nowa matura na 100%

GREG

repetytorium maturzysty

matematyka

poziom podstawowy
poziom rozszerzony

- cały materiał w jednej książce
- zadania z rozwiązaniami
- objaśnienia krok po kroku

nowa matura

GREG

repetytorium maturzysty

matematyka

poziom podstawowy
poziom rozszerzony

Repetytorium Maturzysty Matematyka

Autorzy:
Robert Całka, Ewa Gałęska
Nadzór merytoryczny:
Ewa Gałęska, Janusz Grabski, Angela Łakomy, Elżbieta Senderska
Korekta:
Agnieszka Woźny, Maria Zagnińska, Arkadiusz Świdurski

ISBN: 978-83-7517-541-7

© Copyright by Wydawnictwo „GREG"
Kraków 2016

31-979 Kraków, ul. Klasztorna 2B
tel. (12) 643-55-14, fax (12) 643-47-33
Księgarnia internetowa: www.greg.pl
tel. (12) 644-98-90, w godz. 8.00–17.00

Wszystkie prawa zastrzeżone.
Żadna część niniejszej publikacji nie może być reprodukowana lub przedrukowana bez pisemnej zgody Wydawnictwa „GREG".
Dotyczy to także przenoszenia danych do systemów komputerowych, wykonywania fotokopii i mikrofilmów.

Skład i łamanie:
Pracownia Register
Projekt i opracowanie graficzne okładki:
Aleksandra Zimoch
shutterstock: Aleksey Troshin

SPIS TREŚCI

WSTĘP ... 7

POZIOM PODSTAWOWY

LICZBY RZECZYWISTE I WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE ... 11
- Obliczenia liczbowe, złożone działania na ułamkach ... 11
- Przybliżenie i błąd przybliżenia ... 14
- Wyrażenia algebraiczne, wzory skróconego mnożenia ... 15
- Działania na potęgach i pierwiastkach ... 18
- Przedziały liczbowe ... 23
- Obliczenia procentowe ... 25
- Pojęcie logarytmu i obliczenia logarytmiczne ... 31

FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI ... 36
- Pojęcie funkcji i jej wykres ... 36
- Odczytywanie własności funkcji ... 39
- Przekształcanie wykresu funkcji ... 41

FUNKCJA LINIOWA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH ... 45
- Funkcja liniowa, jej wykres i własności ... 45
- Nierówności liniowe ... 50
- Układy równań liniowych ... 51
- Zastosowanie równań, nierówności i układów równań ... 55

FUNKCJA KWADRATOWA, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE ... 57
- Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności ... 57
- Równania kwadratowe ... 66
- Nierówności kwadratowe ... 68
- Zadania prowadzące do równań kwadratowych ... 72

RÓWNANIA WIELOMIANOWE I WYMIERNE ... 75

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA, FUNKCJA WYKŁADNICZA ... 78
- Wykres i własności proporcjonalności odwrotnej ... 78
- Zadania praktyczne związane z proporcjonalnością odwrotną ... 81
- Wykres i własności funkcji wykładniczej ... 83
- Zastosowanie funkcji wykładniczej ... 84

TRYGONOMETRIA ... 88
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym ... 88
Wyznaczanie brakujących funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego ... 94
Związki między funkcjami trygonometrycznymi ... 96
Równania trygonometryczne ... 99
Wartości trygonometryczne kątów z przedziału (0°, 180°⟩ ... 100

CIĄGI LICZBOWE ... 102
Pojęcie ciągu, przykłady i obliczanie wyrazów ciągu ... 102
Ciąg arytmetyczny ... 106
Ciąg geometryczny ... 113
Kredyty i lokaty ... 119

PLANIMETRIA ... 122
Kąty w kole ... 122
Styczna do okręgu, okręgi styczne ... 126
Figury podobne ... 128
Związki miarowe w wielokątach ... 131

GEOMETRIA ANALITYCZNA ... 138
Równanie prostej ... 138
Długość i środek odcinka ... 142
Okrąg w układzie współrzędnych ... 144
Wielokąt w układzie współrzędnych ... 149
Przekształcenia w układzie współrzędnych ... 156

STEREOMETRIA ... 158
Graniastosłupy ... 158
Ostrosłupy ... 169
Bryły obrotowe ... 173

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA ... 180
Podstawowe parametry statystyczne i ich interpretacja ... 180
Prawdopodobieństwo zdarzeń – klasyczna definicja prawdopodobieństwa, zasada mnożenia i dodawania ... 186

POZIOM ROZSZERZONY

LICZBY RZECZYWISTE I WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE ... 201
Wyrażenia algebraiczne, wzory skróconego mnożenia ... 201
Wartość bezwzględna, równania i nierówności z bezwzględną wartością ... 204
Obliczenia logarytmiczne ... 211

FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI ... 214
Przekształcanie wykresu funkcji ... 214

FUNKCJA LINIOWA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH ... 217
Zastosowanie równań, nierówności i układów równań ... 217
Równania i nierówności liniowe ... 219

FUNKCJA KWADRATOWA, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE ... 222
Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności ... 222
Równania i nierówności kwadratowe z parametrem ... 226

WIELOMIANY ... 237
Działania na wielomianach, stopień i równość wielomianu ... 237
Rozkład wielomianu na czynniki ... 243

Równania wielomianowe ... 246
Nierówności wielomianowe ... 251

RÓWNANIA WIELOMIANOWE I WYMIERNE ... 254
Dziedzina i wartość wyrażenia wymiernego ... 254
Działania na wyrażeniach wymiernych ... 257
Równania wymierne ... 258
Nierówności wymierne ... 261

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA, FUNKCJA WYKŁADNICZA ... 264
Funkcja logarytmiczna, jej wykres i własności ... 264
Zastosowanie funkcji logarytmicznych ... 266

TRYGONOMETRIA ... 269
Miara łukowa kąta. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta ... 269
Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych ... 275
Wzory trygonometryczne i ich zastosowanie ... 278
Równania trygonometryczne ... 281
Nierówności trygonometryczne ... 285

CIĄGI LICZBOWE ... 290
Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem rekurencyjnym ... 290
Granica ciągu ... 291
Szereg geometryczny ... 294

PLANIMETRIA ... 301
Czworokąty wpisane i opisane na okręgu ... 301
Twierdzenie Talesa, figury podobne ... 304
Jednokładność ... 307
Twierdzenie sinusów i cosinusów ... 311

GEOMETRIA ANALITYCZNA ... 315
Interpretacja geometryczna nierówności i układu nierówności ... 315
Prosta w postaci ogólnej. Odległość punktu od prostej ... 317
Okrąg w układzie współrzędnych ... 320
Wielokąt w układzie współrzędnych ... 327
Jednokładność w układzie współrzędnych ... 332
Wektory ... 333

STEREOMETRIA ... 339
Graniastosłupy ... 339
Ostrosłupy ... 342
Bryły obrotowe ... 345

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA ... 348
Elementy kombinatoryki ... 348
Prawdopodobieństwo ... 351

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY ... 360
Granica funkcji ... 360
Pochodna funkcji ... 363
Monotoniczność i ekstremum funkcji ... 370
Zastosowanie pochodnej do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych ... 376

INDEKS POJĘĆ ... 381

WSTĘP

DROGI MATURZYSTO!

Trzymasz w ręku *Repetytorium maturzysty matematyka*, które jest najnowszym i najbardziej aktualnym kompendium wiedzy dostępnym na rynku. Nasza najnowsza propozycja to solidnie zebrany i uszeregowany materiał, podany w przystępnej formie, który ma na celu pomóc Ci zdać maturę w jej nowej formule obowiązującej od 2015 roku. Przyjazna i przejrzysta forma książki sprawia, że chętnie będziesz po nią sięgał również w trakcie roku szkolnego, podczas powtórek i przygotowań do sprawdzianów.

Zebraliśmy dla Ciebie w jednej książce wszystkie niezbędne wiadomości, podane w prosty i zrozumiały sposób. Naszym głównym celem było stworzenie książki, w której selekcja i układ treści będą ściśle odwzorowywać wymagania zawarte w *Informatorach maturalnych*. Znajdziesz tutaj dokładne objaśnienia, definicje, wykresy i tabele, dzięki którym nie będziesz miał problemów z opanowaniem potrzebnej Ci wiedzy.

Repetytorium zawiera materiał zarówno z zakresu podstawowego, jak i rozszerzonego. Dla ułatwienia zadania i treści z każdego poziomu ujęto w osobną część książki. Z pewnością pomocne będą indeksy najważniejszych terminów oraz nazwisk – zostały one wyróżnione w tekście pogrubionym drukiem i ramkami, abyś jeszcze łatwiej mógł je odnaleźć na stronie.

Nasza książka nie jest skierowana jedynie do maturzystów – to doskonała pozycja do korzystania już od I klasy szkoły średniej, pomocna w przygotowaniach do klasówki, sprawdzianu czy odpowiedzi. Ważną zaletą tej pozycji jest to, że zebraliśmy cały materiał w jednej książce – nie musisz już szukać interesujących Cię materiałów w kilku różnych pozycjach. Wszystko, czego potrzebujesz, znajdziesz w *Repetytorium maturzysty matematyka* Wydawnictwa GREG.

Cieszymy się, że nasza praca pomoże Ci – Drogi Maturzysto – w osiągnięciu sukcesu podczas egzaminu dojrzałości.

Autorzy
i
Wydawnictwo GREG

POZIOM PODSTAWOWY

LICZBY RZECZYWISTE I WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

OBLICZENIA LICZBOWE, ZŁOŻONE DZIAŁANIA NA UŁAMKACH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Przy złożonych działaniach na ułamkach należy pamiętać o kolejności wykonywania działań. Zamieniamy ułamki dziesiętne na zwykłe i je skracamy.
Przy dodawaniu i odejmowaniu liczb mieszanych nie zamieniamy ich na ułamek niewłaściwy, a tylko części ułamkowe sprowadzamy do wspólnego mianownika.

ZADANIE 1

Wykonaj działania, ograniczając używanie kalkulatora:

a) $\dfrac{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}$

b) $\dfrac{1\frac{3}{4}\cdot 3}{2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225+\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):\frac{4}{5}}$

c) $33\frac{1}{2}:\left[\dfrac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{3}{2}-1}-\dfrac{\left(2\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8{,}15-\frac{9}{20}}\right]$

d) $10{,}25:\left[\dfrac{\left(0{,}3-0{,}15\right):\frac{2}{3}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right):80}-\dfrac{\frac{3}{2}:\frac{3}{100}}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}\right]$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\frac{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}=\frac{\left(3\frac{1}{12}+4\frac{375}{1000}\right):\frac{179}{9}}{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{33}{14}}=\frac{\left(3\frac{1}{12}+4\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{9}{179}}{2\frac{5}{8}-\frac{11}{7}}=\frac{\left(3\frac{2}{24}+4\frac{9}{24}\right)\cdot\frac{9}{179}}{2\frac{5}{8}-1\frac{4}{7}}=\frac{7\frac{11}{24}\cdot\frac{9}{179}}{2\frac{35}{56}-1\frac{32}{56}}=$$

$$=\frac{\frac{179}{24}\cdot\frac{9}{179}}{1\frac{3}{56}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{56}{59}=\frac{21}{59}$$

Ad b)

$$\frac{1\frac{3}{4}\cdot 3}{2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225+\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):\frac{4}{5}}=\frac{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{1}}{\frac{19}{9}\cdot\frac{225}{1000}+\left(58\frac{32}{120}-56\frac{35}{120}\right)\cdot\frac{5}{4}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{9}\cdot\frac{9}{40}+\left(57\frac{152}{120}-56\frac{35}{120}\right)\cdot\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+1\frac{117}{120}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+1\frac{39}{40}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+\frac{79}{40}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+\frac{79}{8}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+\frac{79}{32}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{19}{40}+2\frac{15}{32}}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{76}{160}+2\frac{75}{160}}=$$

$$=\frac{\frac{21}{4}}{2\frac{151}{160}}=\frac{21}{4}\cdot\frac{160}{471}=\frac{7}{1}\cdot\frac{40}{157}=\frac{280}{157}$$

Ad c)

$$33\frac{1}{2}:\left[\frac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{3}{2}-1}-\frac{\left(2\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8{,}15-\frac{9}{20}}\right]=\frac{67}{2}:\left[\frac{\left(2\frac{4}{10}+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4\frac{375}{1000}}{1\frac{1}{2}-1}-\frac{\left(2\frac{9}{12}-1\frac{10}{12}\right)\cdot 21}{8{,}15-0{,}45}\right]=$$

$$=\frac{67}{2}:\left[\frac{\left(2\frac{2}{5}+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}-\frac{\left(1\frac{21}{12}-1\frac{10}{12}\right)\cdot 21}{7{,}70}\right]=\frac{67}{2}:\left[\left(2\frac{14}{35}+1\frac{25}{35}\right)\cdot\frac{35}{8}\cdot\frac{2}{1}-\frac{11}{12}\cdot\frac{21}{1}\cdot\frac{10}{77}\right]=$$

$$=\frac{67}{2}:\left[3\frac{39}{35}\cdot\frac{35}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{10}{7}\right]=\frac{67}{2}:\left[\frac{144}{35}\cdot\frac{35}{4}-\frac{5}{2}\right]=\frac{67}{2}:\left[36-2\frac{1}{2}\right]=\frac{67}{2}:33\frac{1}{2}=1$$

Ad d)

$$10{,}25:\left[\frac{(0.3-0{,}15):\frac{2}{3}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right):80}-\frac{\frac{3}{2}:\frac{3}{100}}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}\right]=10\frac{25}{100}:\left[\frac{(0{,}30-0{,}15)\cdot\frac{3}{2}}{(1{,}88+2{,}12)\cdot\frac{1}{80}}-\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{100}{3}}{(3{,}05-2{,}65)\cdot 4+\frac{2}{5}}\right]=$$

$$=10\frac{1}{4}:\left[\frac{\frac{15}{100}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{80}}-\frac{50}{0{,}40\cdot 4+\frac{2}{5}}\right]=\frac{41}{4}:\left[\frac{\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{20}}-\frac{50}{1{,}6+0{,}4}\right]=\frac{41}{4}:\left[\frac{9}{40}\cdot\frac{20}{1}-\frac{50}{2}\right]=\frac{41}{4}:\left[\frac{9}{2}-\frac{50}{2}\right]=-\frac{41}{4}:\frac{41}{2}=$$

$$=-\frac{41}{4}\cdot\frac{2}{41}=-\frac{1}{2}$$

ZADANIE 2

Nie używając kalkulatora, uporządkuj rosnąco liczby: $\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{13}{4};1{,}5;\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

ROZWIĄZANIE

$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$

$0{,}56<\frac{\sqrt{3}}{3}<0{,}60$ (nierówność powstała po podzieleniu przez 3)

$1{,}1<\frac{2\sqrt{3}}{3}<1{,}2$ (nierówność powstała przez pomnożenie powyższej przez 2)

$0{,}7<\sqrt{3}-1<0{,}8$ (odejmujemy 1 od powyższej nierówności)

$0{,}49<\left(\sqrt{3}-1\right)^2<0{,}64$

$\frac{13}{4}=3{,}25$

Odpowiedź: $(\sqrt{3}-1)^2<\frac{2\sqrt{3}}{3}<1{,}5<\frac{13}{4}$.

Najpierw sprawdzamy, między jakimi liczbami mieści się pierwsza liczba z treści zadania.

Teraz oszacujemy wartość drugiej liczby z tematu zadania.

Biorąc pod uwagę oszacowania obu liczb, otrzymujemy odpowiedź.

ZADANIE 3

Zamień dany ułamek okresowy na ułamek zwykły:

a) $1{,}(2)$ **b)** $2{,}3(15)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$1{,}(2) = 1 + 0{,}(2)$ (*)
$0{,}(2) = x \;/\cdot 10$
$2{,}(2) = 10x$
$2 + \underbrace{0{,}(2)}_{x} = 10x$
$2 + x = 10x$ stąd
$x = \frac{2}{9}$, czyli $1{,}(2) = 1+\frac{2}{9} = 1\frac{2}{9}$

Liczby zapisujemy w postaci sumy liczby naturalnej i ułamka okresowego.
Teraz zajmujemy się tylko ułamkiem okresowym.
Mnożymy stronami przez 10 i układamy równanie ze zmienną x.
Następnie otrzymany wynik podstawiamy do równania (*).

Ad b)

$2{,}3(15) = 2{,}3 + 0{,}0(15)$
$0{,}0(15) = x \;/\cdot 10$
$0{,}(15) = 10x \;/\cdot 100$
$15{,}(15) = 1000x$
$15 + \underbrace{0{,}(15)}_{10x} = 1000x$
$15 + 10x = 1000x$
$15 = 990x \;/:15$
$x = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}$

Metoda taka sama jak w podpunkcie a), z tym, że liczbę zapisujemy w postaci liczby nieokresowej i ułamka okresowego. Ułamek określony w dalszej części mnożymy przez 100, gdyż blok okresowy jest dwucyfrowy.

Odpowiedź: $2{,}3(15) = 2{,}3+\frac{1}{66} = 2\frac{3}{10}+\frac{1}{66} = 2\frac{99}{330}+\frac{5}{330} = 2\frac{104}{330} = 2\frac{52}{165}$.

PRZYBLIŻENIE I BŁĄD PRZYBLIŻENIA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Szacując wielkości, często podajemy je w przybliżeniu.
Błąd przybliżenia to różnica między dokładną wartością a przybliżoną.
Jeśli przybliżona wielkość jest większa, to błąd jest z nadmiarem, a gdy jest mniejsza od wartości dokładnej, to błąd jest z niedomiarem.
Jeśli przez x oznaczymy dokładną wartość, a przez p przybliżoną, to **bezwzględny błąd przybliżenia obliczamy:** $|x - p|$. Gdy w naturalny sposób od liczby większej odejmujemy mniejszą, to zawsze otrzymamy bezwzględny błąd przybliżenia. Bezwzględny błąd przybliżenia nie określa skali błędu. Gdy odległość między miastami wynosi 12 km, to w przybliżeniu jest to 10 km, czyli błąd wynosi 2 km. Jeśli ta odległość wynosi 352 km, w przybliżeniu 350 km, to błąd też wynosi 2 km. Pomimo że różnica jest taka sama, błąd, który popełniliśmy w drugim przypadku, jest dużo mniejszy. By poznać wielkość błędu, obliczamy względny błąd przybliżenia, dzieląc bezwzględny błąd przybliżenia przez dokładną wartość. Najczęściej błąd względny wyrażamy w procentach.

$$\text{błąd względny} = \frac{\text{błąd bezwzględny}}{\text{dokładna wartość}} \cdot 100\% = \frac{|x-p|}{x} \cdot 100\%$$

ZADANIE 1

Liczbę 155,4 zaokrąglij do a) całości, b) setek i w każdym przypadku omów błąd przybliżenia.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $155{,}4 \approx 155$ – zaokrąglenie do całości
$155{,}4 - 155 = 0{,}4$ – bezwzględny błąd przybliżenia z niedomiarem
$\frac{0{,}4}{155{,}4} \cdot 100\% = \frac{4}{1554} \cdot 100\% = \frac{2}{777} \cdot 100\% = \frac{200}{777}\% \approx 0{,}3\%$ – procentowy błąd względny

Ad b) $155{,}4 \approx 200$ – zaokrąglenie do setek
$200 - 155{,}4 = 44{,}6$ – bezwzględny błąd przybliżenia z nadmiarem
$\frac{44{,}6}{155{,}4} \cdot 100\% = \frac{22300}{777}\% \approx 29\%$ – błąd procentowy względny

ZADANIE 2

Podłoga ma 3,45 m długości i 4,56 m szerokości. Oblicz powierzchnię podłogi. Następnie zaokrąglij jej wymiary do pierwszego miejsca po przecinku i wylicz pole powierzchni z zaokrąglonych wielkości. Wyznacz błąd bezwzględny i względny przybliżenia pola.

