Zadanie 13. (0–4)

1 pkt Zapisanie nierówności w postaci $\cos 3x > \frac{1}{2}$.
2 pkt Zapisanie nierówności $\cos u > \frac{1}{2}$ oraz wykonanie wykresu funkcji $y = \cos u$.
3 pkt Podanie rozwiązania nierówności $u \in \langle 0; \frac{\pi}{3})$.
4 pkt Podanie odpowiedzi $x \in \langle 0; \frac{\pi}{9})$.

Zadanie 14. (0–4)

1 pkt Podanie współrzędnych punktu $F = (1, \sqrt{3})$ oraz środka okręgu $S = (2, 0)$.
2 pkt Wyznaczenie równania prostej FS: $y = -\sqrt{3}(x-2)$.
3 pkt Podanie współczynnika kierunkowego stycznej $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 pkt Wyznaczenie równania szukanej stycznej $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Zadanie 15. (0–5)

1 pkt Zauważenie, że $P_{BFD} = 2 \cdot P_{ADF} = 2x$.
2 pkt Zauważenie, że $P_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot P_{AFE} = \frac{1}{2}y$.
3 pkt Zauważenie, że $P_{CFB} = 2 \cdot P_{AFC} = 3y$.
4 pkt Zauważenie zależności $3x + y = 7y$, skąd $x = 2y$.
5 pkt Podanie odpowiedzi: szukany stosunek wynosi $\frac{2}{7}$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Obliczenie pochodnej $f'(x) = 3x^2 - 3$ oraz jej miejsc zerowych -1, 1.
2 pkt Ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji f.
3 pkt Ustalenie maksimum $f(-1) = 4$ oraz minimum $f(1) = 0$ funkcji f.
4 pkt Wykonanie szkicu wykresu funkcji f uwzględniający punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OY: $(0, 2)$.
5 pkt Podanie odpowiedzi: $m \in (2, 4)$.

Zadanie 17. (0–6)

3 pkt Przyjęcie strategii obliczenia wszystkich liczb nieparzystych czterocyfrowych i wszystkich liczb nieparzystych czterocyfrowych bez „siódemki".

4 pkt Obliczenie liczby wszystkich liczb nieparzystych $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

5 pkt Obliczenie liczby wszystkich liczb nieparzystych czterocyfrowych bez „siódemki" $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$.

6 pkt Podanie odpowiedzi $4500 - 2592 = 1908$.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Zapisanie warunków $r + l = 12$ oraz $r^2 + h^2 = l^2$.

2 pkt Wyznaczenie zależności $h = \sqrt{144 - 24r}$, gdzie $r \in (0, 6)$.

3 pkt Zapisanie wzoru na objętość stożka $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{144 - 24r} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi r^2\sqrt{6 - r}$.

4 pkt Analiza funkcji $y(r) = 6r^4 - r^5$.

5 pkt Wyznaczenie $r = 4{,}8$ spełniającego warunek konieczny ekstremum.

6 pkt Wykazanie, że w punkcie $r = 4{,}8$ funkcja osiąga maksimum.

7 pkt Podanie wymiarów stożka: $4{,}8$, $l = 7{,}2$, $h = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

ARKUSZ II

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
C	D	B	D	B	A	B	3 9 7	5 0 1	2 5 2	4 5 2

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Uzasadnienie, że trójkąt jest rozwartokątny wynikające z faktu, że największy kąt ma miarę $\frac{8}{11} \cdot 180^\circ > 90^\circ$.

2 pkt Zauważenie, że $\angle ASB = 6\alpha$, $\angle ASC = 4\alpha$ jako kąty środkowe.

3 pkt Zauważenie, że $\angle BSC = 2\alpha$ i stwierdzenie, że liczby $6\alpha, 4\alpha, 2\alpha$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 13. (0–4)

2 pkt Zapisanie nierówności $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$ wynikających z faktu, że średnia arytmetyczna jest nie mniejsza od średniej geometrycznej.

3 pkt Pomnożenie powyższych nierówności stronami $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$.

4 pkt Doprowadzenie powyższej nierówności do postaci $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Zadanie 14. (0–4)

1 pkt Obliczenie pochodnej $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x + m$.

2 pkt Obliczenie $\Delta = 4m^2 - 4m + 4$.

3 pkt Stwierdzenie, że $\Delta > 0$ dla każdego $m \in R$.

4 pkt Podanie odpowiedzi $m \in (0, +\infty)$, gdyż na podstawie wzorów Viette'a $x_1 \cdot x_2 = m$.

Zadanie 15. (0–4)

1 pkt Zapisanie równania w postaci $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$.

2 pkt Zapisanie równania w postaci $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

3 pkt Zapisanie równania w postaci $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

4 pkt Podanie rozwiązań równania $x \in \{0, \frac{2}{3}\pi, 2\pi\}$.

Zadanie 16. (0–4)

1 pkt Zapisanie, że $|\Omega| = 6! = 720$.

2 pkt Zapisanie grup 4 układów *npnpnp*, *pnpnpn*, *nppnpn*, *npnppn*, gdzie p oznacza liczbę parzystą, a n liczbę nieparzystą.

3 pkt Zliczenie liczby elementów jednej grupy $3! \cdot 3!$.

4 pkt Podanie odpowiedzi $P(A) = \frac{4 \cdot 3! \cdot 3!}{720} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$.

Zadanie 17. (0–5)

1 pkt Obliczenie pola trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{21}{4}\sqrt{3}$.

2 pkt Obliczenie pól trójkątów, na które podzieliła trójkąt dwusieczna: $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot d \cdot \sin 60^\circ$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot d \cdot \sin 60^\circ$, gdzie d oznacza długość dwusiecznej zawartej w trójkącie.

3 pkt Zapisanie równości $P_1 + P_2 = P$.

4 pkt Zapisanie równania $\frac{7}{4}\sqrt{3}d + \frac{3}{4}\sqrt{3}d = \frac{21}{4}\sqrt{3}$.

5 pkt Podanie odpowiedzi $d = 2{,}1$.

Zadanie 18. (0–5)

1 pkt Zapisanie równania okręgu w postaci $(x-5)^2+(y-3)^2=34-m$.

2 pkt Wyznaczenie odległości między środkami okręgów: $\sqrt{45}$.

3 pkt Rozwiązanie równania $\sqrt{45}=\sqrt{5}+\sqrt{34-m}$: $m=14$.

4 pkt Zapisanie równania prostej przechodzącej przez środki okręgów $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

5 pkt Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ (x+1)^2+y^2=5 \end{cases}$ i podanie odpowiedzi $\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

Zadanie 19. (0–6)

1 pkt Wyznaczenie wysokości podstawy ostrosłupa $h=32$.

2 pkt Wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa $P=768$.

3 pkt Wyznaczenie promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa $R=\frac{abc}{4P}=25$.

4 pkt Stwierdzenie, że spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w środku okręgu opisanego na podstawie.

5 pkt Wyznaczenie wysokości ostrosłupa $H=25\sqrt{3}$.

6 pkt Wyznaczenie objętości ostrosłupa $V=6400\sqrt{3}$.

ARKUSZ III

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
C	C	D	C	C	B	D	2 7 8	3 7 5	3 1 3

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Obliczenie $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11}$ oraz $P(B - A) = \frac{3}{11}$.
2 pkt Zauważenie, że $P(A) \geq P(A \cap B) = \frac{3}{11}$.
3 pkt Zauważenie, że $P(A) \leq 1 - P(B - A) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie nierówności w postaci $\frac{1}{1-q} \geq 4q$, gdzie $|q| < 1$.
2 pkt Zapisanie powyższej nierówności w postaci $\frac{4q^2-4q+1}{1-q} \geq 0$.
3 pkt Uzasadnienie powyższej nierówności odwołując się do faktu, że $|q| < 1$.