ROZWIĄZANIE

Obliczamy powierzchnię podłogi przed zaokrągleniem jej wymiarów: $3{,}45\text{ m} \times 4{,}56\text{ m} = 15{,}732\text{ m}^2$.
Zaokrąglamy wymiary podłogi: $3{,}45 \approx 3{,}5$; $4{,}56 \approx 4{,}6$.
Obliczamy pole podłogi po zaokrągleniu jej wymiarów: $3{,}5\text{ m} \times 4{,}6\text{ m} = 16{,}1\text{ m}^2$.
Obliczamy błąd bezwzględny: $16{,}1 - 15{,}732 = 0{,}368$.
Obliczamy błąd względny: $\frac{0{,}368}{15{,}732} \cdot 100\% \approx 2{,}34\%$.

Odpowiedź: Błąd bezwzględny wynosi 0,368, a błąd względny 2,34%.

ZADANIE 3

Przybliżenie pewnej liczby z błędem bezwzględnym 0,03 wynosi 1,6. Wyznacz tę liczbę, gdy podane przybliżenie jest z niedomiarem.

ROZWIĄZANIE

1,6 – wartość przybliżona z niedomiarem – mniejsza od wartości dokładnej
0,03 – bezwzględny błąd przybliżenia
x – wartość dokładna – większa od wartości przybliżonej
$x = 1{,}6 + 0{,}03 = 1{,}63$
Odpowiedź: Szukana liczba ma wartość 1,63.

ZADANIE 4

Przybliżenie z nadmiarem pewnej liczby a wynosi 5 i jest podane z błędem bezwzględnym 0,2. Wyznacz liczbę a i podaj błąd względny z dokładnością 0,01%.

ROZWIĄZANIE

a – szukana, dokładna wartość liczby
5 – przybliżenie z nadmiarem
0,2 – błąd bezwzględny
$a = 5 - 0{,}2 = 4{,}8$ – szukana wartość

$$\text{błąd względny} = \frac{\text{błąd bezwzględny}}{\text{dokładna wartość}} \cdot 100\%$$

$$\text{błąd względny} = \frac{0{,}2}{4{,}8} \cdot 100\% = \frac{2}{48} \cdot 100\% = \frac{100}{24}\% = \frac{25}{6}\% = 4\frac{1}{6}\% \approx 4{,}1666\% \approx 4{,}17\%$$

Odpowiedź: Liczba a ma wartość 4,8, a względny błąd przybliżenia wynosi 4,17%.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

ZADANIE 1

Zastosuj wzory skróconego mnożenia:

a) $\left(0{,}9x + 2\frac{2}{3}y\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{2}a - 4b\right)^2$ **c)** $(-2x-5y)^2$ **d)** $(-3x+2)^2$

e) $(4p-5m)(-4p-5m)$ **f)** $4x^2 - 9$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left(0{,}9x + 2\frac{2}{3}y\right)^2 = (0{,}9x)^2 + 2\cdot 0{,}9x \cdot 2\frac{2}{3}y + \left(2\frac{2}{3}y\right)^2 = 0{,}81x^2 + 1{,}8x\cdot\frac{8}{3}y + \left(\frac{8}{3}y\right)^2$$

$$= 0{,}81x^2 + \frac{18}{10}\cdot\frac{8}{3}xy + \frac{64}{9}y^2 = 0{,}81x^2 + \frac{24}{5}xy + \frac{64}{9}y^2$$

Ad b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\left(\frac{1}{2}a - 4b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}a\cdot 4b + (4b)^2 = \frac{1}{4}a^2 - 4ab + 16b^2$$

Ad c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(-2x-5y)^2 = \left[-(2x+5y)\right]^2 = (2x+5y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5y + (5y)^2 =$$

$$= 4x^2 + 20xy + 25y^2$$

Ad d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(-3x+2)^2 = (2-3x)^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3x + (3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

Ad e) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$(4p-5m)(-5m-4p) = (-5m+4p)(-5m-4p) = (-5m)^2 - (4p)^2 = 25m^2 - 16p^2$$

Ad f) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$$

ZADANIE 2

Uprość podane wyrażenie, stosując wzory skróconego mnożenia:

$$\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{25}n^2\right) - \left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{5}n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}n\right) + \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}n\right)^2 =$$

ROZWIĄZANIE

$$\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{25}n^2 - \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{25}n^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{5}m\cdot n + \frac{1}{25}n^2 =$$

$$= \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{5}mn + \frac{1}{25}n^2 = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}n\right)^2$$

Stosujemy wzór na kwadrat sumy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oraz $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

ZADANIE 3

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość:

$(-1-p)^2 - (1-p)^2$ dla $p = \sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

$$(-1-p)^2 - (1-p)^2 = (1^2 + 2\cdot 1\cdot p + p^2) - (1^2 - 2\cdot 1\cdot p + p^2) =$$

$$= (1 + 2p + p^2) - (1 - 2p + p^2) = 1 + 2p + p^2 - 1 + 2p - p^2 = 4p$$

$p = \sqrt{2}$: $\quad 4p = 4\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi $4\sqrt{2}$.

ZADANIE 4

Rozłóż na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $64x^2y^4 - 9$ **b)** $100 - 25\cdot(a+b)^2$ **c)** $(2x-y)^2 - (x+2y)^2$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$64x^2y^4 - 9 = (8xy^2 - 3)\cdot(8xy^2 + 3)$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$.

Ad b)

$$100 - 25(a+b)^2 = [10 - 5(a+b)][10 + 5(a+b)] =$$

$$= (10 - 5a - 5b)(10 + 5a + 5b)$$

Ad c)

$$(2x-y)^2 - (x+2y)^2 = [(2x-y) - (x+2y)]\cdot[(2x-y) + (x+2y)] =$$

$$= (2x - y - x - 2y)\cdot(2x - y + x + 2y) =$$

$$= (x - 3y)(3x + y)$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$.

ZADANIE 5

Zapisz w najprostszej postaci dokładną wartość wyrażenia $\sqrt{17} - 41 + \frac{1}{\sqrt{7}-3}$, a następnie podaj jego przybliżenie z dokładnością do 0,01.

ROZWIĄZANIE

$$\sqrt{17} - 41 + \frac{1}{\sqrt{7}-3} = \sqrt{17} - 41 + \frac{1\cdot(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)} =$$

$$= \sqrt{17} - 41 + \frac{\sqrt{7}+3}{7-9} = \sqrt{17} - 41 - \frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{3}{2} = \sqrt{17} - 0{,}5\sqrt{7} - 42{,}5$$

$$\sqrt{17} - 0{,}5\sqrt{7} - 42{,}5 = 4{,}123 - 0{,}5\cdot 2{,}646 - 42{,}5 =$$

$$= 4{,}123 - 1{,}323 - 42{,}5 = -39{,}70$$

Odpowiedź: Przybliżenie danej wartości z dokładnością do 0,01 wynosi −39,70.

Aby uprościć zapis wartości dokładnej wyrażenia, uwalniamy mianownik ostatniego składnika wyrażenia od niewymierności:

Zapisaliśmy wartość dokładną wyrażenia bez użycia dzielenia. Aby podać przybliżoną wartość z dokładnością 0,01 (tj. do drugiego miejsca po przecinku), zapisujemy przybliżenia pierwiastków z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku (aby dokładność nie pogorszyła się w wyniku wykonanych działań).

DZIAŁANIA NA POTĘGACH I PIERWIASTKACH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności **dla dowolnej liczby a zachodzi równość** $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Powyższe informacje znajdują się we wzorach maturalnych.

Własności potęg stosowane są bardzo często w działaniach na pierwiastkach:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

ZADANIE 1

Wykonaj działania i przedstaw wynik w najprostszej postaci:

a) $\frac{2^{-3} \cdot 2}{2^5}$ b) $(\sqrt[3]{2^3})^4$ c) $\frac{\sqrt[4]{16^{-2}}}{3^{-0,5} \cdot 3^0}$ d) $\frac{(0{,}125^{-1})^{-4}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}}$

ROZWIĄZANIE

Zawsze należy starać się przedstawić wszystkie potęgi w postaci potęgi o tej samej, jak najmniejszej podstawie (zwykle jest to liczba pierwsza, np. 2, 3, 5 itd.). Następnie stosujemy wzory dotyczące działań na potęgach.

Ad a)

$$\frac{2^{-3} \cdot 2}{2^5} = \frac{2^{-2}}{2^5} = 2^{-2-5} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

Ad b)

$$(\sqrt[3]{2^3})^4 = \left((2^3)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4} = 2^4 = 16$$

Ad c)

$$\frac{\sqrt[4]{16^{-2}}}{3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^0} = \frac{\sqrt[4]{(2^4)^{-2}}}{3^{-\frac{1}{2}} \cdot 1} = \frac{\sqrt[4]{2^{-8}}}{3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{-8}{4}}}{3^{-\frac{1}{2}}} = 2^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ad d)

$$\frac{(0{,}125^{-1})^{-4}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(0{,}125)^4}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{-12}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{-12-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{38}{3}}$$

ZADANIE 2

Stosując odpowiednie wzory dotyczące działań na potęgach, przedstaw dane wyrażenie w postaci:

a) potęgi dwójki i piątki $\frac{(0{,}4)^{-2} \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (0{,}125)^{-1}}{\left(\frac{16}{5}\right)^{-2} \cdot 20}$

b) potęgi trójki i siódemki $\frac{(21)^{-\frac{2}{3}} \cdot (49)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}{\left(\frac{49}{9}\right)^0 \cdot (\sqrt[3]{7^2})^3}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\frac{(0{,}4)^{-2} \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (0{,}125)^{-1}}{\left(\frac{16}{5}\right)^{-2} \cdot 20} = \frac{\left(\frac{4}{10}\right)^{-2} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{2^4}{5}\right)^{-2} \cdot 4 \cdot 5} = \frac{\frac{2^{-2}}{5^{-2}} \cdot 2^2 \cdot 2^3}{2^{-8} \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2^{-2} \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3}{2^{-8} \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^1}{2^{-8} \cdot 5} = \frac{2^9}{5} = 2^9 \cdot 5^{-1}$$

Odpowiedź: $2^9 \cdot 5^{-1}$

Ad b)

$$\frac{(21)^{-\frac{2}{3}} \cdot (49)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}{\left(\frac{49}{9}\right)^0 \cdot (\sqrt[3]{7^2})^3} = \frac{(3 \cdot 7)^{-\frac{2}{3}} \cdot (7^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-2} \cdot 7^2}{1 \cdot \left(7^{\frac{2}{3}}\right)^3} = \frac{3^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2} \cdot 7^2}{7^{\frac{2}{3} \cdot 3}} = \frac{3^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^0 \cdot 3^{-2} \cdot 7^2}{7^2} = 3^{-\frac{2}{3}-2} = 3^{-\frac{8}{3}} \cdot 7^0 = 3^{-\frac{8}{3}} \cdot 1$$

Odpowiedź: $3^{-\frac{8}{3}}$

ZADANIE 3

Dane są liczby: $x=\dfrac{4^8+2^{20}}{16^5}$, $y=\dfrac{5^{11}+2\cdot5^{12}+3\cdot5^{13}}{25^6}$.

a) Znajdź różnicę $y-x$.

b) Otrzymany wynik zaokrąglij do części setnych i oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$x=\frac{2^{16}+2^{20}}{2^{20}}=\frac{2^{16}\cdot(1+2^4)}{2^{20}}=\frac{1+2^4}{2^4}=\frac{17}{16}=1{,}0625$$

$$y=\frac{5^{11}\cdot(1+2\cdot5+3\cdot25)}{5^{12}}=\frac{1+10+75}{5}=\frac{86}{5}=17{,}2$$

Teraz obliczamy różnicę: $y-x=17{,}2-1{,}0625=16{,}1375$.

Ad b)

$16{,}1375\approx16{,}14$. — Różnicę zaokrąglamy do drugiego miejsca po przecinku.

$16{,}14-16{,}1375=0{,}0025$. — Obliczamy błąd bezwzględny.

$\dfrac{0{,}0025}{16{,}1375}\cdot100\%=0{,}015\%$ — Obliczamy błąd względny.

Odpowiedź: Błąd względny wynosi 0,015%.

ZADANIE 4

Przedstaw w postaci notacji wykładniczej odległość Słońca od Jowisza, która wynosi 778 milionów kilometrów.

ROZWIĄZANIE

$778\,000\,000\text{ km}=7{,}78\cdot10^8\text{ km}$ — Daną liczbę należy przedstawić w postaci iloczynu liczby z przedziału $\langle0,10)$ i odpowiedniej potęgi 10.

ZADANIE 5

W równaniu $E=m\cdot c^2$ litera E oznacza energię mierzoną w dżulach, m masę w kilogramach, a c prędkość światła w metrach na sekundę, wynoszącą około $3\cdot10^8$ m/s. Ile energii powstało, jeśli podczas reakcji jądrowej masa 4,52 g uległa zamianie na energię?

ROZWIĄZANIE

Aby zastosować podany wzór, musimy najpierw „uzgodnić" jednostki miary. Do wzoru należy podstawić masę wyrażoną w kilogramach, tymczasem dana masa jest wyrażona w gramach: 4,52 g = 0,00452 kg. Teraz możemy podstawić daną masę do wzoru:

$E=0{,}00452\cdot(3\cdot10^8)^2\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2=0{,}00452\cdot9\cdot10^{16}$ dżuli
$=452\cdot9\cdot10^{11}$ dżuli $=4068\cdot10^{11}$ dżuli $=4{,}068\cdot10^{14}$ dżuli

Wykorzystaliśmy przy tym fakt, że 1 dżul = 1 kg · m² · s⁻².

Odpowiedź: Powstała energia $4{,}068\cdot10^{14}$ dżuli.

ZADANIE 6

Oblicz bez użycia kalkulatora, stosując własności działań na potęgach:

$$\left(0{,}125^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{100}{25}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}+\left(81^{0{,}5}:\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)^{-\frac{1}{6}}+\left[\left(3-7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(3+7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=$$

ROZWIĄZANIE

Aby rozwiązać takie zadanie, należy znaleźć możliwie najmniejszą wspólną podstawę potęg i zastosować wzory dotyczące działań na potęgach.

$$\left[\left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot4^2\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}:9^{-2}\right]^{-\frac{1}{6}}+\left[\left(3-7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+2\left(3-7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3+7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left[\left(3+7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2^2\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}+\left[9^1:9^{-2}\right]^{-\frac{1}{6}}+3-7^{\frac{1}{2}}+2\left[\left(3-7^{\frac{1}{2}}\right)\left(3+7^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+3+7^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\left(2^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot2^4\right]^{\frac{1}{3}}+\left(9^3\right)^{-\frac{1}{6}}+6+2\left[3^2-\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[2^2\cdot2^4\right]^{\frac{1}{3}}+9^{-\frac{1}{2}}+6+2\left(9-7\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(2^6\right)^{\frac{1}{3}}+\left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}}+6+2\cdot2^{\frac{1}{2}}=2^2+3^{-1}+6+2\sqrt{2}=4+\frac{1}{3}+6+2\sqrt{2}=10\frac{1}{3}+2\sqrt{2}$$

ZADANIE 7

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci:

a) $2\sqrt{48}-3\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{108}$ **b)** $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{250}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $2\sqrt{48}-3\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{108}=2\sqrt{16\cdot3}-3\sqrt{9\cdot3}-\sqrt{25\cdot3}+\sqrt{9\cdot12}=$

$=2\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}-3\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot4\sqrt{3}-3\cdot3\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\cdot2\sqrt{3}=$

$=8\sqrt{3}-9\sqrt{3}-5\sqrt{3}+6\sqrt{3}=14\sqrt{3}-14\sqrt{3}=0$

Ad b) $\sqrt[3]{27\cdot2}-\sqrt[3]{64\cdot2}+\sqrt[3]{8\cdot2}-\sqrt[3]{125\cdot2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{2}=$

$=3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{2}-5\cdot\sqrt[3]{2}=-4\sqrt[3]{2}$

ZADANIE 8

Wykonaj działanie i określ, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną $\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{8}-\sqrt{32})}{8-4\sqrt{2}}$

ROZWIĄZANIE

$$\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{8}-\sqrt{32})}{8-4\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2})}{-4\sqrt{2}+8}=\frac{(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-4\sqrt{2})}{-4(\sqrt{2}-2)}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{-4(\sqrt{2}-2)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-2)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}=\frac{-(\sqrt{2}-2)}{2(\sqrt{2}-2)}=-\frac{1}{2}$$ – jest to liczba wymierna

ZADANIE 9

Usuń niewymierność z mianownika następujących ułamków:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{-3+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+3}$ **c)** $\frac{-2}{2-3\sqrt{2}}$

ROZWIĄZANIE

Przy usuwaniu niewymierności korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Jeśli w mianowniku występuje iloczyn liczby i pierwiastka z danej liczby, to licznik i mianownik ułamka wystarczy pomnożyć tylko przez ten pierwiastek.

Ad a)

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+3}{6}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

Ad b)

$$\frac{-3+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+3}=\frac{(-3+2\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\cdot(2\sqrt{5}-3)}=\frac{-6\sqrt{5}+9+(2\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}}{(2\sqrt{5})^2-9}=\frac{29-12\sqrt{5}}{11}$$

Ad c)

$$\frac{-2}{2-3\sqrt{2}}=\frac{-2(2+3\sqrt{2})}{(2-3\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})}=\frac{-2(2+3\sqrt{2})}{4-9\cdot 2}=\frac{-2(2+3\sqrt{2})}{-14}=\frac{2+3\sqrt{2}}{7}$$

ZADANIE 10

Która z liczb jest większa: a czy b, gdy $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$?

ROZWIĄZANIE

$$b=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

Usuwamy niewymierność z mianownika drugiego ułamka.

Odpowiedź: Liczba b jest dwa razy większa.

PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Nierówności typu $x<a$, $x\geq b$ oraz $c>x>d$, $e\geq x>f$, $g\geq x\geq h$ możemy przedstawić na osi liczbowej oraz zapisać za pomocą przedziału liczbowego.

Do zapisu przedziału używamy nawiasów okrągłych (a, b) – przedział obustronnie otwarty lub ostrych $\langle c, d)$ – przedział lewostronnie domknięty (zamknięty), $\langle e, f\rangle$ – przedział obustronnie domknięty.

Używamy również symboli: $\in$ – **należy**, ∞ – **nieskończoność**, a także przy działaniach na przedziałach znaków **„$\cup$” – suma przedziałów**, **„$\cap$” część wspólna** oraz **„$\setminus$” różnica przedziałów.**

Przedziały często oznaczamy dużymi literami. Jeśli mamy dane przedziały A i B, to do sumy przedziałów $A\cup B$ należą liczby będące w jednym lub drugim przedziale.

Część wspólną, iloczyn przedziałów $A\cap B$, tworzą liczby zawarte w obu przedziałach.

Do różnicy przedziałów $A\setminus B$ należą te liczby, które należą do przedziału A i równocześnie nie należą do przedziału B.

ZADANIE 1

Przedstaw podane nierówności na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału liczbowego. Określ, czy przedział jest domknięty, czy otwarty.