Zadanie 13. (0–4)

1 pkt Wyznaczenie podstawy trójkąta $a(\sqrt{2}+1)$ oraz jego wysokości $a(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)$.
2 pkt Wyznaczenie pola trójkąta $P_t = \frac{1}{4}a^2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2$.
3 pkt Wyznaczenie pola ośmiokąta foremnego $P_o = 2a^2(\sqrt{2}+1)$.
4 pkt Wyznaczenie stosunku pól $\frac{P_t}{P_o} = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$.

Zadanie 14. (0–4)

1 pkt Zapisanie równania $3x = 5x + 2k\pi$, gdzie $k \in C$.
2 pkt Zapisanie równania $3x = -5x + 2k\pi$, gdzie $k \in C$.
3 pkt Rozwiązanie powyższych równań $x = k\pi$, $x = \frac{1}{4}k\pi$.
4 pkt Podanie odpowiedzi $x \in \{0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi\}$.

Zadanie 15. (0–5)

2 pkt Wyznaczenie współrzędnych czwartego wierzchołka rombu $D = (4, 3)$.
3 pkt Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu wpisanego $S = (4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.
4 pkt Podanie promienia okręgu $r = 1\frac{1}{2}$.
5 pkt Zapisanie równania okręgu wpisanego w romb $(x - 4{,}5)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Zadanie 16. (0–6)

1 pkt Wyznaczenie pochodnej funkcji $f'(x) = 5x^4 - 45x^2$.
2 pkt Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.
3 pkt Odczytanie przedziałów monotoniczności: funkcja f rosnąca w przedziałach $(-\infty, -3\rangle$ oraz $\langle 3, +\infty)$, funkcja f malejąca w przedziale $\langle -3, 3\rangle$.
4 pkt Obliczenie maksimum funkcji $f(-3) = 162$ oraz minimum funkcji $f(3) = -162$.
5 pkt Wykonanie szkicu wykresu funkcji f uwzględniającego przedziały monotoniczności, ekstrema funkcji oraz granice wielomianu w $-\infty$ jak i $+\infty$.
6 pkt Sformułowanie odpowiedzi: równanie ma 3 rozwiązania dla $m \in (-162, 162)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-162, 162\}$, 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty, -162) \cup (162, +\infty)$.

Zadanie 17. (0–6)

1 pkt Wprowadzenie zmiennej pomocniczej $t = 2015^x > 0$ i zapisanie równania w postaci $t^2 - 6t + m^2 - 8m = 0$.

2 pkt Zapisanie alternatywy warunków:

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_0 > 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 = 0 \wedge t_2 > 0 \end{cases}$

3 pkt Rozwiązanie warunku a) $m \in (0, 8)$.

4 pkt Rozwiązanie warunku b) $m = -1$ lub $m = 9$.

5 pkt Rozwiązanie warunku c) $m = 8$ lub $m = 0$.

6 pkt Podanie odpowiedzi $m \in \langle 0; 8\rangle \cup \{-1; 9\}$.

Zadanie 18. (0–6)

1 pkt Podanie zależności $h = \frac{32}{a^2}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy zbiornika, h wysokość zbiornika.

2 pkt Zapisanie wzoru na pole powierzchni zbiornika $S = a^2 + 4ah$.

3 pkt Zapisanie wzoru na pole powierzchni zbiornika w postaci $S(a) = \frac{a^3+128}{a}$, gdzie $a > 0$.

4 pkt Obliczenie pochodnej $S'(a) = \frac{2a^3-128}{a^2}$.

5 pkt Obliczenie miejsca zerowego pochodnej $S'(a)$: $a = 4$.

6 pkt Podanie wymiarów zbiornika $4 \times 4 \times 2$.

ARKUSZ IV

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	C	B	D	D	B	B	3 1 5	5 7 7	5 2 0

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Zapisanie nierówności w postaci $x + 1 + y^3x + y^2 - 2y > 0$.
2 pkt Zapisanie nierówności w postaci $(y-1)^2 + x + xy^3 > 0$.
3 pkt Uzasadnienie tezy zadania.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Postawienie hipotezy, że szukanym okręgiem jest okrąg, którego średnicą jest bok AB.
2 pkt Uzasadnienie, że punkty D i E leżą na powyższym okręgu.
3 pkt Uzasadnienie tezy zadania.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Obliczenie odległości prostej od punktu S: $d = \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$.
2 pkt Zapisanie nierówności $d = \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} < 1$.
3 pkt Rozwiązanie nierówności $m \in (-\infty, -\frac{3}{4})$.

Zadanie 14. (0–4)

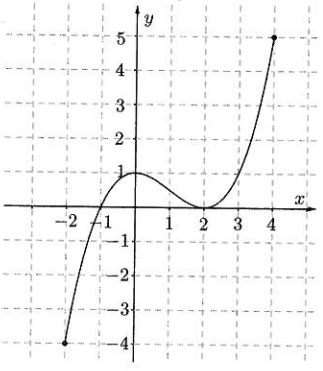
1 pkt Wyznaczenie drugiej współrzędnej punktu $A = (4, 2)$ oraz pochodnej $y' = \frac{1}{2}x$.
2 pkt Wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej $y'(4) = 2$.
3 pkt Wyznaczenie równania stycznej $y = 2x - 6$.

Zadanie 15. (0–4)

1 pkt Zapisanie równości $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$.
2 pkt Doprowadzenia równania do alternatywy równań $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = 1$.
4 pkt Rozwiązanie powyższych równań: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oraz $x = 2k\pi$, gdzie $k \in C$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Ustalenie miejsc zerowych funkcji $x = -1$, $x = 2$ oraz $f(0) = 1$.
2 pkt Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = \frac{3}{4}x(x-2)$.
3 pkt Ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji: f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0\rangle$ oraz $\langle 2, +\infty)$, f jest malejąca w przedziale $\langle 0, 2\rangle$.
4 pkt Ustalenie maksimum funkcji w punkcie $x = 0$ i minimum funkcji w punkcie $x = 2$.
5 pkt Wykonanie wykresu funkcji w podanym przedziale.



Zadanie 17. (0–5)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń A – wylosowana za drugim razem kula jest biała, B_i - za pierwszym razem wylosowano $i \in \{0, 1, 2\}$ kul białych.

2 pkt Obliczenie prawdopodobieństw $P(B_o) = \frac{1}{12}$, $P(B_1) = \frac{6}{12}$, $P(B_2) = \frac{5}{12}$.

3 pkt Obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(A|B_o) = \frac{6}{7}$, $P(A|B_1) = \frac{5}{7}$, $P(A|B_2) = \frac{4}{7}$.

4 pkt Zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

5 pkt Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{20}{21}$.

Zadanie 18. (0–5)

2 pkt Zapisanie układu równań: $ac = b^2$, $b + d = 2c$, $a + d = 16$, $b + c = 15$, gdzie (a, b, c, d) to szukany ciąg liczb.

3 pkt Wyznaczenie niewiadomych w zależności od jednej zmiennej np.: $a = 31 - 3c$, $b = 15 - c$, $d = 3c - 15$.

4 pkt Wyznaczenie z równania $4c^2 - 61c + 225 = 0$ niewiadomej c: $c = 9$ lub $c = \frac{25}{4}$.

5 pkt Podanie odpowiedzi $(4, 6, 9, 12)$ oraz $(\frac{49}{4}, \frac{35}{4}, \frac{25}{4}, \frac{15}{4})$.

Zadanie 19. (0–6)

1 pkt Wykonanie rysunku ostrosłupa z zaznaczeniem kąta α oraz wysokości ostrosłupa.

2 pkt Zapisanie równości $b = \frac{a}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$, gdzie a - długość krawędzi podstawy, b - długość krawędzi bocznej.

3 pkt Zapisanie równości $h^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = b^2$.

4 pkt Zapisanie równości z jedną niewiadomą a: $h^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5 pkt Wyznaczenie a w zależności od h i α: $a^2 = \frac{12h^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

6 pkt Wyznaczenie objętości ostrosłupa $V = \frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

ARKUSZ V

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	B	D	A	B	C	1 6 6	2 4 0	5 2 0

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Zapisanie równości w postaci $\sin\alpha(2-\cos\alpha) - 5\cos\alpha(2-\cos\alpha) = 0$.
2 pkt Zapisanie równości w postaci $(2-\cos\alpha)(\sin\alpha - 5\cos\alpha) = 0$.
3 pkt Wywnioskowanie z powyższej równości, że $\mathrm{tg}\alpha = 5$.

Zadanie 12. (0–4)

1 pkt Załóżmy, że $b \le a$, wtedy $ab^2 - a^b = ab(b-a) \le 0 \le \frac{1}{4}$.
2 pkt Jeśli $b \ge a$, to $ab^2 - a^2b \le ab - a^2b^2$.
3 pkt Zauważenie, że nierówność $ab - a^2b^2 \le \frac{1}{4}$ jest równoważna nierówności $(ab - \frac{1}{2})^2 \ge 0$.
4 pkt Uzasadnienie tezy zadania.

Zadanie 13. (0–4)

1 pkt Zapisanie równości $\frac{r}{R-r} = \frac{1}{2}$, gdzie R oznacza promień wycinka, natomiast r promień koła wpisanego w wycinek.
2 pkt Wyznaczenie zależności $r = \frac{R}{3}$.
3 pkt Wyznaczenie pola wycinka $P_w = \frac{1}{6}\pi R^2$ oraz pola koła $P_k = \frac{1}{9}\pi R^2$.
4 pkt Podanie odpowiedzi $\frac{P_k}{P_w} = \frac{2}{3}$.

Zadanie 14. (0–4)

1 pkt Zapisanie układu równań $x_1 + x_2 = 2$, $7x_2 - 4x_1 = 47$.
2 pkt Wyznaczenie $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.
3 pkt Ułożenie równania $p(p-14) = 15$.
4 pkt Podanie odpowiedzi $p = -1$ lub $p = 15$.

Zadanie 15. (0–5)

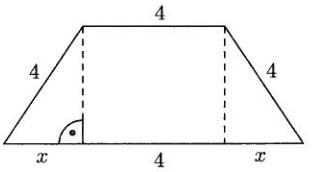
1 pkt Wyodrębnienie dwóch przypadków: gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
2 pkt Zliczenie przypadków, gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta $5 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3$.
3 pkt Zliczenie przypadków, gdy pierwsza cyfra jest parzysta $4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5 \cdot 5^4$.
4 pkt Zapisanie sumy $5 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3 + 4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5 \cdot 5^4$.
5 pkt Podanie odpowiedzi: $50 \cdot 5^5 + 20 \cdot 5^5 = 14 \cdot 5^6 = 218750$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Zapisanie równania okręgu w postaci $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.
2 pkt Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$: $A = (0,2)$, $D = (2,-2)$
3 pkt Wyznaczenie współrzędnych pozostałych wierzchołków prostokąta: $B = (-8,-2)$, $C = (-6,-6)$.
4 pkt Wyznaczenie długości boków prostokąta $|AD| = \sqrt{20}$, $|AB| = \sqrt{80}$.
5 pkt Obliczenie pola prostokąta $P = 40$.

Zadanie 17. (0–6)

1 pkt Wykonanie rysunku z oznaczeniami.



Wyznaczenie $h = \sqrt{16 - x^2}$, gdzie $x \in (0, 4)$.

2 pkt Zapisanie wzoru na pole trapezu $P(x) = (x + 4)\sqrt{16 - x^2}$.

3 pkt Analiza funkcji $y = P^2(x) = (x + 4)^2(16 - x^2)$.

4 pkt Obliczenie pochodnej $y' = -4x^3 - 24x^2 + 128$.

5 pkt Wyznaczenie punktu w przedziale $(0, 4)$, w którym funkcja f osiąga maksimum: $x_0 = 2$.

6 pkt Podanie odpowiedzi: dłuższa podstawa trapezu ma długość 8.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Wykonanie rysunku z zaznaczonymi kątami α i β.

2 pkt Obliczenie pola podstawy ostrosłupa $P = \frac{1}{2}b^2 \sin\alpha$.

3 pkt Na podstawie twierdzenia sinusów podanie zależności $R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

4 pkt Podanie wzoru na wysokości ostrosłupa $H = R\mathrm{tg}\beta$.

5 pkt Podanie zależności $H = \frac{b \cdot \mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

6 pkt Podanie wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{b^3 \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}{12\cos\frac{\alpha}{2}}$.

ARKUSZ VI

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	D	A	B	B	B	A	576	111	475

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Zapisanie tożsamości $\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}$.

2 pkt Podnosząc równość $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}}$ do kwadratu, wyznaczenie wartości $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

3 pkt Obliczenie wartości $\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}=\frac{1^2-2(\frac{1}{4})^2}{(\frac{1}{4})^4}=224\in W$.

Zadanie 12. (0–3)

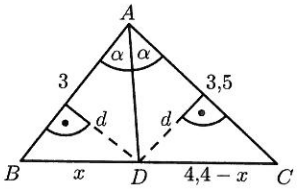
1 pkt Zapisanie równości $\frac{1}{\log_2 3}=\log_3 2$, $\frac{1}{\log_6 3}=\log_3 6$, $\frac{1}{\log_{18} 3}=\log_3 18$.

2 pkt Zapisanie własności dotyczącej ciągu arytmetycznego $\log_3 2+\log_3 18=2\log_3 6$.

3 pkt Uzasadnienie powyższej równości.

Zadanie 13. (0–4)

2 pkt Wykonanie rysunku z oznaczeniami i punktem D należącym do dwusiecznej kąta A.



3 pkt Na podstawie twierdzenia o dwusiecznej zapisanie równości $\frac{x}{4{,}4-x}=\frac{3}{3{,}5}$.

4 pkt Wyznaczenie długości $|BD|=x=\frac{132}{65}$ oraz $|DC|=4{,}4-x=\frac{154}{65}$.

Zadanie 14. (0–4)

1 pkt Wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej $y'(1)=-2$.

2 pkt Wyznaczenie równania stycznej $y=-2x+5$.

3 pkt Wyznaczenie długości przyprostokątnych trójkąta: 5, $2\frac{1}{2}$.

4 pkt Obliczenie pola trójkąta $P=6{,}25$.

Zadanie 15. (0–5)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń A' – prawdopodobieństwo nieuzyskania „szóstki”, B_i - prawdopodobieństwo wylosowania $i\in\{1,2,3\}$ kul białych.

2 pkt Obliczenie prawdopodobieństw $P(B_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_2)=\frac{6}{10}$, $P(B_3)=\frac{1}{10}$.