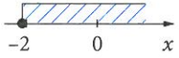
a) $x<3$ **b)** $x\geq -2$ **c)** $y\leq 1$ **d)** $y>-1$
e) $-3<z<5$ **f)** $0\leq z<3$ **g)** $-2<n\leq 4$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $x<3$

$x\in(-\infty, 3)$ – przedział obustronnie otwarty

Ad b) $x\geq -2$

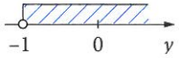


$x\in\langle -2, \infty)$ – przedział lewostronnie domknięty

Ad c) $y\leq 1$

$y\in(-\infty, 1\rangle$ – przedział prawostronnie domknięty

Ad d) $y>-1$



$y\in(-1, \infty)$ – przedział obustronnie otwarty

Ad e) $-3<z<5$

$z\in(-3, 5)$ – przedział obustronnie otwarty

Ad f) $0\leq z\leq 3$

$z\in\langle 0, 3\rangle$ – przedział obustronnie domknięty

Ad g) $-2<n\leq 4$

$n\in(-2, 4\rangle$ – przedział prawostronnie domknięty

ZADANIE 2

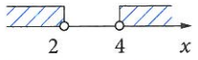
Zaznacz na osi liczbowej i zapisz za pomocą sumy przedziałów liczby:

a) mniejsze od −1 lub nie mniejsze od 3, **b)** mniejsze od 2 lub większe od 4,
c) nie większe od −2 lub nie mniejsze od 5, **d)** nie większe od 1 lub większe od 2.

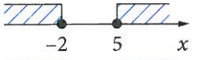
ROZWIĄZANIE

Ad a)

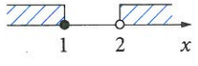
$x \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, \infty)$

Ad b) 

$x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

Ad c) 

$x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, \infty)$

Ad d) 

$x \in (-\infty, 1\rangle \cup (2, \infty)$

ZADANIE 3

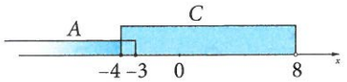
Dane są przedziały: $A = (-\infty, -3\rangle$, $B = (-10, 7)$ i $C = \langle -4, 8)$. Zaznacz je na osi liczbowej i znajdź:

a) $A \cup C$ **b)** $B \cap C$ **c)** $A \setminus B$ **d)** $B \setminus C$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

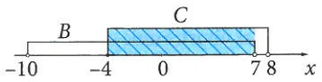
Zaznaczamy na osi liczbowej przedziały A i C. Przy wyznaczaniu sumy przedziałów należy wziąć pod uwagę najdalej wysunięte końce tych przedziałów, w tym przypadku z lewej strony minus nieskończoność, a z prawej 8.



Odpowiedź: $A \cup C = (-\infty, 8)$.

Ad b)

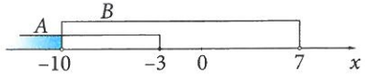
Zaznaczamy na osi liczbowej przedziały B i C. Przy wyznaczaniu części wspólnej należy wziąć pod uwagę miejsce, w którym przedziały nakładają się na siebie.



Odpowiedź: $B \cap C = \langle -4, 7)$.

Ad c)

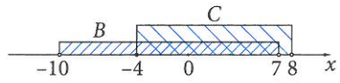
Zaznaczamy na osi liczbowej przedziały A i B. Przy wyznaczaniu różnicy przedziałów należy wziąć pod uwagę te elementy, które znajdują się w pierwszym zaznaczonym przedziale, ale nie ma ich w drugim.



Odpowiedź: $A \setminus B = (-\infty, -10\rangle$.

Ad d)

Zaznaczamy na osi liczbowej przedziały A i B. Przy wyznaczaniu różnicy przedziałów należy wziąć pod uwagę te elementy, które znajdują się w pierwszym zaznaczonym przedziale, ale nie ma ich w drugim.

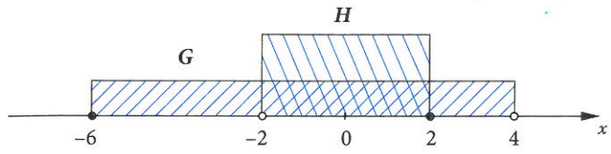


Odpowiedź: $B \setminus C = (-10, -4)$

ZADANIE 4

Dane są przedziały $G = \langle -6, 4)$ i $H = (-2, 2\rangle$. Znajdź sumę, część wspólną oraz obie różnice tych przedziałów.

ROZWIĄZANIE



$G \cup H = G = \langle -6, 4)$
$G \cap H = H = (-2, 2\rangle$
$G \setminus H = \langle -6, -2\rangle \cup (2, 4)$ $H \setminus G = \{\emptyset\}$

Przy wyznaczaniu różnicy przedziałów szczególną uwagę zwracamy na krańce przedziału H. Liczba −2 należy do przedziału G i nie należy do H, więc zgodnie z definicją różnicy przedziałów do różnicy należy. Liczba 2 należy do G, ale należy również do przedziału H, więc nie może należeć do różnicy.

OBLICZENIA PROCENTOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Procent $p\%$ liczby a – to $p\%\ a = \frac{p}{100} \cdot a$

Punkt procentowy – jest różnicą między dwiema wartościami tej samej wielkości, podanymi w procentach.

ZADANIE 1

Oblicz:

a) 18% liczby 120, **b)** liczbę, której 8% wynosi 16, **c)** jakim procentem liczby 144 jest liczba 4.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $18\% \cdot 120 = \frac{18}{100} \cdot \frac{120}{1} = \frac{18}{10} \cdot \frac{12}{1} = \frac{18}{5} \cdot \frac{6}{1} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5} = 21{,}6$

Odpowiedź: 18% liczby 120 wynosi 21,6.

Ad b) $8\% \cdot x = 16$ $\qquad \frac{8}{100} \cdot x = 16$

$\frac{2}{25}x = 16 \quad / : \frac{2}{25}$ $\qquad x = \frac{16}{1} \cdot \frac{25}{2} = 8 \cdot 25 = 200$

Odpowiedź: 8% liczby 200 wynosi 16.

Ad c) $p \cdot 144 = 4 \quad / : 144$ $\qquad p = \frac{4}{144}$

$p = \frac{1}{36} \cdot 100\% = \frac{25}{9}\% \approx 2{,}8\%$

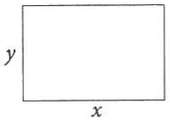
Odpowiedź: Liczba 4 to 2,8% liczby 144.

ZADANIE 2

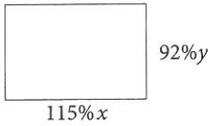
Obwód prostokąta wynosi 368 cm. Jeżeli dłuższy bok zwiększymy o 15%, a krótszy zmniejszymy o 8%, to obwód prostokąta wzrośnie o 12%. Znajdź boki tego prostokąta.

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy rysunek i układamy układ równań, z których pierwsze opisuje obwód prostokąta przed zmianą długości boków, a drugie obwód tego samego prostokąta, ale po zmianie długości boków.



$2x + 2y = 368 \; / : 2$



$2 \cdot 1{,}15x + 2 \cdot 0{,}92y = 1{,}12 \cdot 368 \quad / \cdot 100$

$$\begin{cases} x + y = 184 \\ 2 \cdot 115x + 2 \cdot 92y = 112 \cdot 368 \; / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 184 \; / \cdot (-92) \\ 115x + 92y = 112 \cdot 184 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -92x - 92y = -92 \cdot 184 \\ 115x + 92y = 112 \cdot 184 \end{cases}$$

$$23x = 20 \cdot 184 \; / : 23$$

$$x = 20 \cdot 8$$

$$x = 160$$

$$y = 184 - 160 = 24$$

Odpowiedź: Długości boków prostokąta wynoszą 160 cm i 24 cm.

ZADANIE 3

Basia i Zosia zbierają naklejki. Basia ma 75 naklejek, a Zosia 225. O ile procent więcej naklejek ma Zosia, a o ile procent mniej naklejek ma Basia?

ROZWIĄZANIE

$225 - 75 = 150$

$\frac{150}{75} \cdot 100\% = 200\%$

Obliczamy, o ile procent więcej naklejek ma Zosia.

$225 - 75 = 150$

$\frac{150}{225} \cdot 100\% = 66{,}(6)\%$

Obliczamy, o ile procent mniej naklejek ma Basia.

Odpowiedź: Zosia ma o 200% naklejek więcej niż Basia. Basia ma o 66,(6)% naklejek mniej niż Zosia.

ZADANIE 4

Zamontowanie ogrodzenia kosztuje 21 400 zł wraz z siedmioprocentowym podatkiem VAT. Jaki jest koszt zamontowania tego ogrodzenia bez podatku?

ROZWIĄZANIE

$x + 7\% \cdot x = 21\,400$

$1{,}07 \cdot x = 21\,400 \quad / : 1{,}07$

$x = 20\,000$

Podatek doliczany jest do ceny netto, zatem oznaczając tę cenę przez x, otrzymujemy równanie:

Odpowiedź: Koszt zamontowania ogrodzenia bez podatku wynosi 20 000 zł.

ZADANIE 5

Zmieszano 4 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 6 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?

ROZWIĄZANIE

$0{,}25 \cdot 4 = 1$ kg

Obliczamy zawartość miedzi w pierwszym stopie.

$0{,}40 \cdot 6 = 2{,}4$ kg

Obliczamy zawartość miedzi w drugim stopie.

$4 + 6 = 10$ kg

Po zmieszaniu masy otrzymanego stopu otrzymujemy:

$1 + 2{,}4 = 3{,}4$ kg

Ilość miedzi w otrzymanym po zmieszaniu stopie to:

$\frac{3{,}4}{10} \cdot 100\% = 34\%$

Obliczamy zawartość procentową miedzi.

Odpowiedź: Otrzymany stop zawiera 34% miedzi.

ZADANIE 6

Cenę prenumeraty czasopisma obniżono najpierw o 20%, a następnie o 25%. O ile procent spadła cena po obu obniżkach?

ROZWIĄZANIE

$C_1 = C_0 \cdot 80\% = 0{,}8 \cdot C_0$

Pamiętajmy, że obliczając procent, odnosimy go zawsze do obowiązującej w danej chwili całości. Cenę czasopisma po pierwszej obniżce (C_1) obliczamy w stosunku do ceny pierwotnej C_0.

$C_2 = C_1 \cdot 75\% = 0{,}75 \cdot C_1$

Cenę czasopisma po drugiej obniżce (C_2) obliczamy w stosunku do ceny po pierwszej obniżce (C_1).

$C_2 = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot C_0$

Aby obliczyć, o ile procent spadła cena w wyniku obydwóch obniżek, musimy obliczyć, jaki procent ceny pierwotnej C_0 stanowi cena C_2 po drugiej obniżce. W tym celu do drugiego z zapisanych wzorów wstawiamy C_1 wyrażone pierwszym wzorem.

$C_2 = 0{,}6 \cdot C_0 = C_0 \cdot 60\%$

$100\% - 60\% = 40\%$

Skoro cena po dwóch obniżkach stanowi 60% ceny pierwotnej, to znaczy, że spadła ostatecznie o 40%.

Odpowiedź: Cena po obu obniżkach spadła o 40%.

ZADANIE 7

W pewnej klasie 37,5% całości stanowią dziewczynki. Po miesiącu nauki z tej klasy odeszło dwóch chłopców i wtedy liczba dziewczynek stanowiła 40% liczby wszystkich uczniów. Ilu uczniów liczyła na początku ta klasa?

ROZWIĄZANIE

$x \cdot 37{,}5\% = y$

Oznaczamy początkową liczbę uczniów tej klasy x oraz liczbę dziewczynek y. Układamy równanie wyrażające, jaki procent pierwotnej liczby uczniów stanowią dziewczynki.

$y = 0{,}375x$

$(x-2) \cdot 40\% = y$

Układamy równanie wyrażające, jaki procent liczby uczniów po odejściu dwóch chłopców stanowią dziewczynki.

$y = 0{,}4(x-2)$

$0{,}375x = 0{,}4(x-2)$

Przyrównujemy wartości y wyrażone obydwoma równaniami i rozwiązujemy otrzymane równanie z niewiadomą x.

$0{,}375x = 0{,}4x - 0{,}8$

$0{,}8 = 0{,}025x$

$x = \frac{0{,}8}{0{,}025} = \frac{800}{25} = 32$

Odpowiedź: na początku ta klasa liczyła 32 uczniów.

Uwaga. Niewiadoma y była niewiadomą pomocniczą, potrzebną do zapisania danych zadania w postaci układu równań. Nie obliczamy jej wartości, bo nie jest nam potrzebna.

ZADANIE 8

Sprzedaż pewnego produktu objęta jest podatkiem akcyzowym w wysokości 7%, który producent dolicza do ceny netto i odprowadza do urzędu podatkowego. Jaką kwotę podatku musi odprowadzić producent, jeśli sprzedał 1500 kg produktu po 0,80 zł netto za kilogram?

ROZWIĄZANIE

$1500 \cdot 0{,}80 = 1200$ zł

Obliczamy wartość netto sprzedanych produktów hurtowni.

$1200 \cdot 7\% = 1200 \cdot 0{,}07 = 84$ zł

Obliczamy wartość podatku akcyzowego należnego od tej sprzedaży.

Odpowiedź: Producent musi odprowadzić 84 zł.

ZADANIE 9

Poniższa tabela podaje wpływy z reklam w krakowskich gazetach w okresie od stycznia do sierpnia.

Tytuł	*Gazeta A*	*Gazeta B*	*Gazeta C*	*Gazeta D*
Kwota (w złotych)	17 625 997	14 596 744	893 534	30 756 321

a) Która gazeta miała największe wpływy i jaki to procent łącznych wpływów?
b) O ile procent większe wpływy miała *Gazeta A* od *Gazety B*?
c) Jakim procent łącznych wpływów stanowiły wpływy *Gazety C*?
Wyniki podaj z dokładnością do 10^{-2}.

ROZWIĄZANIE

$17\,625\,997 + 14\,596\,744 + 893\,534 + 30\,756\,321 = 63\,872\,596$

Na początek obliczamy łączne wpływy wszystkich gazet w omawianym okresie.

Ad a)

$\frac{30756321}{63872596} \cdot 100\% \approx 48{,}15\%$

Przez bezpośrednie porównanie danych stwierdzamy, że największe wpływy miała *Gazeta D*. Obliczamy, jaki procent łącznych wpływów stanowiły wpływy *Gazety D*.

Odpowiedź: Największe wpływy miała *Gazeta D*. Stanowiły one 48,15% łącznych wpływów.

Ad b)

$17\,625\,997 - 14\,596\,744 = 3\,029\,253$

Obliczamy różnicę wpływów *Gazety A* i *Gazety B*.

$\frac{3029253}{14596744} \cdot 100\% \approx 20{,}75\%$

Obliczamy, jaki procent wpływów *Gazety B* stanowi ta różnica.

Odpowiedź: Wpływy *Gazety A* były o 20,75% wyższe od wpływów *Gazety B*.

Ad c)

$\frac{893534}{63872596} \cdot 100\% \approx 1{,}40\%$

Obliczamy, jaki procent łącznych wpływów stanowią wpływy *Gazety C*.

Odpowiedź: Wpływy *Gazety C* stanowią 1,40% łącznych wpływów.

ZADANIE 10

Pan Jacek podpisał umowę zlecenie z pewną firmą na kwotę 25 000 zł. Od tej kwoty Pan Jacek musi zapłacić podatek w wysokości 20%. Opodatkowaniu podlega kwota umowy pomniejszona o koszty uzyskania przychodu w wysokości 20%. Jaką kwotą będzie dysponował Pan Jacek po zapłaceniu podatku?

ROZWIĄZANIE

$25\,000 - (20\% \cdot 25\,000) = 25\,000 - 5\,000 = 20\,000$ — Obliczenie kwoty podlegającej opodatkowaniu (kwota umowy – koszty uzyskania przychodu).

$20\% \cdot 20\,000 = 4\,000$ — Obliczenie podatku (20% razy kwota podlegająca opodatkowaniu).

$25\,000 \text{ zł} - 4\,000 \text{ zł} = 21\,000 \text{ zł}$ — Obliczenie ostatecznej kwoty, jaką pan Jacek otrzyma na rękę (kwota umowy – podatek).

Odpowiedź: Pan Jacek otrzymuje wypłatę w wysokości 21 000 zł.

ZADANIE 11

Cena pięciogodzinnego karnetu do pewnego parku wodnego wynosiła 45 zł. Cenę obniżono i okazało się, że dziennie z atrakcji parku skorzystało o 30% więcej osób, a dochód uzyskany ze sprzedaży karnetów wzrósł o 15%. O ile złotych obniżono cenę karnetu?

ROZWIĄZANIE

x – liczba osób wykupujących dziennie karnety przy pierwotnej cenie karnetu
y – wielkość obniżki (w złotych) — Wprowadzamy niewiadome.

$45x$ – dochód dzienny przy pierwotnej cenie karnetu — Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$1{,}3x$ – liczba osób wykupujących dziennie karnety przy obniżonej cenie

$1{,}15 \cdot 45 \cdot x$ – dochód dzienny przy obniżonej cenie

$1{,}3 \cdot x \cdot (45 - y) = 1{,}15 \cdot 45 \cdot x \quad / : x$ — Układamy równanie.

$1{,}3 \cdot (45 - y) = 1{,}15 \cdot 45$

$$y = 45 - 45 \cdot \frac{1{,}15}{1{,}3} = 45 \cdot \left(1 - \frac{1{,}15}{1{,}3}\right) = 45 \cdot \frac{0{,}15}{1{,}3} \approx 5{,}19$$

Odpowiedź: Cenę karnetu obniżono o 5 zł 20 gr.

ZADANIE 12

W sondażu jednej z gazet samorząd lokalny uzyskał poparcie 46% mieszkańców. Kilka udanych inwestycji spowodowało, że po pół roku wzrosło ono do 58%. O ile procent wzrosła liczba mieszkańców, którzy popierają swój samorząd lokalny?

ROZWIĄZANIE

Liczba mieszkańców, którzy popierają samorząd lokalny, wzrosła o 12 punktów procentowych ($58 - 46 = 12$).
M – liczba ankietowanych mieszkańców
$46\% \cdot M = 0{,}46M$ – ilość mieszkańców początkowo dobrze oceniających samorząd lokalny
$58\%M = 0{,}58M$ – ilość popierających po pół roku
Procentowy wzrost ilości osób, która zadeklarowała poparcie dla samorządu lokalnego:

$$\frac{0{,}58M - 0{,}46M}{0{,}46M} \cdot 100\% = \frac{0{,}12M}{0{,}46M} \cdot 100\% = \frac{12}{46} \cdot 100\% = \frac{600}{23}\% \approx 26\%$$

Odpowiedź: Liczba mieszkańców, którzy popierają samorząd lokalny, wzrosła o 26%.

ZADANIE 13

W pewnym miasteczku liczącym 4800 mieszkańców w wieku produkcyjnym jest 36% ludności, z czego aż 25% jest na bezrobociu. Dyrekcja nowo otwartego zakładu produkcyjnego zatrudniła 240 osób. O ile punktów procentowych zmalało bezrobocie i ile osób na nim pozostaje?

ROZWIĄZANIE

$$36\% \cdot 4800 = \frac{36}{100} \cdot \frac{4800}{1} = 36 \cdot 48 = 1728$$ – liczba osób w wieku produkcyjnym

$$25\% \cdot 1728 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1728}{1} = 432$$ – liczba osób pozostająca na bezrobociu

$1728 - 432 = 1296$ – liczba osób pracujących

$1296 + 240 = 1536$ – liczba osób mających pracę po otwarciu nowego zakładu

$1728 - 1536 = 192$ – liczba osób nadal pozostająca na bezrobociu

$p \cdot 1728 = 192$

$$p = \frac{192}{1728} \cdot 100\% \approx 11\%$$ – procent osób pozostających na bezrobociu

$25 - 11 = 14$

Odpowiedź: O 14 punktów procentowych zmalało bezrobocie, ale 192 osoby są nadal bez pracy.

POJĘCIE LOGARYTMU I OBLICZENIA LOGARYTMICZNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$.
Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c.
$\log_a c = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^b = c$.

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$ $\qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

W szczególności $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$,

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

ZADANIE 1

Oblicz: $\log 0{,}1$; $\log_4 0{,}5$; $\log_5 0{,}04$; $\log_{0{,}5} 2$; $\log_{0{,}1} 0{,}1$; $\log_{\sqrt{2}} 1$; $\log_{0{,}5}\sqrt{32}$; $\log_{\sqrt{2}} 32$.

ROZWIĄZANIE

- $\log 0{,}1 = x$ $\quad 10^x = \frac{1}{10}$ $\quad 10^x = 10^{-1}$ $\quad x = -1$
- $\log_4 0{,}5 = x$ $\quad 4^x = \frac{1}{2}$ $\quad 2^{2x} = 2^{-1}$ $\quad 2x = -1$ $\quad x = -\frac{1}{2}$
- $\log_5 0{,}04 = x$ $\quad 5^x = \frac{4}{100}$ $\quad 5^x = \frac{1}{25}$ $\quad 5^x = 5^{-2}$ $\quad x = -2$
- $\log_{0{,}5} 2 = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ $\quad 2^{-x} = 2^1$ $\quad -x = 1$ $\quad x = -1$
- $\log_{0{,}4} 0{,}4 = x$ $\quad 0{,}4^x = 0{,}4^1$ $\quad x = 1$ $\quad$ lub od razu: $\quad \log_{0{,}4} 0{,}4 = 1$
- $\log_{\sqrt{2}} 1 = x$ $\quad \sqrt{2}^x = 1$ $\quad \sqrt{2}^x = \sqrt{2}^0$ $\quad x = 0$ $\quad$ lub $\quad \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$
- $\log_{0{,}5}\sqrt{32} = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32^{\frac{1}{2}}$ $\quad 2^{-x} = 2^{5\cdot\frac{1}{2}}$ $\quad -x = \frac{5}{2}$ $\quad x = -2\frac{1}{2}$
- $\log_{\sqrt{2}} 32 = x$ $\quad (\sqrt{2})^x = 32$ $\quad 2^{\frac{1}{2}x} = 2^5$ $\quad \frac{1}{2}x = 5$ $\quad x = 10$

ZADANIE 2

Oblicz x ($x > 0$) jeśli: $\log_{16} x = 0$, $\log_{0{,}5} x = -1$, $\log_{0{,}1} x = 3$, $\log x = 0{,}5$, $\log_3 x = \frac{1}{3}$, $\log_{16} x = 0{,}25$, $\log_2 x = 1{,}5$, $\log_{\sqrt{2}} x = -4$

ROZWIĄZANIE

- $-\log_{16} x = 0$ $\quad x = 16^0 = 1$
- $-\log_{0{,}1} x = 3$ $\quad x = (0{,}1)^3 = 0{,}001$
- $-\log_3 x = \frac{1}{3}$ $\quad x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$
- $-\log_2 x = 1{,}5$ $\quad x = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$
- $-\log_{0{,}5} x = -1$ $\quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
- $-\log x = 0{,}5$ $\quad x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$
- $-\log_{16} x = 0{,}25$ $\quad x = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$
- $-\log_{\sqrt{2}} x = -4$ $\quad x = (\sqrt{2})^{-4} = (2^{\frac{1}{2}})^{-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

ZADANIE 3

Oblicz x ($x > 0$ i $x \neq 1$) $\log_x 81 = 4$, $\log_x 3 = \frac{1}{2}$, $\log_x 2 = \frac{1}{3}$, $\log_x \frac{1}{9} = -2$.

ROZWIĄZANIE

- $-\log_x 81 = 4$ $\quad x^4 = 81$ $\quad x^4 = 3^4$ $\quad x = 3$
- $-\log_x 3 = \frac{1}{2}$ $\quad x^{\frac{1}{2}} = 3$ $\quad (x^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2$ $\quad x = 9$
- $-\log_x 2 = \frac{1}{3}$ $\quad x^{\frac{1}{3}} = 2$ $\quad (x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3$ $\quad x = 8$
- $-\log_x \frac{1}{9} = -2$ $\quad x^{-2} = \frac{1}{9}$ $\quad (x^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad x = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

ZADANIE 4

Oblicz, korzystając z własności logarytmów.

a) $4\log_3 2 - \log_3 12 - 2\log_3 6$ $\qquad$ **b)** $\log 4 - \log 0{,}2 - \log 0{,}02$

c) $\log_{1,5} \log_8 \log_2 16$ $\qquad$ **d)** $\log_{0,4}(2 + \log_{0,25}(1 - \log_4 2))$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $4\log_3 2 - \log_3 12 - 2\log_3 6 = \log_3 2^4 - \log_3 12 - \log_3 6^2 = \log_3 16 - \log_3 12 - \log_3 36 =$

$= \log_3 \frac{16}{12 \cdot 36} = \log_3 \frac{4}{3 \cdot 36} = \log_3 \frac{1}{3 \cdot 9} = \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 (27)^{-1} = -\log_3 27 = -\log_3 3^3 =$

$= -3\log_3 3 = -3$

Ad b) $\log 4 - \log 0{,}2 - \log 0{,}02 = \log \frac{4}{0{,}2 \cdot 0{,}02} = \log \frac{4}{0{,}004} = \log \frac{4000}{4} = \log 1000 = \log 10^3 =$

$= 3\log 10 = 3$

Ad c) $\log_{1,5} \log_8 \log_2 16 = \log_{1,5} \log_8 \log_2 2^4 = \log_{1,5} \log_8 (4\log_2 2) = \log_{1,5} \log_8 4 = *$

$\log_8 4 = x$ $\quad 8^x = 4$ $\quad (2^3)^x = 2^2$ $\quad 2^{3x} = 2^2$ $\quad 3x = 2$ $\quad x = \frac{2}{3}$

$* = \log_{1,5} \frac{2}{3} = \log_{1,5} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\log_{1,5} 1{,}5 = -1$

Ad d) $\log_{0,4}(2 + \log_{0,25}(1 - \log_4 2)) = *$

$\log_4 2 = x$ $\quad 4^x = 2$ $\quad (2^2)^x = 2^1$ $\quad 2^{2x} = 2^1$ $\quad 2x = 1$ $\quad x = \frac{1}{2}$

$* = \log_{0,4}\left(2 + \log_{0,25}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \log_{0,4}\left(2 + \log_{0,25} \frac{1}{2}\right) = **$

$\log_{0,25} \frac{1}{2} = y$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ $\quad 2y = 1$ $\quad y = \frac{1}{2}$

$** = \log_{0,4}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \log_{0,4}\left(2\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} = \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = -1$

ZADANIE 5

Wyznacz x:

a) $\log_2\left(6\frac{2}{3}\right)-\log_2 x=-\log_2 1{,}2$ **b)** $\log_{\sqrt{2}} x=4-2\log_{\sqrt{2}}6+3\log_{\sqrt{2}}3$

ROZWIĄZANIE

Doprowadzamy wyrażenie do takiej postaci, by po lewej stronie był logarytm z x, a po prawej, stosując własności działań na logarytmach, logarytm z liczby. Gdy oba logarytmy mają taką samą podstawę, to porównujemy logarytmowane wielkości.

Ad a) $\log_2 6\frac{2}{3}-\log_2 x=-\log_2 1{,}2 \quad /\cdot(-1)$

$\log_2 x=\log_2\frac{12}{10}+\log_2\frac{20}{3}$

$\log_2 x=\log_2\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{20}{3}\right) \qquad \log_2 x=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{1}\right)$

$\log_2 x=\log_2 8 \qquad x=8$

Odpowiedź: x ma wartość 8.

Ad b) $\log_{\sqrt{2}} x=4-2\log_{\sqrt{2}}6+3\log_{\sqrt{2}}3 \qquad \log_{\sqrt{2}} x+\log_{\sqrt{2}}6^2-\log_{\sqrt{2}}3^3=4$

$\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\sqrt{2}}36-\log_{\sqrt{2}}27=4 \qquad \log_{\sqrt{2}}\frac{x\cdot 36}{27}=4$

$\log_{\sqrt{2}}\frac{4x}{3}=4$ – korzystamy z definicji logarytmu

$\frac{4x}{3}=(\sqrt{2})^4$

$\frac{4x}{3}=2^2$

$4x=4\cdot 3\ /:4$

$x=3$

Odpowiedź: x ma wartość 3.

ZADANIE 6

Oblicz:

a) $\log_2 1{,}5$, gdy $\log_2 3=n$ **b)** $\log_2 36$, gdy $\log_2 24=p$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $\log_2 3=n$

$\log_2 1{,}5=\log_2\frac{15}{10}=\log_2\frac{3}{2}=\log_2 3-\log_2 2=n-1$

Ad b) $\log_2 24=p$

$\log_2 36=\log_2\frac{72}{2}=\log_2 72-\log_2 2=\log_2(3\cdot 24)-1=\log_2 3+\log_2 24-1=$

$=\log_2\frac{24}{8}+\log_2 24-1=\log_2 24-\log_2 8+\log_2 24-1=2\log_2 24-\log_2 2^3-1=$

$=2p-3\log_2 2-1=2p-3-1=2p-4$

ZADANIE 7

Oblicz $\log_p\frac{p(pr)^5}{(pr^2)^3}$, gdy $\log_p r=10$

ROZWIĄZANIE

$\log_p\frac{p\cdot p^5\cdot r^5}{p^3\cdot r^6}=\log_p\frac{p^3}{r}=\log_p p^3-\log_p r=3\log_p p-\log_p r=3-10=-7$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi –7.

ZADANIE 8

Uzasadnij, że liczba $2(\log_{0,1}3+\log_{0,1}6)-(\log_{0,1}27+\log_{0,1}12)$ jest liczbą wymierną.

ROZWIĄZANIE

$2(\log_{0,1}3+\log_{0,1}6)-(\log_{0,1}27+\log_{0,1}12)=2\log_{0,1}(3\cdot 6)-\log_{0,1}(27\cdot 12)=$

$=\log_{0,1}18^2-\log_{0,1}(27\cdot 12)=\log_{0,1}\frac{18\cdot 18}{27\cdot 12}=\log_{0,1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)=\log_{0,1}1=0$ – jest to liczba wymierna.

FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

POJĘCIE FUNKCJI I JEJ WYKRES

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Funkcja *f*, której dziedziną jest zbiór *X*, a zbiorem wartości jest zbiór *Y*, to przyporządkowanie, które każdemu elementowi x należącemu do dziedziny przyporządkowuje dokładnie jeden element y należący do zbioru wartości.
Zbiór *X* – to dziedzina funkcji, jej elementy to argumenty, a zbiór Y to zbiór wartości funkcji.

Funkcję możemy opisać za pomocą wzoru, tabelki, wykresu, grafu oraz opisu słownego.

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero.

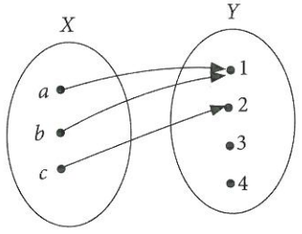
Aby znaleźć miejsce zerowe funkcji f, należy rozwiązać równanie $f(x)=0$, gdy x należy do dziedziny funkcji.

Monotoniczność
- ✓ **Funkcja *f* jest rosnąca**, jeśli wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji.
- ✓ **Funkcja *f* jest malejąca**, jeśli wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji.

ZADANIE 1

Posługując się definicją funkcji, sprawdź, które z podanych przyporządkowań jest funkcją:

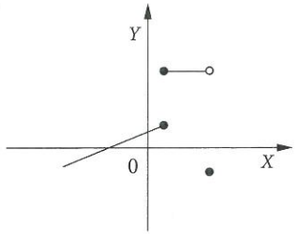
A)



B)

x	−4	−3	0	1	2
y	5	5	5	5	5

C)

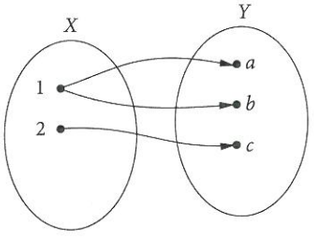


d) Każdej liczbie całkowitej jest przyporządkowana jej odwrotność.

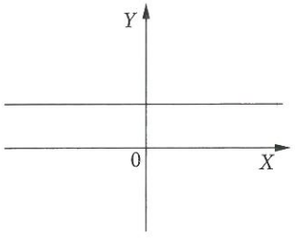
e)

x	−2	3	−1	3
y	3	2	3	1

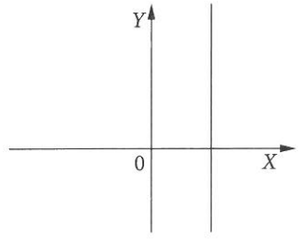
f)



g)



h)



ROZWIĄZANIE

Ad a) Tak, każdej z liter przyporządkowana jest jedna liczba.

Ad b) Tak, w zbiorze argumentów wszystkie liczby są różne.

Ad c) Nie, jednej wartości x, np. $x = 1$, przyporządkowane są dwie różne wartości, np. $y = 1$ oraz $y = 4$.

Ad d) Nie, ponieważ nie istnieje odwrotność liczby zero.

Ad e) Nie, bo liczba 3 wśród argumentów występuje dwukrotnie i przyporządkowane są jej dwie różne wartości, 2 oraz 1.

Ad f) Nie, ponieważ liczbie 1 przyporządkowane są dwie różne wartości a oraz b.

Ad g) Tak, ponieważ każdej wartości x przyporządkowana jest jedna, taka sama wartość y, jest to funkcja o równaniu $y = m$, gdzie m jest dowolną liczbą, np. $y = 2$.

Ad h) Nie, jednej wartości x przyporządkowanych jest nieskończenie wiele wartości. Taka prosta ma równanie $x = k$, gdzie k jest dowolną liczbą, np. $x = 3$, ale to nie jest funkcja.

ZADANIE 2

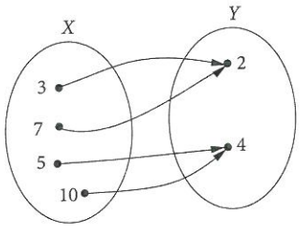
Każdą z podanych funkcji przedstaw za pomocą wzoru, tabelki, grafu i wykresu.

a) $f(x) = 3$, dziedzina – liczby rzeczywiste

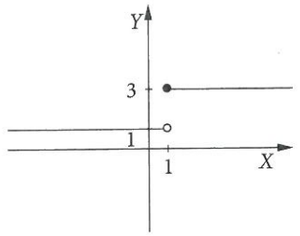
b)

x	2	3	0
y	4	6	0

c)



d)

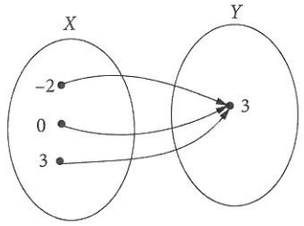


ROZWIĄZANIE

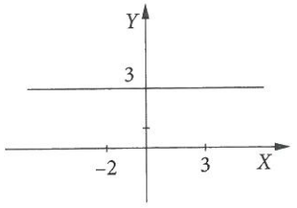
Ad a) $f(x) = 3$ – wzór

x	−2	0	3
$f(x)$	3	3	3

fragment tabelki

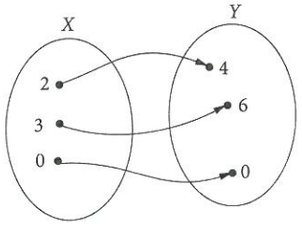


fragment grafu

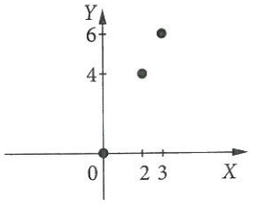


wykres

Ad b)



graf



wykres

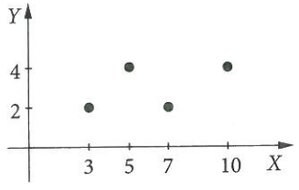
wzór:

$f(x) = 2x$ dla $x \in \{0, 2, 3\}$

Ad c)

x	3	5	7	10
y	2	4	2	4

tabelka



wykres

wzór:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ dla } x \in \{3,7\} \\ 4 \text{ dla } x \in \{5,10\} \end{cases}$$

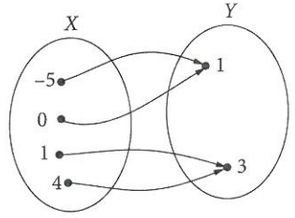
Ad d)

x	−5	0	1	4
y	1	1	3	3

fragment tabelki

wzór:

$$f(x) = \begin{cases} 3 \text{ dla } x \in \langle 1, \infty) \\ 1 \text{ dla } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$



fragment grafu

ZADANIE 3

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, każdej liczbie z tego zbioru przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną pomniejszoną o 1.

a) Napisz wzór tej funkcji.

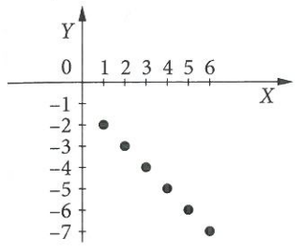
b) Narysuj wykres tej funkcji.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$f(x) = -x - 1$, $x \in A$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – liczba przeciwna do x to $-x$ i pomniejszona o 1, czyli $-x - 1$

Ad b)



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)=-x-1$	−2	−3	−4	−5	−6	−7

ODCZYTYWANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

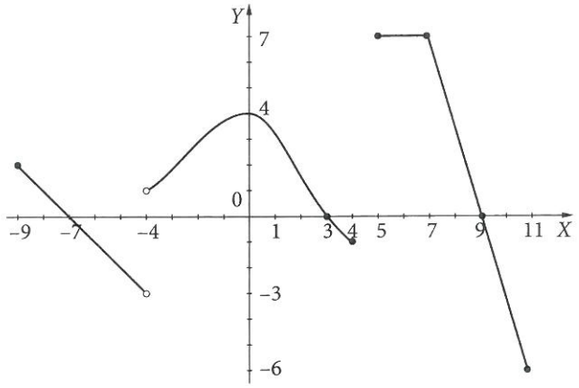
Odczytując własności funkcji, określamy dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsca zerowe, punkt przecięcia z osią rzędnych, monotoniczność, największą i najmniejszą wartość funkcji, a także argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne.

Miejsce zerowe funkcji – taki argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero.

Aby znaleźć miejsce zerowe funkcji, należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$, gdy x należy do dziedziny funkcji.

ZADANIE 1

Z podanego wykresu odczytaj własności funkcji:



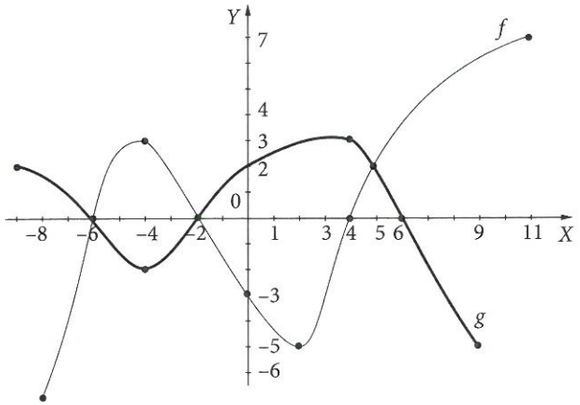
ROZWIĄZANIE

Dziedzina: $x \in \langle -9, -4) \cup (-4, 4\rangle \cup \langle 5, 11\rangle$
Zbiór wartości: $y \in \langle -6, 7\rangle$
Miejsca zerowe: $x = -7$, $x = 3$, $x = 9$
Punkt przecięcia z osią rzędnych: $(0, 4)$
Funkcja rośnie dla $x \in (-4, 0\rangle$
Funkcja stała dla $x \in \langle 5, 7\rangle$
Funkcja maleje w każdym z przedziałów: $\langle -9, -4)$, $(0, 4\rangle$, $(7, 11\rangle$.