3 pkt Obliczenie prawdopodobieństw warunkowych $P(A'|B_1)=\frac{5}{6}$, $P(A'|B_2)=\frac{25}{36}$, $P(A'|B_3)=\frac{125}{216}$.

4 pkt Zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite $P(A')=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}+\frac{6}{10}\cdot\frac{25}{36}+\frac{1}{10}\cdot\frac{125}{216}=\frac{313}{432}$.

5 pkt Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A)=1-\frac{313}{432}=\frac{119}{432}$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia cosinusów $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, gdzie a, b oznaczają długości boków równoległoboku, α - jeden z kątów równoległoboku, d - długość przekątnej równoległoboku znajdującej się naprzeciwko kąta α.

2 pkt Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia cosinusów $D^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, gdzie D oznacza długość drugiej przekątnej równoległoboku.

3 pkt Dodając powyższe równości stronami otrzymanie $d^2 + D^2 = 2a^2 + 2b^2$.

4 pkt Konstrukcja funkcji $s(d) = d^2 + (8 - d)^2$.

5 pkt Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji $s(4) = 32$.

Zadanie 17. (0–6)

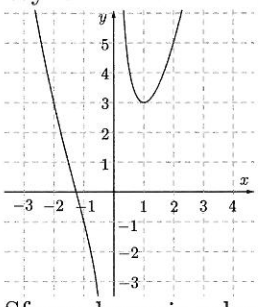
1 pkt Określenie funkcji $m = f(x) = \frac{x^3+2}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

2 pkt Wyznaczenie granic $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

3 pkt Wyznaczenie pochodnej $f'(x) = \frac{2x^3-2}{x^2}$.

4 pkt Wyznaczenie minimum funkcji $f(1) = 3$ oraz przedziałów monotoniczności: funkcja f maleje w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, 1\rangle$, funkcja f rośnie w przedziale $\langle 1, +\infty)$.

5 pkt Wykonanie szkicu wykresu funkcji.



6 pkt Sformułowanie odpowiedzi: Równanie ma trzy rozwiązania dla $m \in (3, +\infty)$.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń: R - promień podstawy stożka, l - długość tworzącej stożka, r - promień kuli wpisanej w stożek oraz stwierdzenie, że ciąg $(\pi R^2, 4\pi r^2, \pi Rl)$ jest arytmetyczny.

2 pkt Zapisanie równości $\pi R^2 + \pi Rl = 8\pi r^2$.

3 pkt Zapisanie powyższej równości w postaci $1 + \frac{l}{R} = 8 \cdot (\frac{r}{R})^2$.

4 pkt Zapisanie równości $\frac{l}{R} = \frac{1}{\cos\alpha}$ oraz $\frac{r}{R} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, gdzie α to kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

5 pkt Zapisanie równania $8t = 1 + \frac{1+t}{1-t}$, gdzie $t = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ oraz $\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

6 pkt Wyznaczenie z równania $t = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

7 pkt Wyznaczenie $\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

ARKUSZ VII

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
D	B	C	A	D	B	2 3 7	2 6 1	6 7 5	9 4 4

Zadanie 11. (0–3)

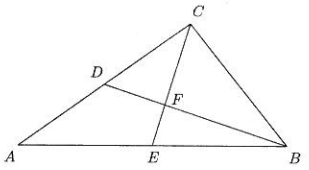
1 pkt Z definicji ciągu wynika, że $\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = 1$, więc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ i ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_1 = 3 = q$.

2 pkt Wyznaczenie $a_n = 3^n$ i $a_{n+1} = 3^{n+1}$.

3 pkt Zapisanie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_3 a_{n+1}}{\log_3 a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie, że odcinek DE jest równoległy do odcinka BC i $|DE| = \frac{1}{2}|BC| = 1$, czworokąt $BCDE$ jest trapezem prostokątnym, a trójkąty BCF i DEF są podobne w skali 2.



2 pkt Obliczenie $|CE| = \sqrt{3}$, $|BD| = \sqrt{6}$ oraz $|BF| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ i $|CF| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3 pkt Pokazanie, że $|BC|^2 = |BF|^2 + |CF|^2$.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ i stwierdzenie, że ułamek jest liczbą całkowitą, gdy $x - 1 = -1$ lub $x - 1 = 1$ lub $x - 1 = -3$ lub $x - 1 = 3$.

2 pkt Wyznaczenie punktów $(0, -1)$, $(2, 5)$, $(-2, 1)$ i $(4, 3)$ i zapisanie, dlaczego są wierzchołkami prostokąta.

3 pkt Wyznaczenie środka przekątnej prostokąta $S = (1, 2)$, napisanie równania okręgu opisanego na tym prostokącie $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Zadanie 14. (0–3)

1 pkt Zapisanie, że z twierdzenia sinusów $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta}$.

2 pkt Wykorzystanie założenia i obliczenie $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{2}$, stąd $\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{9}{4}$.

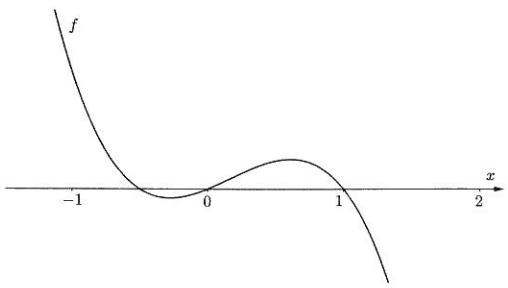
3 pkt Ponieważ $|AC| = \frac{3}{2}|BC|$, więc z nierówności trójkąta mamy $|AB| < |AC| + |BC| = 2{,}5|BC|$.

Zadanie 15. (0–3)

1 pkt Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = -4x^3 + 2x^2 + 2x$.

2 pkt Zapisanie pochodnej w postaci $f'(x) = -2x(2x^2 - x - 1)$ i obliczenie jej miejsc zerowych $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ i $x_3 = 1$.

3 pkt Szkic wykresu funkcji $y = f'(x)$ i zapisanie odpowiedzi: funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$ oraz malejąca w przedziałach $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty)$.



Zadanie 16. (0–3)

1 pkt Oznaczenie np. a, h, H, h_p odpowiednio długości krawędzi podstawy, wysokości podstawy, wysokości ostrosłupa i wysokości przekroju oraz zapisanie układu $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$ i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{h}$, gdzie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $\alpha = 30°$.

2 pkt Wyznaczenie $a = 2\sqrt{2} = h_p$.

3 pkt Obliczenie pola przekroju $P = 4$.

Zadanie 17. (0–5)

1 pkt Napisanie równania prostej AB: $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

2 pkt Obliczenie współrzędnych punktu S - środka odcinka AB: $S = (1, -1)$ i napisanie równania prostej CS: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

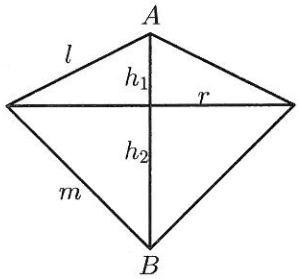
3 pkt Oznaczenie współrzędnych punktu $C = (x, -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3})$.

4 pkt Wykorzystanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania $|8\frac{1}{3}x - 8\frac{1}{3}| = 50$.

5 pkt Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi $C = (7, -9)$ lub $C = (-5, 7)$.

Zadanie 18. (0–6)

1 pkt Stwierdzenie, że otrzymana bryła składa się z dwóch stożków złączonych podstawami.



2 pkt Znalezienie zależności między wysokościami stożka, a promieniem podstawy: $r = \sqrt{3}h_1$ i $r = h_2$.

3 pkt Zapisanie równania z niewiadomą r i podanie jego rozwiązania: $\frac{r}{\sqrt{3}} + r = 5(\sqrt{3} + 1)$, $r = 5\sqrt{3}$.

4 pkt Obliczenie długości tworzących: $l = 10$ i $m = 5\sqrt{6}$.

5 pkt Obliczenie pola powierzchni bryły: $P = 25\sqrt{3}(2 + \sqrt{6})\pi$.

6 pkt Uzasadnienie, że na tej bryle nie można opisać kuli.

Zadanie 19. (0–7)

1 pkt Obliczenie $|\Omega| = 6^3 = 216$.

2 pkt Ustalenie, że zdarzeniu A sprzyjają wyniki, w których występują cyfry
a) 113, 133, 226, 662
b) 123, 236, 246, 256

3 pkt Obliczenie $|A| = 4 \cdot \frac{3!}{2!} + 4 \cdot 3! = 36$.

4 pkt Ustalenie, że zdarzeniu B sprzyjają wyniki, w których występują cyfry 665, 664, 663, 662, 554, 556, 446 oraz wyniki 666 i 555.

5 pkt Obliczenie $|B| = 7 \cdot \frac{3!}{2!} + 2 = 23$.

6 pkt Obliczenie $P(A) = \frac{36}{216}$ i $P(B) = \frac{23}{216}$.

7 pkt Odpowiedź $P(A) > P(B)$.

ARKUSZ VIII

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
C	B	C	D	C	1 5 0	5 7 7	6 5 6

Zadanie 9. (0–3)

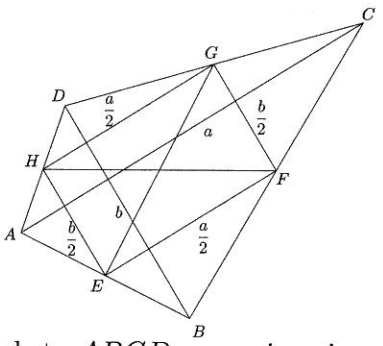
1 pkt Zapisanie iloczynu dwóch początkowych czynników:
$\log_n(n+1)\cdot\log_{n+1}(n+2)=\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_{n+1}n}=\log_n(n+2)$.

2 pkt Zapisanie iloczynu dwóch końcowych czynników:
$\log_{n+2}(n+3)\cdot\log_{n+3}n=\frac{\log_{n+3}n}{\log_{n+3}(n+2)}=\log_{n+2}n$.

3 pkt Zapisanie lewej strony wyrażenia $\log_n(n+2)\cdot\log_{n+2}n=1$.

Zadanie 10. (0–3)

1 pkt Wykazanie, że $EFGH$ jest równoległobokiem o równych przekątnych, zatem jest prostokątem.



2 pkt Zapisanie, że przekątne czworokąta $ABCD$ są wzajemnie prostopadłe, a więc pole czworokąta równa się $P=\frac{ab}{2}$.

3 pkt Skorzystanie z zależności $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ dla liczb dodatnich i zapisanie $P=\frac{ab}{2}\leq\frac{1}{2}(\frac{a+b}{2})^2$.

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń, np. P – praca, t – czas potrzebny drugiemu pracownikowi na wykonanie całej pracy, $\frac{P}{36}$, $\frac{P}{t}$ wydajność, czyli ilość pracy na godzinę odpowiednio pierwszego i drugiego pracownika.

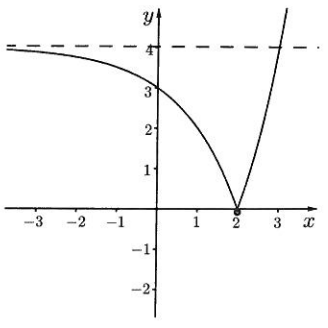
2 pkt Ułożenie równania np. $(\frac{P}{36}+\frac{P}{t})\cdot 20=P$.

3 pkt Obliczenie $t=45$ i odpowiedź: drugi pracownik potrzebuje na samodzielne wykonanie pracy 45 godzin.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x)=\begin{cases}2^x-4 & \text{dla } x>2\\ -2^x+4 & \text{dla } x<2.\end{cases}$

2 pkt Narysowanie wykresu funkcji.



3 pkt Zapisanie, że $m\in(0,4)$.

Zadanie 13. (0–3)

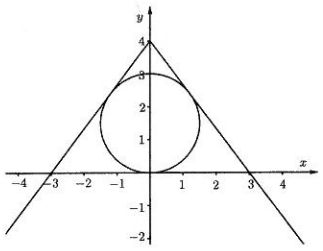
1 pkt Wykorzystanie równania prostej do zapisania współrzędnych wektora $\vec{u} = [3k, 4k]$, $k > 0$ oraz długości wektora do obliczenia $k = 2$, więc $\vec{u} = [6, 8]$.

2 pkt Wykorzystanie współczynnika kierunkowego prostej do zapisania współrzędnych wektora $\vec{w} = [24m, 7m]$, $m > 0$ oraz długości wektora do obliczenia $m = 0{,}4$, więc $\vec{w} = [9{,}6; 2{,}8]$.

3 pkt Wyznaczenie sumy $\vec{u} + \vec{w} = [6{,}8] + [9{,}6; 2{,}8] = [15{,}6; 10{,}8]$ i jej długości $|\vec{u} + \vec{w}| = 6\sqrt{10}$.

Zadanie 14. (0–3)

1 pkt Narysowanie wykresu funkcji i zauważenie, że szukamy okręgu o promieniu długości r i środku w punkcie $(0, r)$ wpisanego w trójkąt równoramienny (zobacz rysunek).



2 pkt Obliczenie pola trójkąta $P = 12$ i jego obwodu $2p = 16$.

3 pkt Wyznaczenie ze wzoru $P = pr$ długości promienia $r = 1{,}5$ i zapisanie równania $x^2 + (y - 1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Zadanie 15. (0–3)

1 pkt Obliczenie $|\Omega| = 30$ i opis zdarzeń A – ułamek nieskracalny, B – ułamek mniejszy od 1 oraz zapisanie $|B| = 15$ i $P(B) = \frac{15}{30}$.

2 pkt Wyznaczenie par sprzyjających zdarzeniu $A \cap B$: $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 11)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 11)$, $(4, 5)$, $(4, 11)$, $(5, 11)$, $(5, 12)$, $(11, 12)$, $|A \cap B| = 11$ i $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

3 pkt Obliczenie $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{11}{15}$.

Zadanie 16. (0–6)

1 pkt Zapisanie, że bok AB musi być najdłuższym bokiem trójkąta, więc z nierówności trójkąta $k^3 - 7k + 25 < 7 + 24$ albo zapisanie, że z twierdzenia cosinusów $k^3 - 7k + 25 \geq \sqrt{7^2 + 24^2}$.

2 pkt Zapisanie układu nierówności $25 \leq k^3 - 7k + 25 < 31$.

3 pkt Rozwiązanie nierówności $k^3 - 7k + 25 \geq 25$: $k \in \langle -\sqrt{7}; 0\rangle \cup \langle \sqrt{7}, +\infty)$.

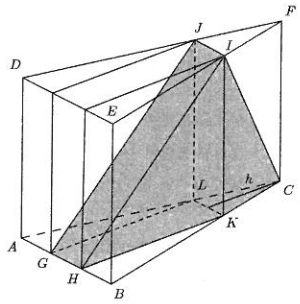
4 pkt Zapisanie nierówności $k^3 - 7k + 25 < 31$ w postaci $k^3 - 7k - 6 < 0$ i znalezienie miejsca zerowego wielomianu $k^3 - 7k - 6$: $k = -1$ (lub $k = -2$ lub $k = 3$).