Wartości dodatnie dla $x \in \langle -9, -7) \cup (-4, 3) \cup \langle 5, 9\rangle$
Wartości ujemne dla $x \in (-7, -4\rangle \cup (3, 4\rangle \cup (9, 11\rangle$
Wartość najmniejsza: $y = -6$
Wartość największa: $y = 7$

ZADANIE 2

Dane są wykresy funkcji *f* oraz *g*.



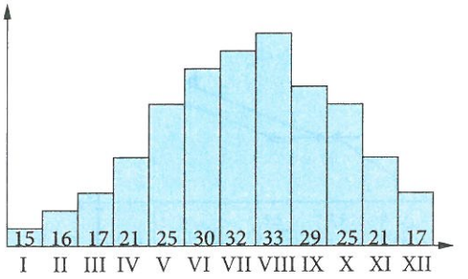
a) Podaj te argumenty, dla których zachodzi równość: $f(x) = g(x)$.
b) Dla jakich argumentów wartości funkcji *f* są większe od wartości funkcji *g*?
c) Podaj te argumenty, dla których funkcje *f* i *g* przyjmują wartości różnych znaków.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $x \in \{-6, -2, 5\}$
Ad b) $x \in (-6, -2) \cup (5, 9\rangle$
Ad c) $x \in \langle -8, -6) \cup (-6, -2) \cup (-2, 4) \cup (6, 9\rangle$.

ZADANIE 3

Wykres przedstawia średnie miesięczne dzienne temperatury (w stopniach Celsjusza) powietrza na Rodos w okresie od stycznia do grudnia.



Średnia temperatura w ciągu dnia w °C

a) Określ zbiór wartości funkcji przedstawionej na wykresie.
b) Jaka jest różnica pomiędzy średnimi temperaturami najcieplejszego i najzimniejszego miesiąca?
c) Jaka jest średnia temperatura powietrza w okresie od maja do sierpnia?

ROZWIĄZANIE

Ad a)
Zbiór wartości funkcji = {15, 16, 17, 21, 25, 29, 30, 32, 33}.
Ad b)
Różnica ta wynosi: 33°C – 15°C = 18°C.
Ad c)
Średnia temperatura od maja do sierpnia = $\frac{25+30+32+33}{4} = \frac{120}{4} = 30°C$.

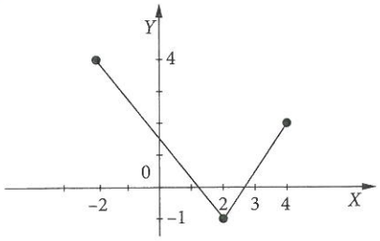
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESU FUNKCJI

✓ **Przekształcenia wykresu funkcji**
Dany jest wykres funkcji *f*.

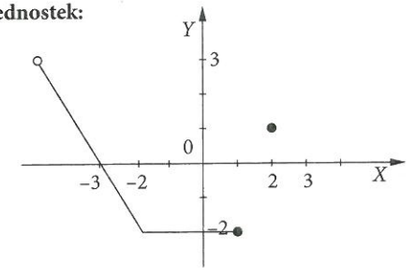
- Wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ otrzymamy w symetrii względem osi *OX*.
- Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ otrzymamy w symetrii względem osi *OY*.
- Wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$ otrzymamy w symetrii względem punktu $(0, 0)$.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x - p)$ otrzymamy, przesuwając wykres o p jednostek wzdłuż osi *OX*.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$ otrzymamy, przesuwając wykres o q jednostek wzdłuż osi *OY*.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x - a) + b$ otrzymamy, przesuwając wykres o a jednostek wzdłuż osi *OX* oraz b jednostek wzdłuż osi *OY*.

ZADANIE 1

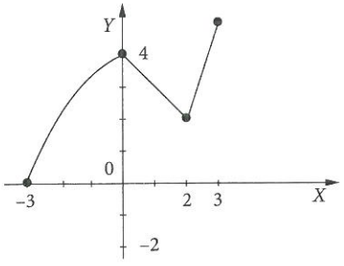
Dane wykresy funkcji przesuń o wskazaną liczbę jednostek:



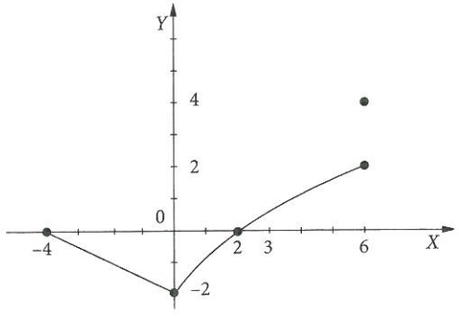
a) o trzy jednostki w lewo wzdłuż osi OX



b) o dwie jednostki w prawo wzdłuż osi OX



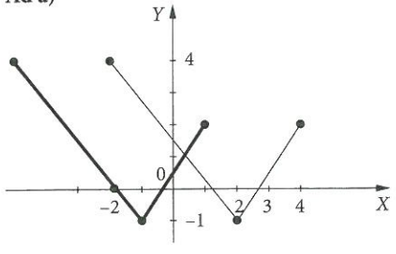
c) o cztery jednostki w dół wzdłuż osi OY



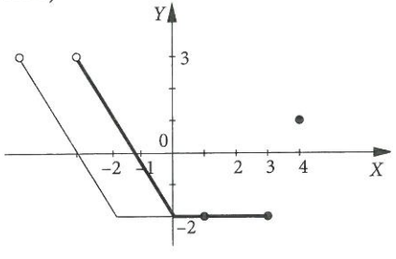
d) o dwie jednostki w górę wzdłuż osi OY

ROZWIĄZANIE

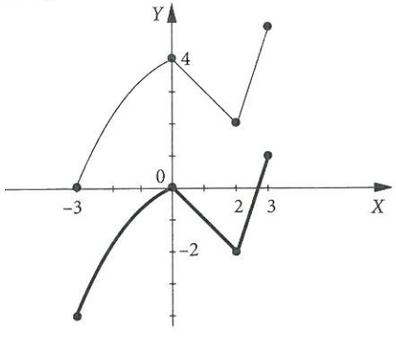
Ad a)



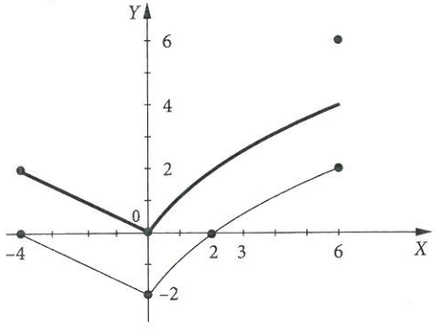
Ad b)



Ad c)



Ad d)



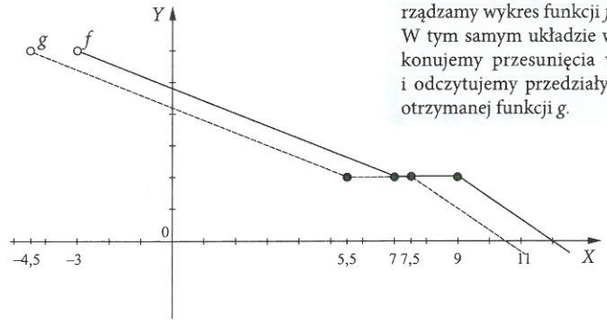
ZADANIE 2

Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-3, 7)$, stała w przedziale $\langle 7, 9\rangle$ i malejąca w przedziale $(9, +\infty)$. Określ przedziały monotoniczności funkcji g, która powstała po przesunięciu funkcji f:

a) w lewo o 1,5 jednostki wzdłuż osi OX, **b)** wzdłuż osi OY o 2 jednostki w dół.

ROZWIĄZANIE

Ad a)



Zadanie najlepiej rozwiązać graficznie. Sporządzamy wykres funkcji f.
W tym samym układzie współrzędnych dokonujemy przesunięcia wykresu funkcji f i odczytujemy przedziały monotoniczności otrzymanej funkcji g.

Odpowiedź: Funkcja g jest malejąca w przedziale $(-4{,}5;\ 5{,}5)$, stała w przedziale $\langle 5{,}5;\ 7{,}5\rangle$ i malejąca w przedziale $(7{,}5;\ +\infty)$.

Ad b)

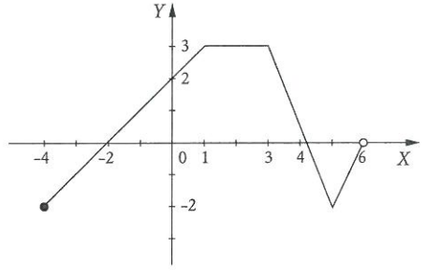
Odpowiedź: Przesunięcie wykresu wzdłuż osi OY nie zmienia ani przedziałów, w których funkcja jest monotoniczna, ani rodzaju monotoniczności.

ZADANIE 3

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji:

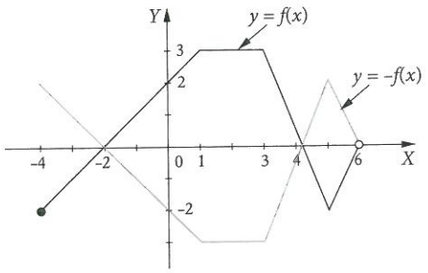
a) w symetrii względem osi OX: $y = -f(x)$, **b)** w symetrii względem osi OY: $y = f(-x)$,

c) w symetrii względem punktu $(0, 0)$: $y = -f(-x)$.

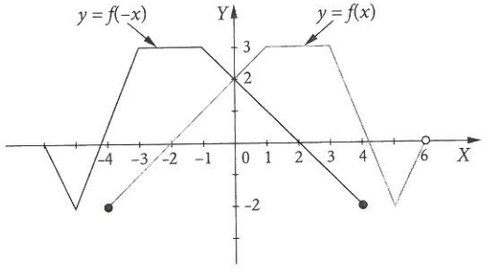


ROZWIĄZANIE

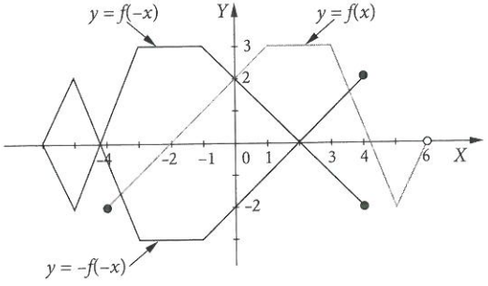
Ad a) $y = -f(x)$



Ad b) $y = f(-x)$



Ad c) $y = -f(-x)$



FUNKCJA LINIOWA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

FUNKCJA LINIOWA, JEJ WYKRES I WŁASNOŚCI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Funkcja liniowa to funkcja dana wzorem w postaci kierunkowej $y = f(x) = ax + b$, gdzie a oraz b są stałymi współczynnikami. Dziedziną funkcji liniowej są liczby rzeczywiste, a wykresem prosta.

- ✓ **Współczynnik *a*** nazywa się **współczynnikiem kierunkowym**; jest on równy tangensowi kąta nachylenia prostej będącej wykresem funkcji do osi OX.
- ✓ **Współczynnik *b*,** tzw. **wyraz wolny** (albo **stały**), wskazuje punkt, w którym wykres funkcji przecina oś OY.
- ✓ Jeśli prosta przechodzi przez dwa punkty o współrzędnych $A\ (x_1, y_1)$ $B\ (x_2, y_2)$, to jej równanie można wyznaczyć ze wzoru: $(x_2 - x_1)\ (y - y_1) = (y_2 - y_1)\ (x - x_1)$.

Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa dana wzorem $y = f(x) = ax + b$ jest:

- rosnąca, gdy $a > 0$,
- stała, gdy $a = 0$,
- malejąca, gdy $a < 0$.

Określając **własności funkcji liniowej,** wyznaczamy **dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe, punkt przecięcia z osią rzędnych, monotoniczność funkcji,** czyli określenie, kiedy jest rosnąca, malejąca lub stała oraz **dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.**

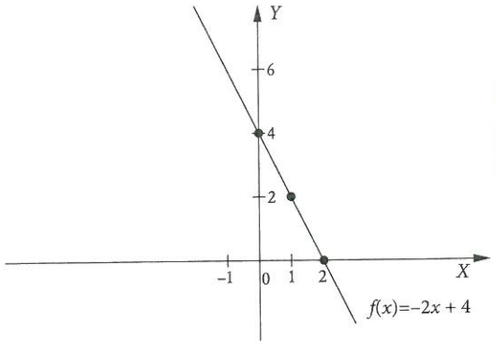
Rysowanie wykresu funkcji możemy poprzedzić tabelką, w której umieszczamy współrzędne dwóch punktów.

Przekształcając wykres funkcji liniowej, pamiętamy, że w symetrii względem osi OX: $g(x) = -f(x)$, względem osi OY: $g(x) = f(-x)$, a względem punktu $(0, 0)$: $g(x) = -f(-x)$. Przesuwając wykres funkcji w lewo lub w prawo, otrzymujemy wzór: $g(x) = f(x \pm p)$, a w górę lub w dół: $g(x) = f(x) \pm q$.

ZADANIE 1

Naszkicuj wykres funkcji o wzorze $f(x) = -2x + 4$ i określ jej własności.

ROZWIĄZANIE



Aby narysować ten wykres, można np. zbudować częściową tabelkę.

x	0	2	1
$f(x)$	4	0	2

Obliczenia do tabelki:

1) $x = 0$: $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$
2) $y = 0$: $0 = -2x + 4$ $2x = 4$ $x = 2$
3) $x = 1$: $y = -2 \cdot 1 + 4 = -2 + 4 = 2$

Do tabelki podstawiamy: $x = 0$ i otrzymujemy punkt przecięcia z osią rzędnych, w drugiej kolumnie $y = 0$ i obliczamy miejsce zerowe oraz w trzeciej dowolną wartość w miejsce x i obliczamy y. Upewniamy się, że trzy otrzymane punkty leżą na jednej prostej.

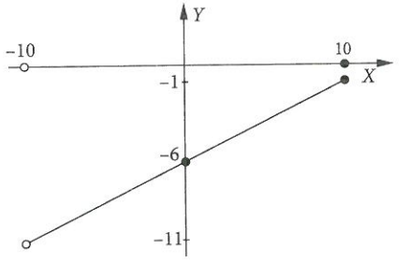
Własności:

1) dziedzina: zbiór liczb rzeczywistych $x \in \mathbb{R}$,
2) zbiór wartości funkcji: $y \in \mathbb{R}$,
3) miejsce zerowe: $x = 2$,
4) punkt przecięcia z osią rzędnych: $(0, 4)$,
5) monotoniczność funkcji: a = –2 – funkcja malejąca,
6) dla $x \in (-\infty, 2)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla $x \in (2, \infty)$ ujemne.

ZADANIE 2

Naszkicuj wykres funkcji o wzorze $g(x) = \frac{1}{2}x - 6, x \in \langle -10, 10\rangle$ i określ własności.

ROZWIĄZANIE



Tworzymy częściową tabelkę i rysujemy wykres funkcji.

x	–10	0	10
$g(x)$	–11	–6	–1

Obliczenia do tabelki:

1) $x = -10$: $g(-10) = \frac{1}{2} \cdot (-10) - 6 = -5 - 6 = -11$
2) $x = 0$: $g(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - 6 = -6$
3) $x = 10$: $g(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 6 = 5 - 6 = -1$

Własności:

1) dziedzina: $x \in \langle -10, 10\rangle$,
2) zbiór wartości: $y \in \langle -11, -1\rangle$,
3) miejsce zerowe: brak,
4) punkt przecięcia z osią y: $(0, -6)$,
5) monotoniczność: funkcja rosnąca,
6) funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.

ZADANIE 3

Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty:

a) $A\ (-2, -1)$ i $B\ (3, 4)$, **b)** $C\ (-3, 2)$ i $D\ (4, -1)$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\begin{cases} -1 = -2a + b \\ 4 = 3a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

$5a = 5$ $a = 1$, $b = 2a - 1$, $b = 1$

Odpowiedź: $y = x + 1$

Budujemy układ równań, podstawiając do równania $y = ax + b$, pamiętając, że pierwsza współrzędna punktu to x, druga to y.

Układ rozwiązujemy na przykład metodą przeciwnych współczynników i obliczone wielkości wstawiamy do wzoru funkcji.

Ad b)

$C = (-3, 2)$ $D = (4, -1)$ $(y - y_C)(x_D - x_C) - (y_D - y_C)(x - x_C) = 0$

$(y - 2)(4 + 3) - (-1 - 2)(x + 3) = 0$

$(y - 2) \cdot 7 - (-3)(x + 3) = 0$

$7y - 14 + 3x + 9 = 0$

$7y = -3x + 5 \ /:7$

Odpowiedź: $y = -\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$

Możemy znaleźć wzór funkcji liniowej, korzystając ze wzoru na prostą przechodzącą przez dwa punkty.

ZADANIE 4

Dana jest funkcja liniowa o wzorze $f(x) = (\sqrt{2} \cdot a - 2)x + 4$. Dla jakich wartości funkcja ta jest rosnąca?

ROZWIĄZANIE

$\sqrt{2} \cdot a - 2 > 0$

$\sqrt{2} \cdot a > 2 \ / \cdot \sqrt{2}$

$2a > 2\sqrt{2} \ /:2$

$a > \sqrt{2}$

Odpowiedź: Funkcja jest rosnąca dla $a > \sqrt{2}$.

Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy jej współczynnik kierunkowy jest większy od zera.

ZADANIE 5

Koszt produkcji 100 sztuk części do drukarek jest równy 300 000 zł, a 500 sztuk jest równy 600 000 zł. Zakładając, że funkcja kosztów produkcji jest liniowa, napisz jej wzór, a następnie oblicz koszt produkcji 300 sztuk.

ROZWIĄZANIE

x – liczba wyprodukowanych sztuk towaru
funkcja kosztów: $f(x) = ax + b$

Najpierw wprowadzamy zmienną x, która oznacza liczbę wyprodukowanych sztuk.
Koszt produkcji jest wartością funkcji.
Układamy układ równań.

$$\begin{cases} 100a + b = 300\,000 \\ 500a + b = 600\,000 \end{cases}$$

$a = 750$, $b = 225\,000$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy:

$f(x) = 750x + 225\,000$

Funkcja kosztów ma postać:

$f(300) = 750 \cdot 300 + 225\,000 = 450\,000$

Aby obliczyć koszt produkcji 300 sztuk, należy obliczyć wartość znalezionej funkcji dla $x = 300$.

Odpowiedź: Funkcja kosztów ma postać:
$f(x) = 750\,x + 225\,000$. Koszt produkcji 300 sztuk części wynosi 450 000 zł.

ZADANIE 6

Skoczek narciarski, oddając skok na skoczni mamuciej, otrzymuje punkty za długość i styl skoku. Punkty za długość skoku przyznawane są według następującej zasady: jeśli skoczek wyląduje na tzw. punkcie K znajdującym się na 185 metrze, to otrzymuje 120 punktów. Za skok dłuższy niż 185 metrów otrzymuje dodatkowo 1,2 punktu za każdy metr przekraczający punkt K. Jeśli zawodnik wyląduje przed punktem K, to wówczas liczbę 120 punktów pomniejsza się o 1,2 punktu za każdy metr brakujący do punktu K.

a) Napisz wzór funkcji $y = f(x)$, która długości skoku x w metrach przyporządkowuje liczbę punktów $f(x)$ uzyskaną za tę długość skoku.
b) Jaką długość skoku osiągnął zawodnik, jeśli za długość skoku otrzymał 90 punktów?
c) Ile punktów zdobył zawodnik, który wylądował na linii bezpieczeństwa znajdującej się na 215 metrze?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$y = f(x) = 120 + 1{,}2(x - 185) = 1{,}2x + 120 - 222 =$
$= 1{,}2x - 102$

Wyznaczamy wzór funkcji.