5 pkt Rozwiązanie nierówności $k^3 - 7k - 6 < 0$: $k \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$.

6 pkt Podanie części wspólnej otrzymanych zbiorów rozwiązań:
$k \in \langle -\sqrt{7}; -2\rangle \cup (-1, 0\rangle \cup \langle \sqrt{7}, 3)$

Zadanie 17. (0–6)

1 pkt Stwierdzenie podobieństwa trójkątów ABC i LKC w skali 3 i obliczenie długości odcinka KL: $|KL| = 3$.



2 pkt Obliczenie wysokości trójkąta LKC: $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3 pkt Obliczenie objętości ostrosłupa o podstawie $LKIJ$ i wysokości h: $V_1 = 12\sqrt{3}$.

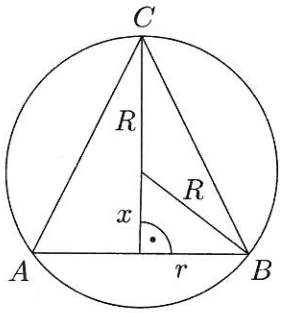
4 pkt Obliczenie długości odcinka HK: $|HK| = 3\sqrt{3}$.

5 pkt Obliczenie objętości drugiej części bryły: $V_2 = \frac{1}{2}|GH| \cdot |HK| \cdot b = 36\sqrt{3}$.

6 pkt Obliczenie szukanej objętości: $V_1 + V_2 = 48\sqrt{3}$.

Zadanie 18. (0–6)

1 pkt Oznaczenie r – długość promienia podstawy stożka, $H = x + R$ długość wysokości stożka (zobacz rysunek) i wyznaczenie $r^2 = R^2 - x^2$.



2 pkt Zapisanie wzoru na objętość stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2(R + x) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x) = V(x)$, gdzie $x \in (0, R)$.

3 pkt Obliczenie pochodnej funkcji V: $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 2Rx - 3x^2)$.

4 pkt Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1 = \frac{1}{3}R$ i $x_2 = -R$ oraz zapisanie, że dla $x \in (0, R)$: $V'(x) > 0$ w przedziale $(0, \frac{1}{3}R)$ oraz $V'(x) > 0$ w przedziale $(\frac{1}{3}R, R)$.

5 pkt Zapisanie wniosku, że funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, \frac{1}{3}R\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle\frac{1}{3}R, R)$, więc w przedziale $(0, R)$ funkcja ma największą wartość dla $x = \frac{1}{3}R$.

6 pkt Podanie odpowiedzi, że szukany stożek ma promień podstawy $r = \frac{1}{3}R$, wysokość $H = \frac{4}{3}R$ i objętość $V = \frac{32}{81}\pi R^3$.

ARKUSZ IX

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	D	B	A	C	A	1 3 8	6 7 9	1 4 8	1 8 3

Zadanie 11. (0–3)

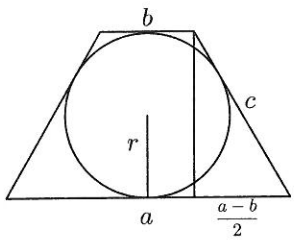
1 pkt Przypuśćmy, że ułamek można skrócić, tzn. istnieją niezerowe liczby całkowite m, n, p i $|p| \neq 1$ takie, że $7x + 4 = mp$ i $2x + 1 = np$.

2 pkt Wyznaczenie zależności między m, n i p: $p(2m - 7n) = 1$.

3 pkt Zapisanie zależności w postaci $\frac{1}{p} = 2m - 7n$ i zauważenie sprzeczności – prawa strona jest liczbą całkowitą, a lewa nie.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie, że $4r^2 + (\frac{a-b}{2})^2 = c^2$.



2 pkt Wykorzystanie warunku wpisania okręgu w czworokąt $c = \frac{a+b}{2}$ i zapisanie, że $4r^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$.

3 pkt Przekształcenie wzoru do postaci $4r^2 = ab$.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AB} = [5, 3]$ i $\overrightarrow{BC} = [-2, 1]$.

2 pkt Obliczenie $\vec{u} = [12, 5]$ i oznaczenie współrzędnych szukanego wektora $\vec{x} = [12k, 5k]$, $k \neq 0$ oraz zapisanie $(12k)^2 + (5k)^2 = 1^2$.

3 pkt Wykonanie obliczeń i podanie odpowiedzi $\vec{x} = [\frac{12}{13}, \frac{5}{13}]$ lub $\vec{x} = [-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}]$.

Zadanie 14. (0–5)

1 pkt Obliczenie $|\Omega| = 36$.

2 pkt Wypisanie par, które sprzyjają zdarzeniu A - utworzenie kąta rozwartego $(1, 2), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (5, 4), (5, 3), (4, 3)$.

3 pkt Wyznaczenie liczby par sprzyjających zdarzeniu B – co najmniej jedna z liczb wyrzuconej pary jest parzysta: $|B| = 27$ i obliczenie $P(B) = \frac{27}{36}$.

4 pkt Wyznaczenie $|A \cap B| = 6$ i obliczenie $P(A \cap B) = \frac{6}{36}$.

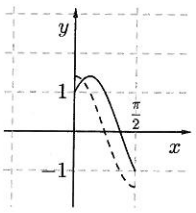
5 pkt Obliczenie $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{9}$.

Zadanie 15. (0–5)

1 pkt Zapisanie wzoru funkcji w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np. wykorzystanie wzoru $\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$.

2 pkt Zastosowanie wzoru na sumę cosinusów i zapisanie $f(x) = \sqrt{2}\cos 2(x - \frac{\pi}{8})$.

3 pkt Naszkicowanie wykres funkcji w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.



4 pkt Podanie najmniejszej wartości funkcji $f(\frac{\pi}{2}) = -1$.
5 pkt Obliczenie największej wartości funkcji $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}$.

Zadanie 16. (0–4)

1 pkt Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$.
2 pkt Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej $a = f'(3) = 4$.
3 pkt Wyznaczenie równania stycznej $y = 4x - 15$ i jej punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych $(0, -15)$ i $(\frac{15}{4}, 0)$.
4 pkt Obliczenie pola trójkąta $P = 28{,}125$.

Zadanie 17. (0–6)

1 pkt Oznaczenie r – długość promienia podstawy, $H = a - r$ długość wysokości stożka i zapisanie wzoru na objętość stożka $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2(a - r)$, $r \in (0, a)$.
2 pkt Obliczenie pochodnej funkcji V: $V'(r) = \frac{2}{3}\pi ar - \pi r^2$.
3 pkt Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej: $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{2}{3}a$.
4 pkt Zapisanie, że dla $r \in (0, a)$: $V'(r) > 0$ w przedziale $(0, \frac{2}{3}a)$ oraz $V'(r) < 0$ w przedziale $(\frac{2}{3}a, a)$.
5 pkt Wyciągnięcie wniosku, że funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, \frac{2}{3}a\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle \frac{2}{3}a, a)$, więc w przedziale $(0, a)$ funkcja ma największą wartość dla $r = \frac{2}{3}a$.
6 pkt Podanie odpowiedzi, że odcinek należy podzielić w stosunku 2:1, a promień stożka ma być dwa razy dłuższy od wysokości stożka.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Zauważenie, że odcinek o długości 5 widać ze środka kuli pod kątem 60°, a spodek wysokości ostrosłupa leży w środku okręgu opisanego na trójkącie.
2 pkt Obliczenie cosinusa kąta, pod jakim widać odcinek o długości 8: $\cos\alpha = \frac{5^2+5^2-8^2}{2\cdot5\cdot5} = -\frac{7}{25}$ i stwierdzenie, że kąt α jest rozwarty.
3 pkt Obliczenie cosinusa kąta, pod jakim widać odcinek o długości 9: $\cos\beta = \frac{5^2+5^2-9^2}{2\cdot5\cdot5} = -\frac{31}{50}$ i stwierdzenie, że kąt β jest rozwarty.
4 pkt Obliczenie pola trójkąta: $P = 6\sqrt{11}$.
5 pkt Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{15}{\sqrt{11}}$.
6 pkt Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 5\sqrt{\frac{2}{11}}$.
7 pkt Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 10\sqrt{2}$.

ARKUSZ X

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	C	B	D	C	D	D	6 6 6	3 3 3	3 4 3

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Obliczenie współrzędnych wektorów $k\vec{u}$, $m\vec{v}$: $k\vec{u} = [3k, -k]$, $m\vec{v} = [-5m, -3m]$ oraz obliczenie współrzędnych różnicy wektorów: $k\vec{u} - m\vec{v} = [3k + 5m, -k + 3m]$.

2 pkt Zapisanie warunku prostopadłości wektorów: $(3k + 5k)(-1) + (-k + 3m) \cdot 2 = 0$.

3 pkt Wyznaczenie liczby k w zależności od liczby m: $k = \frac{m}{3}$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie, że $(\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$.

2 pkt Zapisanie, że $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

3 pkt Zapisanie wniosku, że podana liczba równa się 2.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka B: $B = (4, -1)$.

2 pkt Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C: $C = (5, 3)$.

3 pkt Zastosowanie własności jednokładności do wyznaczenia współrzędnych punktów A_1, B_1, C_1: $A_1 = (1, -2)$, $B_1 = (-2, \frac{1}{2})$, $C_1 = (-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

Zadanie 14. (0–3)

1 pkt Uzasadnienie, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem licznika i zapisanie licznika w postaci $(x - 1)^2(x^2 + 3)$.

2 pkt Uzasadnienie, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem mianownika i zapisanie mianownika w postaci $(x - 1)^2(x + 4)$.

3 pkt Obliczenie granicy $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 4} = \dfrac{4}{5}$.

Zadanie 15. (0–4)

1 pkt Wyznaczenie długości r promienia okręgu: $r = 4$.

2 pkt Zapisanie związku między długością a boku kwadratu oraz średnicą okręgu: $2r = a\sqrt{2}$.

3 pkt Obliczanie długości boku kwadratu: $a = 4\sqrt{2}$.

4 pkt Obliczenie pola kwadratu: $P = 32$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Zastosowanie wzoru redukcyjnego: np. $\cos x = \sin(90^\circ - x)$.

2 pkt Zastosowanie wzoru na sumę sinusów.

3 pkt Zapisanie funkcji f w postaci $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$.

4 pkt Zauważenie, że $-1 \leq \cos(x - 45^\circ) \leq 1$.

5 pkt Określenie zbioru wartości funkcji f: $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

Zadanie 17. (0–5)

1 pkt Narysowanie wykresu funkcji $f(x) = |x| - x^2$.

2 pkt Zauważenie, że $f(|x|) = f(x)$.

3 pkt Wykonanie wykresu funkcji $f(x) = |x| - (|x|)^2$.

4 pkt Podanie $f_{min} = f(0) = 0$.

5 pkt Podanie $f_{max} = f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Zadanie 18. (0–5)

1 pkt Oznaczenie niewiadomych: np. x - długość boku pierwszej wykładziny, y - długość boku drugiej wykładziny, $x > 0$, $y > 0$ i zapisanie jednego z równań zgodnego z treścią zadania.

2 pkt Przedstawienie treści zadania w postaci układu równań

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 30x^2 + 25y^2 = 1705. \end{cases}$$

3 pkt Doprowadzenie układu równań do postaci, gdy jedno z równań jest równaniem kwadratowym

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 55x^2 + 150x - 1480 = 0. \end{cases}$$

4 pkt Rozwiązanie równania kwadratowego: $x = -\frac{74}{11}$ lub $x = 4$.

5 pkt Obliczenie wymiarów obu wykładzin po uwzględnieniu dziedziny 4 m × 4 m; 7 m × 7 m.

Zadanie 19. (0–6)

1 pkt Zaznaczenie szukanego kąta α oraz obliczenie dłuższej podstawy trapezu: 8 cm.

2 pkt Zapisanie równania dotyczącego pola przekroju $24 = \frac{8+4}{2} \cdot h$.

3 pkt Obliczenie wysokości trapezu będącego przekrojem: $h = 4$ cm.

4 pkt Obliczenie odległości środka podstawy graniastosłupa od krawędzi podstawy: $2\sqrt{3}$ cm.

5 pkt Obliczenie cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6 pkt Podanie miary kąta α: $\alpha = 30°$.

ARKUSZ XI

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
D	C	B	D	A	C	B	2 2 3	4 0 0	1 5 3

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Dokonanie zamiany podstaw logarytmów np. $\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 5}$.

2 pkt Skrócenie i wykonanie obliczeń $\log_3 9$: $\frac{2\log_3 2}{\log_3 4}$.

3 pkt Zastosowanie wzoru na logarytm potęgi i wykonanie skrócenia $\log_3 4 = \log_3 2^2 = 2\log_2$, $\frac{2\log_3 2}{2\log_3 2} = 1$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Wyznaczenie ilorazu ciągu geometrcznego: $q = x$ oraz określenie warunku zbieżności $x \in (-1, 1)$.

2 pkt Zapisanie dla $x \in (-1, 1)$ równania $\frac{1}{1-x} = 2$.

3 pkt Rozwiązanie równania: $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Ustalenie sposobu obliczania pola figury składającej się z księżyców: $P_f = P_{ABC} + P_a + P_b + P_c$.

2 pkt Obliczanie pól poszczególnych półkoli: $P_c = \frac{1}{8}\pi c^2$, $P_b = \frac{1}{8}\pi b^2$, $P_a = \frac{1}{8}\pi a^2$.

3 pkt Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i obliczenie pola fugury f: $P_f = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{1}{2}ab$.

Zadanie 14. (0–5)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń, np. x – średnia prędkość samochodu wyrażona w km/h, $x - 40$ – średnia prędkość rowerzysty wyrażona w km/h.

2 pkt Ułożenie równania: $\frac{60}{x} + \frac{3}{4} = \frac{60}{x-40}$.

3 pkt Doprowadzenie równania do równannia kwadratowego: $x^2 - 40x - 3200 = 0$.

4 pkt Rozwiązanie równania kwadratowego: $x = -40$ lub $x = 80$.

5 pkt Wyznaczenie jednego z rozwiązań i podanie odpowiedzi $x = 80$ km/h – prędkość samochodu, 40 km/h – prędkość rowerzysty.

Zadanie 15. (0–5)

1 pkt Wkorzystanie wzoru Viete'a: $-\frac{3}{a} = -3$.

2 pkt Obliczenie najmniejszej wartości $f(x)$: $\frac{-\Delta}{4a} = -4$.

3 pkt Obliczenie współczynnika $a = 1$.

4 pkt Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą b: $b = 2$.

5 pkt Obliczenie miejsc zerowych funkcji: $x_1 = -3$ lub $x_2 = 1$.