Odpowiedź: Funkcja ma postać: $f(x) = 1{,}2x - 102$.

Ad b)

$90 = 1{,}2x - 102$
$192 = 1{,}2x$

Dana jest funkcja $f(x) = 90$. Podstawiamy ją do wzoru funkcji f.

$x = \frac{192}{1{,}2} = 160$

Rozwiązujemy równanie i odczytujemy argument.

Odpowiedź: Zawodnik, który dostał 90 punktów, doskoczył do 160 m.

Ad c)

$f(215) = 120 + 1{,}2(215 - 185) = 120 + 1{,}2 \cdot 30 =$
$= 120 + 36 = 156$

Podstawiamy $x = 215$ do wzoru funkcji i obliczamy ilość zdobytych punktów.

Odpowiedź: Zawodnik zdobył 156 punktów.

ZADANIE 7

Dana jest funkcja: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Znajdź obraz wykresu funkcji f w symetrii względem osi OX, OY oraz początku układu współrzędnych. Podaj wzory otrzymanych funkcji.

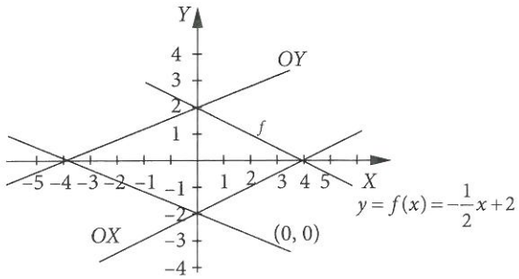
ROZWIĄZANIE

1) $x = 0$: $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$

2) $y = 0$: $0 = -\frac{1}{2}x + 2$ $\frac{1}{2}x = 2$ $x = 4$

3) $x = -2$ $f(-2) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 3$

x	0	4	−2
$f(x)$	2	0	3



Wzory funkcji:

OX: $y = -f(x) = -\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{1}{2}x - 2$ OX: $y = \frac{1}{2}x - 2$

OY: $y = f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + 2 = \frac{1}{2}x + 2$ OY: $y = \frac{1}{2}x + 2$

$(0,0)$: $y = -f(-x) = -\left[-\frac{1}{2}(-x) + 2\right] = -\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x - 2$ $(0,0)$: $y = -\frac{1}{2}x - 2$

ZADANIE 8

Dana jest funkcja $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$. Podaj wzory funkcji po przesunięciu wykresu o:

a) trzy w prawo **b)** dwa w lewo **c)** cztery w górę **d)** jeden w dół
e) trzy w lewo i dwa w górę **f)** dwa w prawo i cztery w dół.

ROZWIĄZANIE

$f(x) = 2x - \frac{3}{4}$

a) trzy w prawo: $g(x) = f(x - p) = f(x - 3) = 2(x - 3) - \frac{3}{4} = 2x - 6 - \frac{3}{4} = 2x - 6\frac{3}{4}$ $g(x) = 2x - 6\frac{3}{4}$

b) dwa w lewo: $g(x) = f(x - p) = f(x + 2) = 2(x + 2) - \frac{3}{4} = 2x + 4 - \frac{3}{4} = 2x + 3\frac{1}{4}$ $g(x) = 2x + 3\frac{1}{4}$

c) cztery w górę: $g(x) = f(x) + q = f(x) + 4 = 2x - \frac{3}{4} + 4 = 2x + 3\frac{1}{4}$ $g(x) = 2x + 3\frac{1}{4}$

d) jeden w dół: $g(x)=f(x)+q=f(x)-1=2x-\frac{3}{4}-1=2x-1\frac{3}{4}$ $\quad g(x)=2x-1\frac{3}{4}$

e) trzy w lewo i dwa w górę: $g(x)=f(x-p)+q=f(x+3)+2=2(x+3)+2+2x+6+2=2x+8$

$g(x)=2x+8$

f) dwa w prawo i cztery w dół: $g(x)=f(x-p)+q=2(x-2)-4=2x-4-4=2x-8$ $\quad g(x)=2x-8$

NIERÓWNOŚCI LINIOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Mnożąc nierówność poprzez liczbę ujemną, zmieniamy znak nierówności. Po rozwiązaniu nierówności **zaznaczamy rozwiązanie na osi liczbowej i zapisujemy je za pomocą przedziału.**

ZADANIE 1

Rozwiąż nierówności:

a) $x^2-9+\frac{(x-1)(x+4)}{2}\le\frac{3}{2}x^2-\left(x+\frac{7}{2}\right)$ $\qquad$ **b)** $1-\frac{(x-1)(x+2)}{3}+\frac{x^2}{3}>5+(x+1)^2-2x\left(\frac{1}{2}x+2\right)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x^2+\frac{x^2+4x-x-4}{2}+x+\frac{7}{2}\le\frac{3}{2}x^2+9 \quad /\cdot 2$

$2x^2+x^2+3x-4+2x+7\le 3x^2+18$

$5x\le 15 \quad /:5$

$x\le 3$

Odpowiedź: $x\in(-\infty,3\rangle$

Ad b)

$1+\frac{x^2}{3}+2x\left(\frac{1}{2}x+2\right)>5+x^2+2x+1+\frac{(x-1)(x+2)}{3}$

$\frac{x^2}{3}+x^2+4x>5+x^2+2x+\frac{x^2+2x-x-2}{3}$

$\frac{x^2}{3}+2x>5+\frac{x^2+x-2}{3} \quad /\cdot 3$

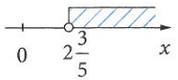
$x^2+6x>15+x^2+x-2$

$5x>13$

$x>\frac{13}{5}$

$x>2\frac{3}{5}$

Odpowiedź: $x\in(2\frac{3}{5},\infty)$



ZADANIE 2

Rozwiąż nierówność $(x+2)^2-\frac{(2x+1)(x-2)}{2}\ge 10$ **i sprawdź, czy liczba** $a=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{8}\right)^2$ **spełnia nierówność.**

ROZWIĄZANIE

$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\ge 10+\frac{2x^2-4x+x-2}{2}$

$x^2+4x\ge 6+\frac{2x^2-3x-2}{2} \quad /\cdot 2$

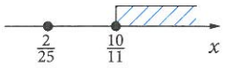
$2x^2+8x\ge 12+2x^2-3x-2$

$11x>10 \quad /:11$

$x\ge\frac{10}{11}$

$a=(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{8}+\left(\frac{3}{5}\sqrt{8}\right)^2=2-\frac{6}{5}\sqrt{16}+\frac{9}{25}\cdot 8=2-\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{1}+\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{1}=2-\frac{24}{5}+\frac{72}{25}=$

$=2-4\frac{4}{5}+2\frac{22}{25}=4\frac{22}{25}-4\frac{20}{25}=\frac{2}{25}$ $\qquad a=\frac{2}{25}$



Odpowiedź: Liczba a nie spełnia nierówności.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Układy dwóch równań liniowych rozwiązujemy algebraicznie lub graficznie. Algebraicznie można je rozwiązać **metodą podstawiania lub metodą przeciwnych współczynników**. Metoda podstawiania jest z reguły dłuższa i grozi błędami rachunkowymi, dlatego **staramy się wybierać metodę przeciwnych współczynników**. Przed wybraniem metody doprowadzamy równania do najprostszej postaci. Przy rozwiązywaniu graficznym wybieramy najprostszą postać układu i każde równanie zapisujemy w postaci równania prostej. Wykonujemy wykresy obu prostych, a rozwiązaniem jest punkt przecięcia obu prostych.
Gdy otrzymamy dwa takie same równania – wykresem jest jedna prosta (dwie pokrywające się proste) i wtedy układ równań jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań. **Jeśli rozwiązaniem są dwie proste równoległe, to układ jest sprzeczny** – nie ma rozwiązania.
Rozwiązaniem algebraicznym układu równań jest para liczb.

ZADANIE 1

Rozwiąż algebraicznie i graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+2 \\ x+y=4 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} x+y=5 \\ -2x-2y=-10 \end{cases}$ $\qquad$ **c)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) Rozwiązanie algebraiczne

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+2 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+2 \\ x-\frac{1}{4}x+2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x=2 \quad /:\frac{3}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3} \\ y=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}+2=1\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2\frac{2}{3} \\ y=1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x=2\frac{2}{3}$ i $y=1\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie graficzne:

$y=-\frac{1}{4}x+2$

x	0	8	$2\frac{2}{3}$
y	2	0	$1\frac{1}{3}$

1) $x=0$: $y=-\frac{1}{4}\cdot 0+2=2$

2) $y=0$: $0=-\frac{1}{4}x+2$ $\frac{1}{4}x=2$ $x=8$

3) $x=2\frac{2}{3}$: $y=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}+2=1\frac{1}{3}$

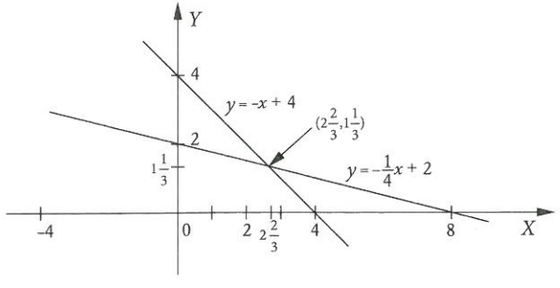
$y=-x+4$

x	0	4	$2\frac{2}{3}$
y	4	0	$1\frac{1}{3}$

1) $x=0$: $y=4$

2) $y=0$: $0=-x-x+4$ $x=4$

3) $x=2\frac{2}{3}$: $y=-2\frac{2}{3}+4=1\frac{1}{3}$



Odpowiedź: Rozwiązaniem jest punkt przecięcia prostych.

Ad b) Rozwiązanie algebraiczne

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -2x-2y=-10 \quad /:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -x-y=-5 \end{cases}$$

$0=0$

Odpowiedź: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, jest nieoznaczony – jest zawsze prawdziwy niezależnie od wartości x. Rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb $x\in R$ i $y=-x+5$.

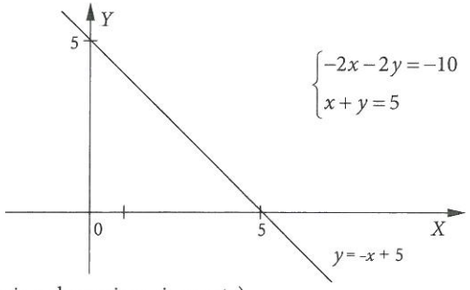
Rozwiązanie graficzne

Otrzymaliśmy dwa takie same równania prostej. Rozwiązaniem graficznym są dwie pokrywające się proste. Rozwiązań jest nieskończenie wiele.

$y=-x+5$

x	0	5	3
y	5	0	2

1) $x=0$: $y=5$ 2) $y=0$: $0=-x+5$ $x=5$
3) $x=3$: $y=-3+5=2$



Odpowiedź: Rozwiązaniem jest jedna prosta (dwie pokrywające się proste).

Ad c) Rozwiązanie algebraiczne:

$$\begin{cases} 3x-y=2 \quad /\cdot(-1) \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

$0=5$

Odpowiedź: Układ jest sprzeczny, nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie graficzne

$y=3x-2$

x	0	$\frac{2}{3}$	2
y	−2	0	4

1) $x=0$: $y=3\cdot 0-2=-2$

2) $y=0$: $0=3x-2$ $3x=2$ $x=\frac{2}{3}$

3) $x=2$: $y=3\cdot 2-2=6-2=4$

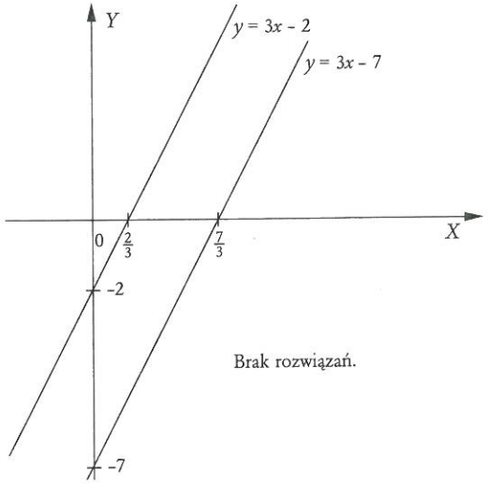
$y=3x-7$

x	0	$\frac{7}{3}$	2
y	−7	0	−1

1) $x=0$: $y=3\cdot 0-7=-7$

2) $y=0$: $0=3x-7$ $-3x=-7$ $x=\frac{7}{3}$

3) $x=2$: $y=3\cdot 2-7=6-7=-1$



Brak rozwiązań.

Odpowiedź: Otrzymaliśmy dwie równoległe proste. Brak rozwiązania.

ZADANIE 2

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} -4x+7y=(x-4)(x-2)-x^2 \\ 4x+14y=16 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} -4x+7y=x^2-6x+8-x^2 \\ 4x+14y=16 \quad /:2 \end{cases}$$

Wykonujemy działania po prawej stronie pierwszego równania i porządkujemy je. Następnie dzielimy obie strony drugiego równania przez 2.

$$\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 2x+7y=8 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ dwóch takich samych równań, a zatem układ jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań. Można je opisać, rozwiązując którekolwiek równanie ze względu na y.

$$y=-\frac{2}{7}x+\frac{8}{7}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb: $x \in R$ i $y=-\frac{2}{7}x+\frac{8}{7}$.

ZADANIE 3

Rozwiąż układ równań i sprawdź poprawność rozwiązania:

$$\begin{cases} 0,25y+0,5(x-7)=0,5(x-1) \quad /\cdot 100 \\ 3x+y=2+x \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} 25y+50(x-7)=50(x-1) \quad /:25 \\ 3x-x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2(x-7)=2(x-1) \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2x-14=2x-2 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=12 \\ 2x+12=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=12 \\ 2x=-10 \quad /:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=12 \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$L_1=0,25y+0,5(x-7)=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{1}+\frac{1}{2}(-5-7)=3-6=-3$ $\quad P_1=0,5(x-1)=\frac{1}{2}(-5-1)=-3$ $\quad L_1=P_1$

$L_2=3x+y=3\cdot(-5)+12=-15+12=-3$ $\quad P_2=2+x=2-5=-3$ $\quad L_2=P_2$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x=-5$ i $y=12$.

ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ, NIERÓWNOŚCI I UKŁADÓW RÓWNAŃ

ZADANIE 1

Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 696. Co to za liczby?

ROZWIĄZANIE

$2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$ – oznaczenie czterech kolejnych liczb nieparzystych

$2n+1+2n+3+2n+5+2n+7=696$

$8n+16=696$

$8n=680 \quad /:8 \qquad n=85 \qquad 2n+1=2\cdot 85+1=171$ – pierwsza liczba

Odpowiedź: Sumę 696 tworzą liczby 171, 173, 175 i 177.

ZADANIE 2

Jeden z boków równoległoboku jest o 40% krótszy od drugiego. Wyznacz najdłuższe możliwe boki równoległoboku wyrażone liczbami naturalnymi, by jego obwód był nie większy niż 33 centymetry.

ROZWIĄZANIE

x – długość dłuższego boku

$60\%x=0,6x$ – długość krótszego boku $\qquad$ obw $=2\cdot x+2\cdot 0,6\cdot x$

$2x+2\cdot 0,6x\le 33$

$3,2x\le 33 \quad /:3,2$

$x \le 10{,}3$

$x = 10 \qquad 0{,}6 \cdot 10 = \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{1} = 6$

Odpowiedź: Boki równoległoboku mają długość 10 cm i 6 cm.

ZADANIE 3

Dana jest pewna liczba dwucyfrowa. Jeżeli przestawimy jej cyfry, a następnie od cyfry jedności odejmiemy 2, to otrzymamy liczbę dwukrotnie większą od danej. Jeżeli po odwróceniu cyfr danej liczby cyfrę dziesiątek zmniejszymy o 3, to otrzymamy liczbę o trzy mniejszą od danej. Jaka to liczba?

ROZWIĄZANIE

$10x + y$, gdzie x oznacza cyfrę dziesiątek, a y cyfrę jedności.

Zapisujemy daną liczbę dwucyfrową w postaci:

$10y + x - 2$

Liczba dwucyfrowa otrzymana po przestawieniu cyfr i odjęciu 2 od cyfry jedności.

$\frac{10y + x - 2}{10x + y} = 2$

Zależność między liczbami po zmianach.

$10(y - 3) + x$

Liczba dwucyfrowa po przestawieniu cyfr i odjęciu 3 od cyfry dziesiątek.

$10x + y - 10(y - 3) - x = 3$

Zależność między liczbami.

$$\begin{cases} \frac{10y + x - 2}{10x + y} = 2 \\ 10x + y - 10(y - 3) - x = 3 \end{cases}$$

Układamy i przekształcamy układ równań.

$$\begin{cases} 10y + x - 2 = 20x + 2y \\ 10x + y - 10y + 30 - x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y - 19x = 2 \\ 9x - 9y = -27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -19x + 8y = 2 \\ 9x - 9y = -27 \quad /:(-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -19x + 8y = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ -19x + 8(x + 3) = 2 \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy, przykładowo, metodą podstawiania.

$$\begin{cases} -11x = -22 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 25.

FUNKCJA KWADRATOWA, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

FUNKCJA KWADRATOWA, JEJ WYKRES I WŁASNOŚCI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie W o współrzędnych $W = (p, q)$. Ramiona paraboli skierowane **są do góry, gdy $a > 0$ i do dołu, gdy $a < 0$.**

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej:
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Aby narysować wykres funkcji kwadratowej, obliczamy charakterystyczne punkty: **wierzchołek, miejsce zerowe i punkt przecięcia z osią *OY*.**

Określając własności, wyznaczamy **dziedzinę i zbiór wartości.** Obliczamy **miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią rzędnych.** Określamy, **dla jakich argumentów funkcja jest rosnąca, dla jakich malejąca** oraz **wartość największą lub najmniejszą.** Podajemy, **dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne,** oraz **równanie osi symetrii paraboli.**

ZADANIE 1

Narysuj wykres i określ własności:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$ **b)** $f(x) = -x^2 + 10x - 25$ **c)** $f(x) = -x^2 - 5x - 7$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$ $a = 1, b = -7, c = 12$

Należy obliczyć wyróżnik trójmianu kwadratowego (deltę) i od znaku tej liczby uzależnić dalsze postępowanie.

Wyznacznik funkcji kwadratowej:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1.$ $\sqrt{\Delta} = 1$

Miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Wierzchołek:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4\cdot 1} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \qquad W = \left(3{,}5; -\frac{1}{4}\right)$$

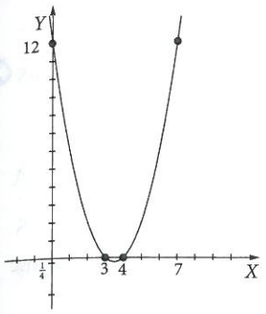
Pierwszą współrzędną wierzchołka możemy obliczyć ze wzoru $p = \frac{-b}{2a}$ lub jeśli znamy miejsca zerowe, to pierwsza współrzędna leży na środku między miejscami zerowymi, czyli $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Drugą współrzędną wierzchołka obliczamy ze wzoru $q = \frac{-\Delta}{4a}$ lub obliczamy $f(p)$.

Punkt przecięcia z osią rzędnych:

Jest to punkt o współrzędnych $(0, c)$ – $(0, 12)$, $c = 12$, zatem punkt ma współrzędne $(0, 12)$.

Gdy obliczymy charakterystyczne punkty, wykonujemy wykres funkcji.

$x_1 = 3,$ $x_2 = 4$ $W = \left(3{,}5; \frac{1}{4}\right)$ $(0, 12)$



Gdy zaznaczamy punkt $(0, 12)$ oraz $W = \left(3{,}5; \frac{1}{4}\right)$, możemy również zaznaczyć punkt $(7, 12)$, który jest symetryczny do punktu $(0, 12)$ względem prostej $x = 3{,}5$, która jest osią symetrii paraboli.

Własności:

1) Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$.
2) Zbiór wartości: $y \in \langle -\frac{1}{4}, \infty)$.
3) Miejsca zerowe: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.
4) Punkt przecięcia z osią *OY*: $(0, 12)$.
5) Funkcja rośnie dla $x \in (3{,}5; \infty)$, a maleje dla $x \in (-\infty, 3{,}5)$, dla $x = 3{,}5$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, która wynosi $-\frac{1}{4}$. Symbolicznie: $y_{min} = f(3{,}5) = -\frac{1}{4}$.
6) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$, a ujemne dla $x \in (3, 4)$.
7) Osią symetrii jest prosta o równaniu $x = 3{,}5$.

Ad b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

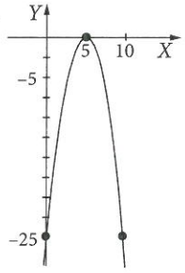
Współczynniki: $a = -1$, $b = 10$, $c = -25$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\,(-1)\,(-25) = 100 - 100 = 0$ (jedno miejsce zerowe) $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2\cdot(-1)} = 5$

Wierzchołek: $(5, 0)$

Punkt przecięcia z *OY*: $(0, -25)$

Wykres: $x_0 = (5, 0), (0, -25)$



Własności:

1) Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$.
2) Zbiór wartości: $y \in (-\infty, 0\rangle$.
3) Miejsca zerowe: $x_0 = 5$.
4) Punkt przecięcia z *OY*: $(0, -25)$.
5) Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty, 5)$, malejąca dla $x \in (5, \infty)$, a dla $x = 5$ osiąga wartość największą, która wynosi 0. Symbolicznie: $y_{max} = f(5) = 0$.
6) Funkcja przyjmuje wartości niedodatnie.
7) Osią symetrii jest prosta $x = 5$.

Ad c) $f(x) = -x^2 - 5x - 7$

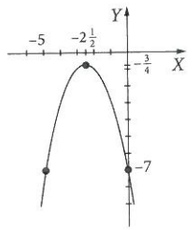
Współczynniki: $a = -1$, $b = -5$, $c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\,(-1)\,(-7) = 25 - 28 = -3$ – brak miejsc zerowych $\Delta < 0$

Wierzchołek:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2(-1)} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{4\cdot(-1)} = -\frac{3}{4} \qquad W = \left(-2\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Punkt przecięcia z *OY*: (0, –7)



Własności:

1) Dziedzina: $x \in R$.

2) Zbiór wartości: $y \in R$.

3) Miejsca zerowe: brak.

4) Punkt przecięcia o *OY*: (0, –7).

5) Funkcja jest rosnąca dla $x \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right)$, malejąca dla $x \in \left(-2\frac{1}{2}, \infty\right)$, a dla $x = -2\frac{1}{2}$ osiąga wartość największą, która wynosi $-\frac{3}{4}$. Symbolicznie: $y_{max} = f\left(-2\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

6) Funkcja przyjmuje wartości ujemne.

7) Osią symetrii jest prosta $x = -2\frac{1}{2}$.

ZADANIE 2

Przedstaw funkcję o równaniu $f(x) = -x^2 + 4x$ w postaci kanonicznej i iloczynowej.

ROZWIĄZANIE

1) Postać iloczynowa: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = -x^2 + 4x = -x(x - 4)$

$f(x) = -(x - 0)(x - 4)$ – postać iloczynowa, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

2) Postać kanoniczna: $f(x) = a(x - p)^2 + q$

$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \quad q = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = -4 + 8 = 4$

Odpowiedź: $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$ – postać kanoniczna

ZADANIE 3

Zamień postać kanoniczną na iloczynową: $f(x) = \frac{1}{25}(x-1)^2 - \frac{49}{25}$.

ROZWIĄZANIE

$$f(x) = \frac{1}{25}(x-1)^2 - \frac{49}{25} = \frac{1}{25}(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) - \frac{49}{25} = \frac{1}{25}(x^2 - 2x + 1) - \frac{49}{25} =$$

$$= \frac{1}{25}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{1}{25} - \frac{49}{25} = \frac{1}{25}x^2 - \frac{2}{25}x - \frac{48}{25}$$ – postać ogólna

Dla ułatwienia obliczenia wykonujemy, pomijając ułamek $\frac{1}{25}$.

$f(x) = \frac{1}{25}(x^2 - 2x - 48) \quad / \cdot 25$

$25f(x) = x^2 - 2x - 48, \qquad \Delta = 4 + 192 = 196, \qquad \sqrt{\Delta} = 14$

$x_1 = -6, \qquad x_2 = 8$

$\frac{1}{25}\left(x^2 - 2x - 48\right) = \frac{1}{25}(x + 6)(x - 8)$

Odpowiedź: $f(x) = \frac{1}{25}(x + 6)(x - 8)$ – postać iloczynowa

ZADANIE 4

Zamień postać iloczynową na kanoniczną: $f(x) = -2(x - 1)(x + 5)$.

ROZWIĄZANIE

$f(x) = -2(x - 1)(x + 5), \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -5$

$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad q = f(-2) = -2(-2 - 1)(-2 + 5) = -2 \cdot (-3) \cdot 3 = 18$

Odpowiedź: Postać kanoniczna to $f(x) = -2(x + 2)^2 + 18$

ZADANIE 5

Podaj wzór ogólny funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej miejscami zerowymi są –1 i 6, a funkcja osiąga wartość najmniejszą –4.

ROZWIĄZANIE

$x_1 = -1, \quad x_2 = 6, \quad q = -4$

$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad W = (2{,}5; -4)$

Jeżeli znamy miejsca zerowe funkcji, to korzystamy z postaci iloczynowej, w miejsce x i y podstawiamy współrzędne wierzchołka i obliczamy a.

$a(2{,}5 + 1)(2{,}5 - 6) = -4$

$-3{,}5 \cdot 3{,}5a = -4 \quad / \cdot (-1)$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}a = 4$

$\frac{49}{4}a = 4 \quad / : \frac{49}{4}$

$a = \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{49} = \frac{16}{49}$

$f(x) = \frac{16}{49}(x + 1)(x - 6)$ – postać iloczynowa

$$f(x) = \frac{16}{49}(x^2 - 6x + x - 6) = \frac{16}{49}(x^2 - 5x - 6) = \frac{16}{49}x^2 - \frac{80}{49}x - \frac{96}{49}$$

Odpowiedź: Postać ogólna funkcji to $f(x) = \frac{16}{49}x^2 - \frac{80}{49}x - \frac{96}{49}$.

ZADANIE 6

Wykres funkcji $f(x) = -3x^2$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w górę.

a) Znajdź wzór tak otrzymanej funkcji g.
b) Przedstaw funkcję g w postaci iloczynowej.
c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji g.
d) Wyznacz zbiór wartości funkcji g.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

Stosujemy wzór na przekształcenie równania funkcji po przesunięciu wykresu.

$g(x) = f(x-2)^2 + 3 = -3(x-2)^2 + 3 =$

$= -3(x^2 - 4x + 4) + 3 = -3x^2 + 12x - 12 + 3 = -3x^2 + 12x - 9$

Odpowiedź: Wzór funkcji ma postać $g(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

Ad b)

Aby otrzymać postać iloczynową, obliczamy wyróżnik, a następnie miejsca zerowe funkcji g.

$\Delta = 122 - 4 \cdot (-3) \cdot (-9) = 144 - 108 = 36,$

$\sqrt{\Delta} = 6$

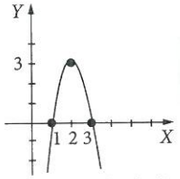
$x_1 = \frac{-12-6}{-6} = 3, \quad x_2 = \frac{-12+6}{-6} = 1$

Odpowiedź: Postać iloczynowa: $g(x) = -3(x-1)(x-3)$.

Ad c)

Znajdujemy współrzędne wierzchołka paraboli. Jedna z nich przyda się w pkt d).

$x_w = -\frac{12}{-6} = 2, \quad y_w = -\frac{36}{-12} = 3$



Odpowiedź: Funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$.

Ad d)

Wiemy, że funkcja osiąga wartość największą $y_w = 3$, zatem zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 3\rangle$.

Odpowiedź: $(-\infty, 3\rangle$.

ZADANIE 7

Podaj wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2$ w przesunięciu o:

a) dwa w prawo, **b)** trzy w lewo, **c)** cztery w górę,
d) pięć w dół, **e)** jeden w prawo i dwa w górę, **f)** dwa w lewo i cztery w dół.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $g(x) = -3(x-2)^2$ **Ad b)** $g(x) = -3(x+3)^2$ **Ad c)** $g(x) = -3x^2 + 4$

Ad d) $g(x) = -3x^2 - 5$ **Ad e)** $g(x) = -3(x-1)^2 + 2$ **Ad f)** $g(x) = -3(x+2)^2 - 4$

ZADANIE 8

Podaj wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ w symetrii względem:

a) osi OX, **b)** osi OY, **c)** punktu $(0, 0)$.

ROZWIĄZANIE

Ad a) OX: $g(x) = -f(x) = -(-2x^2 + 3x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad g(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Ad b) OY: $g(x) = f(-x) = -2(-x)^2 + 3(-x) - 1 = -2x^2 - 3x - 1$ $\quad g(x) = -2x^2 - 3x - 1$

Ad c) $(0, 0)$: $g(x) = -f(-x) = -[-2(-x)^2 + 3(-x) - 1] = -(-2x^2 - 3x - 1) = 2x^2 + 3x + 1$

$g(x) = 2x^2 + 3x + 1$

ZADANIE 9

Dla jakich wartości k funkcja $f(x) = -x^2 + (k-4)x + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 3)$ i malejąca w przedziale $(3, +\infty)$?

ROZWIĄZANIE

Aby funkcja spełniała warunek z zadania, odcięta (współrzędna x) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji musi być równa 3.

$-\frac{b}{2a} = 3, \quad -\frac{k-4}{-2} = 3$

$k - 4 = 6$, czyli $k = 10$.

Odpowiedź: Funkcja spełnia żądany warunek, gdy $k = 10$.

ZADANIE 10

Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, wiedząc, że suma miejsc zerowych tego trójmianu wynosi 4, zbiór wartości jest równy $(-\infty, 6\rangle$ oraz do wykresu tej funkcji należy punkt $\left(1; 5\frac{1}{2}\right)$.

ROZWIĄZANIE

Postać ogólna funkcji kwadratowej to:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Poszukujemy współczynników: a, b, c.

$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} = 4$

Korzystając z treści zadania, układamy równania.

$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} = 6$

$f(1) = a + b + c = 5\frac{1}{2}$

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} b = -4a \\ \frac{4ac-16a^2}{4a} = 6 \\ a - 4a + c = 5\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c - 4a = 6 \quad / \cdot(-1) \\ c - 3a = 5\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ -c + 4a = -6 \\ c - 3a = 5\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-4a \\ -a=\frac{1}{2} \\ c=6+4a \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-4\left(-\frac{1}{2}\right)=2 \\ a=-\frac{1}{2} \\ c=6+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=4 \end{cases}$$

Odpowiedź: Postać ogólna funkcji wyraża się wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+4$.

ZADANIE 11

Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x$, $\langle -4, -1\rangle$ **b)** $f(x) = -3(x + 1)(x - 2)$, $\langle 0, 1\rangle$

c) $f(x) = 3(x + 2)^2 - 4$, $\langle -3, 0\rangle$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $f(x) = -2x^2 + 4x$, $\langle -4, -1\rangle$, $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$

1) $p=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$ – nie należy do przedziału $\langle -4, -1\rangle$.

2) $f(-4) = -2(-4)^2 + 4 \cdot (-4) = -2 \cdot 16 - 16 = -48$ – wartość najmniejsza

$f(-1) = -2(-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2 - 4 = -6$ – wartość największa

Odpowiedź: Największa wartość w podanym przedziale wynosi −6, a najmniejsza −48.

Ad b) $f(x) = -3(x + 1) \cdot (x - 2)$ $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

1) $p=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$ – należy do przedziału $\langle 0, 1\rangle$

$q=f\left(\frac{1}{2}\right)=-3\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)=-3\cdot1\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$ – wartość największa

2) $f(0) = -3(0 + 1)(0 - 2) = -3 \cdot 1 \cdot (-2) = 6$
$f(1) = -3(1 + 1)(1 - 2) = -3 \cdot 2 \cdot (-1) = 6$ → wartości najmniejsze

Odpowiedź: Największa wartość w podanym przedziale wynosi $6\frac{3}{4}$, a najmniejsza 6.

Ad c) $f(x) = 3(x + 2)^2 - 4$, $\langle -3, 0\rangle$ $W = (-2, -4)$

1) $p = -2$ i należy do przedziału $\langle -3, 0\rangle$ $q = f(-2) = -4$ – wartość najmniejsza

2) $f(-3) = 3(-3 + 2)^2 - 4 = 3 \cdot (-1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1$

$f(0) = 3(0 + 2)^2 - 4 = 3 \cdot 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$ – wartość największa

Odpowiedź: W podanym przedziale najmniejsza wartość wynosi −4, a największa 8.

ZADANIE 12

Napisz wzór funkcji kwadratowej, do której wykresu należą punkty A = (1, 10), B = (−1, −6), C = (2, 9).

ROZWIĄZANIE

$f(x)=ax^2+bc+c$

$ax^2+bc+c=y$

Podstawiamy współrzędne punktów do postaci ogólnej funkcji kwadratowej i rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} a\cdot1^2+b\cdot1+c=10 \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=-6 \\ a\cdot2^2+b\cdot2+c=9 \end{cases}$$

Jeżeli pomnożymy drugie równanie przez −1 i dodamy do siebie dwa pierwsze równania, to wyliczymy b.

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ a-b+c=-6 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ -a+b-c=6 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b=16\ /:2 \\ a+b+c=10 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ a+8+c=10 \\ 4a+2\cdot8+c=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ a+c=2\ /\cdot(-1) \\ 4a+c=9-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ -a-c=-2 \\ 4a+c=-7 \end{cases}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, obliczamy a.

$$\begin{cases} b=8 \\ 3a=-9\ /:3 \\ a+c=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ a=-3 \\ -3+c=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ a=-3 \\ c=5 \end{cases}$$

Odpowiedź: punkty A, B, C należą do wykresu funkcji $f(x)=-3x^2+8x+5$.

RÓWNANIA KWADRATOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równania kwadratowe rozwiązujemy tak, jak obliczaliśmy miejsca zerowe funkcji kwadratowej. **Równanie kwadratowe ma postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.** Do tej postaci doprowadzamy każde równanie. Jeżeli pozostałe współczynniki b i c są różne od zera, to doprowadzamy równanie do najprostszej postaci. **Obliczamy Δ i w zależności od jej znaku równanie nie ma rozwiązania, ma dwa lub jedno, które obliczamy ze wzorów.** Jeżeli współczynnik b lub c jest równy zero, można również obliczyć Δ i korzystać ze wzorów, ale metoda ta jest dłuższa i grozi błędami rachunkowymi. Efektywniejszą metodą jest wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias w równaniach typu $ax^2 \pm bx = 0$ oraz korzystanie ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ w równaniach $ax^2 - c = 0$.

ZADANIE 1

Rozwiąż równania:

a) $3x^2-7x+2=0$ **b)** $-x^2+10x-25=0$ **c)** $2x^2-x+1=0$

d) $x^2+2{,}5x-1{,}5=0$ **e)** $(x-2)(x+5)-(x+2)(x-3)=(x-7)(x+1)$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $3x^2-7x+2=0 \qquad a=3 \quad b=-7 \quad c=2$

$\Delta=b-4ac=(-7)^2-4\cdot3\cdot2=49-24=25 \qquad \sqrt{\Delta}=5$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-5}{2\cdot3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+5}{2\cdot3}=\frac{12}{6}=2$$

Rozwiązaniem równania są dwie liczby, $\frac{1}{3}$ lub 2.

Ad b) $-x^2+10x-25=0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2-10x+25=0 \qquad a=1 \quad b=-10 \quad c=25$

$\Delta=b-4ac=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=100-100=0$

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{10}{2\cdot1}=5$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Ad c) $2x^2-x+1=0 \qquad a=2 \quad b=-1 \quad c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot2\cdot1=1-8=-7$

Równanie nie ma rozwiązania.

Ad d)

$x^2+2{,}5x-1{,}5=0 \quad /\cdot2$

$2x^2+5x-3=0 \qquad a=2, \quad b=5, \quad c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot2\cdot(-3)=25+24=49 \qquad \sqrt{\Delta}=7$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{2\cdot2}=\frac{-12}{4}=-3, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby -3 oraz $\frac{1}{2}$.

Ad e) $(x-2)(x+5)-(x+2)(x-3)=(x-7)(x+1)$

$(x^2+5x-2x-10)-(x^2-3x+2x-6)=x^2+x-7x-7$

$(x^2+3x-10)-(x^2-x-6)=x^2-6x-7$

$x^2+3x-10-x^2+x+6=x^2-6x-7$

$-x^2+4x+6x-4+7=0$

$-x^2+10x+3=0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2-10x-3=0$

$a=1 \quad b=-10 \quad c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot1\cdot(-3)=100+12=112$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{112}=\sqrt{16\cdot7}=4\sqrt{7}$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-4\sqrt{7}}{2\cdot1}=\frac{2(5-2\sqrt{7})}{2}=5-2\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+4\sqrt{7}}{2\cdot1}=\frac{2(5+2\sqrt{7})}{2}=5+2\sqrt{7}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $5-2\sqrt{7}$ oraz $5+2\sqrt{7}$.

ZADANIE 2

Rozwiąż równania:

a) $-2x^2+3x=0$ **b)** $3x^2-6x=0$ **c)** $2x^2-4=0$

d) $-3x^2-1=0$ **e)** $130-(3x-7)^2=42$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $-2x^2+3x=0 \quad /\cdot(-1)$

$2x^2-3x=0 \quad /:2$

$$x^2-\frac{3}{2}x=0$$

$$x\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

$x_1=0$ lub $x-\frac{3}{2}=0$

$$x_2=\frac{3}{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby 0 lub $\frac{3}{2}$.

Ad b) $3x^2-6x=0 \quad /:3$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x_1=0$ lub $x-2=0$

$x_2=2$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby 0 oraz 2.

Ad c) $2x^2-4=0 \quad /:2$

$x^2-2=0$

$x^2-(\sqrt{2})^2=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$x+\sqrt{2}=0$ lub $x-\sqrt{2}=0$

$x_1=-\sqrt{2} \qquad x_2=\sqrt{2}$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $-\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{2}$.

Ad d) $-3x^2-1=0 \quad /\cdot(-1) \qquad 3x^2+1=0 \quad /:3$

$x^2+\frac{1}{3}=0$ – to wyrażenie jest zawsze dodatnie. Równanie nie ma rozwiązania.

NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Nierówności kwadratowe rozwiązujemy tak samo jak równania, pamiętając o zmianie znaku nierówności przy mnożeniu obu stron nierówności przez liczbę ujemną.
Po obliczeniu miejsc zerowych zaznaczamy rozwiązanie na osi liczbowej i zapisujemy je za pomocą przedziału liczbowego.