Zadanie 16. (0–5)

1 pkt Zapisanie wzoru na różnicę cosinusów: $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \cdot \sin x$.

2 pkt Zapisanie równania w postaci alternatywy: $\sin 2x = 0$ lub $\sin x = 0$

3 pkt Wyznaczenie rozwiązań równania $\cos 3x = \cos x$: $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$

4 pkt Rozwiązanie równania $\sin 4x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$: $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi\}$.

5 pkt Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań obu równań: $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$.

Zadanie 17. (0–6)

1 pkt Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$: $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

2 pkt Wyznaczenie ekstremum funkcji f: maksimum $f(1) = 2$ i minimum $f(3) = 6$.

3 pkt Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AB: $S = (\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}) = (2, 4)$.

4 pkt Podanie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x_0 = 4$: $m = f'(4) = \frac{3}{4}$.

5 pkt Podanie równania stycznej w punkcie (x_0, y_0): $y - y_0 = m(x - x_0)$.

6 pkt Wyznaczenie równania stycznej o podanych własnościach: $3x - 4y + 10 = 0$.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Wprowadzenie oznaczeń np. a – długość krawędzi podstawy, b – długość krawędzi bocznej i zapisanie warunku $8a + 4b = 48$.

2 pkt Wyznaczenie zależności $b = 12 - 2a$, gdzie $a \in (0, 6)$.

3 pkt Zapisanie wzoru na objętość prostopadłościanu:
$V = a^2b$, $V(a) = a^2(12 - 2a) = 12a^2 - 2a^3$.

4 pkt Analiza funkcji $V(a) = 12a^2 - 2a^3$.

5 pkt Wyznaczenie punktów, w których funkcja $V(a)$ osiąga ekstremum: $a = 0$ oraz $a = 4$.

6 pkt Pokazanie, że funkcja $V(a)$ osiąga w punkcie $a = 4$ maksimum.

7 pkt Podanie wymiarów graniastosłupa: $a = 4$, $b = 4$.

ARKUSZ XII

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
C	C	C	A	C	B	A	3 0 0	5 2 7	5 7 8

Zadanie 11. (0–3)

1 pkt Przedstawienie wyrażenia $x^3 + y^3$ w postaci $(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 4(16 - 3xy)$.

2 pkt Obliczenie wartości $xy = 4$.

3 pkt Uzasadnienie tezy $4x^2y^2 = (2xy)^2 = (2 \cdot 4)^2 = 64$.

Zadanie 12. (0–3)

1 pkt Zapisanie układu równań $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = r \end{cases}$.

2 pkt Doprowadzenie do równania $2x^2 - 2rx + r^2 - r = 0$.

3 pkt Rozpatrzenie warunku $\Delta = 0$ i na tej podstawie obliczenie $r = 2$.

Zadanie 13. (0–3)

1 pkt Zapisanie równania w postaci $\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0$.

2 pkt Zapisanie równania w postaci $\sin^2 x = 1$.

3 pkt Podanie rozwiązania równania: $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\}$.

Zadanie 14. (0–3)

1 pkt Zapisanie warunków $W(1) = 0$ oraz $W(-3) = 0$ czyli
$\begin{cases} W(1) = 1 - (k + m) - (k - m) + 3 = 0 \\ W(3) = 27 - 9(k + m) - 3(k - m) + 3 = 0 \end{cases}$.

2 pkt Podanie układu równań $\begin{cases} -2k + 4 = 0 \\ -12k - 6m + 30 = 0 \end{cases}$.

3 pkt Rozwiązanie układu równań i wyznaczenie $\begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Zadanie 15. (0–5)

1 pkt Obliczenie sumy wszystkich liczb trzycyfrowych $S = \frac{(100+999)900}{2} = 494550$.

2 pkt Obliczenie sumy liczb trzycyfrowych podzielnych przez 12:
$S_{12} = 108 + 120 + \ldots + 996 = 41400$.

3 pkt Obliczenie sumy liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15:
$S_{15} = 105 + 120 + \ldots + 990 = 32850$.

4 pkt Obliczenie sumy liczb podzielnych jednocześnie przez 12 i 15 czyli przez 60:
$S_{60} = 120 + 180 + \ldots + 960 = 8100$.

5 pkt Obliczenie sumy liczb trzycyfrowych o podanych własnościach:
$S - S_{12} - S_{15} + S_{60} = 428400$.

Zadanie 16. (0–6)

1 pkt Zauważenie, że środek okręgu leży na symetralnej cięciwy okręgu i wyznaczenie współczynnika kierunkowego cięciwy AB: $m_{AB} = -\frac{1}{2}$.

2 pkt Wyznaczenie współczynnika kierunkowego symetralnej $m_s = 2$.

3 pkt Podanie równania prostej prostopadłej do cięciwy AB o współczynniku $m = 2$ przechodzącej przez punkt $P = (1, 1)$: $y - 1 = 2(x - 1)$.

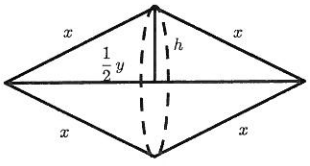
4 pkt Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$, czyli wyznaczenie współrzędnych środka okręgu S: $S = (3, 5)$.

5 pkt Obliczenie długości promienia okręgu: $r = 5$.

6 pkt Zapisanie równania okręgu: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Zadanie 17. (0–7)

1 pkt Określenie bryły powstałej przez obrót trójkąta dookoła prostej i wprowadzenie oznaczeń oraz podanie wzoru na objętość bryły: $V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}\pi h^2 y$.



2 pkt Wyznaczenie zależności $y + 2x = m$ czyli $y = m - 2x$.

3 pkt Wykorzystanie tw. Pitagorasa i obliczenie h^2: $h^2 = x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

4 pkt Zauważenie i zapisanie związku $h^2 = x^2 - \frac{1}{4}(m - 2x)^2 = mx - \frac{1}{4}m^2$.

5 pkt Wyznaczenie funkcji $V(x)$: $V(x) = \frac{1}{3}\pi(mx - \frac{1}{4}m^2)(m - 2x) = \frac{\pi}{3}(-2mx^2 + \frac{3}{2}m^2x - \frac{1}{4}m^3)$, gdzie $x \in (0, \frac{m}{2})$.

6 pkt Wyznaczenie maksimum funkcji $V(x)$: $x_0 = \frac{3}{8}m$.

7 pkt Podanie $V_{max}(\frac{3}{8}m) = \frac{\pi}{96}m^3$.

Zadanie 18. (0–7)

1 pkt Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2 pkt Zapisanie równania stycznej do wykresu funkcji w punkcie $x = t$, $y - f(t) = f'(t)(x - t)$.

3 pkt Podstawienie do równania stycznej punktu $(2, -4)$ i otrzymanie $-4 - f(t) = f'(t)(2 - t)$.

4 pkt Przekształcenie do postaci $2t^3 - 9t^2 + 12t - 5 = 0$.

5 pkt Wyznaczenie pierwiastków wielomianu $t_1 = 1$ (pierwiastek podwójny), $t_2 = \frac{5}{2}$.

6 pkt Dla $t_1 = 1$, mamy punkt styczności $(1, -1)$. Obliczenie współczynnika kierunkowego $m = f'(1) = -3$ i równanie stycznej $3x + y - 2 = 0$.

7 pkt Dla $t_2 = \frac{5}{2}$ wyznaczenie współczynnika kierunkowego $m = f'(\frac{5}{2}) = \frac{15}{4}$ i równania stycznej $15x - 4y - 46 = 0$.