ZADANIE 1

Rozwiąż nierówności:

a) $-3x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\geq 0$ **b)** $-2x^2+3x-5\leq 0$ **c)** $-x^2-2x-3>0$ **d)** $-x^2-6x-9\geq 0$

e) $x^2-10x+25>0$ **f)** $-3x^2+6x\geq 0$ **g)** $-\frac{1}{2}x^2+2<0$ **h)** $2x^2-6<0$

i) $-5x^2-3>0$ **j)** $-4x^2-8\leq 0$ **k)** $(3-2x)(8-4x)\leq 0$

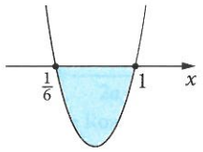
ROZWIĄZANIE

Ad a) $-3x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\geq 0 \quad /\cdot(-1) \qquad 3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0 \quad /\cdot 2$

$6x^2-5x-1\leq 0 \qquad a=6 \quad b=-5 \quad c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 6\cdot(-1)=25+24=49 \qquad \sqrt{\Delta}=7$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-7}{2\cdot 6}=\frac{-2}{12}=-\frac{1}{6} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+7}{2\cdot 6}=\frac{12}{12}=1$

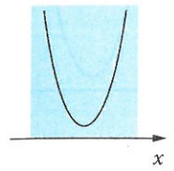


Odpowiedź: $x\in\langle -\frac{1}{6};1\rangle$

Ad b) $-2x^2+3x-5\leq 0 \quad /\cdot(-1)$

$2x^2-3x+5\geq 0 \qquad a=2 \quad b=-3 \quad c=5$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5=9-40=-31$

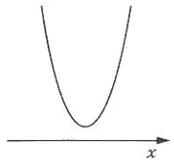


Odpowiedź: $x\in\mathbb{R}$
(można również zapisać odpowiedź w postaci przedziału $x\in(-\infty;\infty)$)

Ad c) $-x^2-2x-3>0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2+2x+3<0 \qquad a=1 \quad b=2 \quad c=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot 3=4-12=-8$



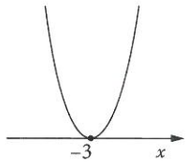
Odpowiedź: Nierówność nie ma rozwiązania, wyrażenie nie przyjmuje wartości ujemnych.

Ad d) $-x^2-6x-9\geq 0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2+6x+9\leq 0$

$(x+3)^2\leq 0$

$x=-3$

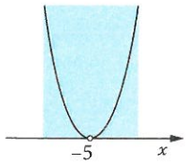


Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest liczba –3.

Ad e) $x^2+10x+25>0 \qquad a=1 \quad b=10 \quad c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 1\cdot 25=100-100=0$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-10}{2\cdot 1}=-5$



Odpowiedź: $x\in(-\infty;-5)\cup(-5;\infty)$, co można zapisać: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

Ad f) $-3x^2+6x\geq 0 \quad /\cdot(-1)$

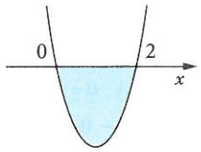
$3x^2-6x\leq 0 \quad /:3$

$x^2-2x\leq 0$

$x(x-2)\leq 0$

$x_1=0$ lub $x-2=0$

$x_2=2$



Odpowiedź: $x\in\langle 0;2\rangle$

Ad g) $-\frac{1}{2}x^2+2<0 \quad /\cdot(-1)$

$\frac{1}{2}x^2-2>/\cdot 2$

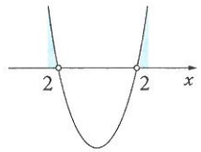
$x^2-4>0$

$x^2-2^2>0 \quad \rightarrow \quad (a^2-b^2=(a+b)(a-b))$

$(x+2)(x-2)>0$

$x+2=0 \quad$ lub $\quad x-2=0$

$x_1=-2, \qquad x_2=2$



Odpowiedź: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

Ad h) $2x^2-6<0 \quad /:2$

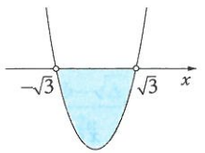
$x^2-3<0$

$x^2-(\sqrt{3})^2<0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})<0$

$x+\sqrt{3}=0$ lub $x-\sqrt{3}=0$

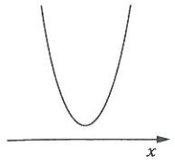
$x_1=-\sqrt{3}, \qquad x_2=\sqrt{3}$



Odpowiedź: $x\in(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

Ad i) $-5x^2-3>0 \quad /\cdot(-1)$

$5x^2+3<0$ – to wyrażenie jest zawsze dodatnie.

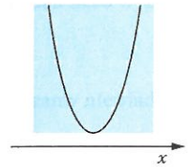


$x^2<-\frac{3}{5}$

Odpowiedź: Nierówność jest sprzeczna, nie ma rozwiązania.

Ad j) $-4x^2-8\leq 0 \quad /\cdot(-1)$

$4x^2+8\geq 0$ – to wyrażenie jest zawsze dodatnie.



$x^2\geq -2$, każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest większa od 0, zatem i od −2.

Odpowiedź: $x\in(-\infty;\infty)$ (można zapisać $x\in R$)

Ad k) $(3-2x)(8-4x)\leq 0$

$(-2x+3)(-4x+8)\leq 0$

$(2x-3)(4x-8)\leq 0$

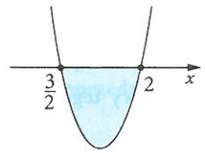
$2x-3=0$ lub $4x-8=0$

$4x=8$

$x_1=\frac{3}{2}, \qquad x_2=2$

Z obu nawiasów wyłączamy znak „−”, przed nawiasami pozostanie znak „+”.

Nierówność można rozwiązać wymnażając nawiasy i doprowadzając ją do najprostszej postaci, obliczając Δ, x_1 i x_2.



Odpowiedź: $x\in\langle\frac{3}{2};2\rangle$

ZADANIE 2

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji danych wzorami $f(x) = -2x + 4$ oraz $g(x) = -3x^2 - 6x$, a następnie z wykresu odczytaj rozwiązanie nierówności $g(x) < f(x)$.

ROZWIĄZANIE

$f(x) = -2x + 4$

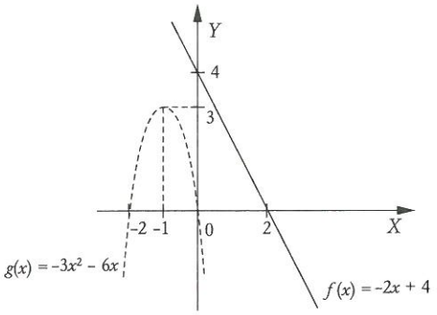
x	0	2	1
$f(x)$	4	0	2

1) $x = 0$: $f(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$
2) $y = 0$: $0 = -2x + 4$ $2x = 4$ $x = 2$
3) $x = 1$: $f(1) = -2 \cdot 1 + 4 = -2 + 4 = 2$

$g(x) = -3x^2 - 6x$

Miejsca zerowe: $-3x^2 - 6x = 0$ /:(−3) $x^2 + 2x = 0$ $x(x + 2) = 0$ $x_1 = 0, x_2 = -2$

Wierzchołek: $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$ $g(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = -3 + 6 = 3$, $W = (-1, 3)$



Odpowiedź: Nierówność $g(x) < f(x)$ jest zawsze prawdziwa, $x \in R$.

ZADANIA PROWADZĄCE DO RÓWNAŃ KWADRATOWYCH

ZADANIE 1

Obwód prostokąta wynosi 19 cm, a jego pole 0,00195 m². Znajdź wymiary tego prostokąta (w centymetrach).

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} 2x + 2y = 19 \\ x \cdot y = 19{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 9{,}5 \\ x \cdot y = 19{,}5 \end{cases}$$

$x = 9{,}5 - y$

$(9{,}5 - y)y = 19{,}5$

$-y^2 + 9{,}5y - 19{,}5 = 0$

Wprowadzamy niewiadome x i y oznaczające odpowiednio długość i szerokość prostokąta w centymetrach. Zapisujemy równania wynikające z treści zadania i tworzymy z nich układ równań. Metry kwadratowe zamieniamy na centymetry kwadratowe.

$\Delta = (9{,}5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-19{,}5) = 90{,}25 - 78 = 12{,}25$

$\sqrt{\Delta} = 3{,}5$

$y_1 = \frac{-9{,}5 - 3{,}5}{-2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$, $y_2 = \frac{-9{,}5 + 3{,}5}{-2} = 3$

$x_1 = 3$, $x_2 = 6{,}5$

Rozwiązujemy układ równań, który sprowadzamy do równania kwadratowego. Otrzymane liczby są długościami boków tego prostokąta.

Odpowiedź: Długości boków prostokąta wynoszą 3 cm i 6,5 cm.

ZADANIE 2

Suma dwóch liczb wynosi 70. Dobierz je tak, aby ich iloczyn był największy.

ROZWIĄZANIE

Wprowadzamy niewiadome oznaczające szukane liczby: x oraz y.

xy – iloczyn największy

$x + y = 70$ $y = 70 - x$

$f(x) = x \cdot (70 - x) = -x^2 + 70x$

Tworzymy funkcję.

$x = p = \frac{-70}{-2} = 35$ $y = 70 - 35 = 35$

Wyznaczamy teraz taki argument, dla którego nasza funkcja przyjmuje wartość największą.

Odpowiedź: Iloczyn będzie największy, gdy obie liczby będą miały wartość 35.

ZADANIE 3

Zakłady zbożowe sprzedały 1200 t pszenicy w cenie 600 zł za tonę. Badania wykazały, że każda obniżka ceny pszenicy o 10 zł powoduje wzrost sprzedaży o 200 t. Przy jakiej cenie łączny przychód zakładów ze sprzedaży pszenicy byłby największy?

ROZWIĄZANIE

x – cena (w złotych)
$v(x)$ – wielkość sprzedaży (w tonach)
$F(x) = v(x)\,x$ – funkcja opisująca łączny przychód

Wprowadzamy najpierw oznaczenia konieczne do utworzenia funkcji opisującej proces zachodzący w zadaniu.

$$v(x) = 1200 + \frac{600 - x}{10} \cdot 200 = 1200 + 20 \cdot (600 - x) = 1200 + 12\,000 - 20x = 13\,200 - 20x = 20(660 - x)$$

$F(x) = 20x \cdot (660 - x)$, $x \in (0, 600)$

$F(x) = -20x^2 + 13200x$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-13\,200}{-40} = 330$

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową, która wartość największą osiąga dla:

Odpowiedź: Łączny przychód będzie największy przy cenie pszenicy 330 zł za tonę.

ZADANIE 4

Jacek podczas wakacji codziennie przechodził taką samą ilość kilometrów. W sumie przeszedł 180 km. Gdyby codziennie pokonał o 3 km więcej, to tę samą ilość przeszedłby w 5 dni krócej. Ile dni Jacek trenował i ile kilometrów dziennie przechodził?

ROZWIĄZANIE

x – dzienna ilość kilometrów
y – ilość dni treningu

$$\begin{cases} x \cdot y = 180 \\ (x+3)(y-5) = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 180 \\ xy - 5x + 3y - 15 = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 180 \\ 180 - 5x + 3y - 15 = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 180 \\ -5x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 15 + 5x \quad /:3 \\ x \cdot y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{15+5x}{3} \\ x \cdot \dfrac{15+5x}{3} = 180 \quad /\cdot 3 \end{cases}$$

$x\,(15 + 5x) = 180 \cdot 3$
$15x + 5x^2 = 180 \cdot 3\ /:5$
$3x + x^2 = 36 \cdot 3$
$x^2 + 3x - 108 = 0 \qquad a = 1, b = 3, c = -108$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 9 + 432 = 441 \quad \sqrt{\Delta} = 21$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-21}{2} < 0$ – dzienna ilość kilometrów nie może być ujemna

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{-2a} = \dfrac{-3+21}{2} = 9$ – ilość dni

$x \cdot y = 180$
$9 \cdot y = 180\ /:9$
$y = 20$ – ilość kilometrów

Odpowiedź: Jacek trenował przez 9 dni, codziennie przechodząc 20 kilometrów.

RÓWNANIA WIELOMIANOWE I WYMIERNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równania typu: $x^3 = 1$, $x^3 = -8$ itd. rozwiązujemy, obliczając pierwiastek odpowiedniego stopnia i pamiętając, że istnieje pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej.

Równania wielomianowe zapisane w postaci iloczynowej rozwiązujemy, przyrównując każdy z czynników oddzielnie do zera.

Rozwiązanie równania wymiernego rozpoczynamy od założenia – mianownik różny od zera. Zapisujemy równanie w postaci proporcji i rozwiązujemy, korzystając z własności proporcji.

ZADANIE 1

Rozwiąż równania:

a) $x^3 + 8 = 0$ **b)** $2x^5 - 64 = 0$ **c)** $-3x^3 - 81 = 0$
d) $-2x^3 + 4 = 0$ **e)** $-2x^6 + 2 = 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $x^3 + 8 = 0$
$x^3 = -8$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$\boldsymbol{x = -2}$

Ad b) $2x^5 = 64\ /:2$
$x^5 = 32$
$x^5 = 2^5$
$\boldsymbol{x = 2}$

Ad c) $-3x^3 = 81\ /(-3)$
$x^3 = -27$
$x = \sqrt[3]{-27}$
$\boldsymbol{x = -3}$

Ad d) $-2x^3 = -4\ /:(-2)$
$x^3 = 2$
$\mathbf{x = \sqrt[3]{2}}$

Ad e) $-2x^6 + 2 = 0\ /:(-2)$
$x^6 - 1 = 0$
$(x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$
$x = \sqrt[3]{-1}$ lub $x = \sqrt[3]{1}$
$\boldsymbol{x_1 = -1}$ **lub** $\boldsymbol{x_2 = 1}$

ZADANIE 2

Rozwiąż równania:

a) $(1-2x)(3x+2)\,x\,(4-5x)=0$ **b)** $(4-2x^2)(2-x)^2(x^2+5)=0$

c) $(1-x)^2x^2(x+1)^2(x^2-1)=0$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(1-2x)(3x+2)\,x\,(4-5x)=0$

$1-2x=0$ lub $3x+2=0$ lub $x=0$ lub $4-5x=0$

$-2x=-1\ /:(-2)$ $3x=-2\ /:3$ $-5x=-4\ /:(-5)$

$x=\frac{1}{2}$ $x=-\frac{2}{3}$ $x=\frac{4}{5}$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby: $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$.

ZADANIE 3

Rozwiąż równania:

a) $\frac{x^2-16}{x(x+4)}=0$ **b)** $\frac{2x+4}{x^2-4}=0$ **c)** $\frac{1-2x}{x+5}=-4$ **d)** $\frac{x+3}{4x+8}=\frac{1}{x+1}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\frac{x^2-16}{x(x+4)}=0$ Zał: $x\neq 0$ i $x+4\neq 0$ $x\neq -4$

$\frac{(x+4)(x-4)}{x(x+4)}=0$

$\frac{(x-4)}{x}=0$

$x-4=0$

$x=4$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba 4.

Ad b)

$\frac{2x+4}{x^2-4}=0$ Zał: $x+2\neq 0$ i $x-2\neq 0$ Doprowadzamy wyrażenie do prostszej postaci.

$x\neq -2$ $x\neq 2$

$\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$ Przed skróceniem ułamka należy zrobić założenie.

$\frac{2}{x-2}=0$ Skracamy ułamek.

$2\neq 0$

Odpowiedź: Licznik ułamka ma wartość 2, więc nigdy nie jest równy 0. Równanie nie ma rozwiązania.

Ad c)

$\frac{1-2x}{x+5}=-4$ Zał: $x+5\neq 0$ $x\neq -5$

Korzystamy z własności proporcji.

$\frac{1-2x}{x+5}=\frac{-4}{1}$

$1(1-2x)=-4(x+5)$ $1-2x=-4x-20$

$2x=-21\ /:2$ $x=-\frac{21}{2}=-10\frac{1}{2}$

Odpowiedź: Dla $x\neq -5$ rozwiązaniem równania jest liczba $-10\frac{1}{2}$.

Ad d)

$\frac{x+3}{4x+8}=\frac{1}{x+1}$ Zał: $4x+8\neq 0$ $x\neq -2$

$x+1\neq 0$ $x\neq -1$ Następnie rozwiązujemy równanie.

$(x+3)\cdot(x+1)=4x+8$

$x^2+x+3x+3=4x+8$

$x^2-5=0$ Sprawdzamy, czy wyznaczone liczby należą do dziedziny, i udzielamy odpowiedzi.

$x_1=-\sqrt{5}$, $x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź: Dla $x\neq -2$ i $x\neq -1$ rozwiązaniem równania są liczby $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA, FUNKCJA WYKŁADNICZA

WYKRES I WŁASNOŚCI PROPORCJONALNOŚCI ODWROTNEJ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Proporcjonalność odwrotną wyraża funkcja dana wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$. Wykresem funkcji $y=\frac{a}{x}$ jest hiperbola, a jej dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste z wyjątkiem zera.

ZADANIE 1

Narysuj wykres funkcji i omów jej własności.

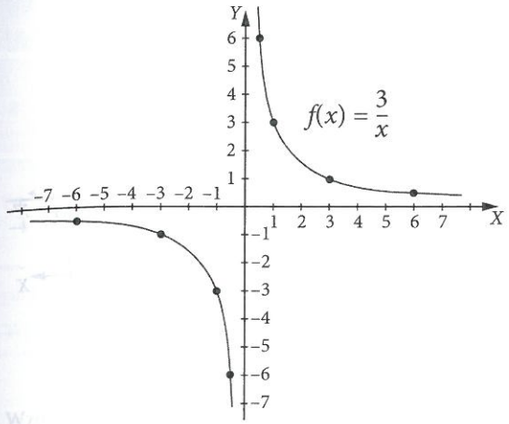
a) $f(x)=\frac{3}{x}$ b) $f(x)=\frac{-2}{x}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$f(x)=\frac{3}{x}$

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)=\frac{3}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	x	6	3	1	$\frac{1}{2}$

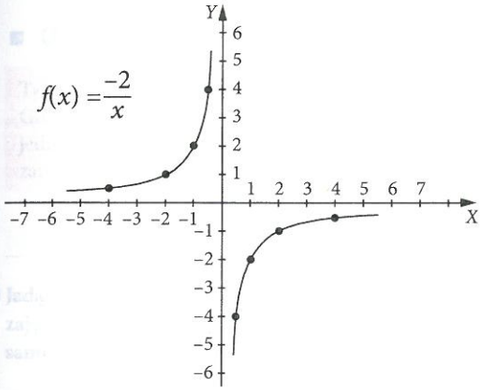


Własności:
1) Dziedzina: $x\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$
2) Zbiór wartości: $y\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$
3) Miejsca zerowe: brak
4) Punkt przecięcia z osią OY: brak
5) Funkcja malejąca

Ad b)

$f(x)=\frac{-2}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)=\frac{-2}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$



Własności:
1) Dziedzina: $x\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$
2) Zbiór wartości: $y\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$
3) Funkcja rosnąca

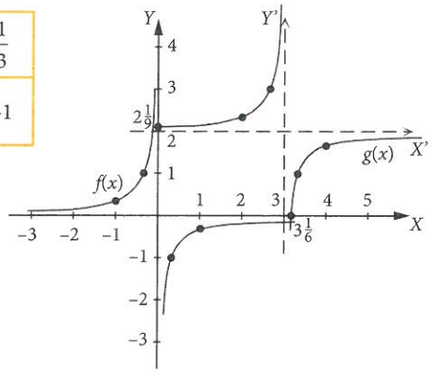
ZADANIE 2

Funkcję $f(x)=\frac{-1}{3x}$ przesuń o wektor $\vec{u}$ = [3, 2], tj. o 3 jednostki w prawo i dwie w górę. Wykonaj wykres, określ własności i zapisz wzór w postaci ilorazu.

ROZWIĄZANIE

$f(x)=\frac{-1}{3x}$

x	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$
$f(x)$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1



$g(x)=\frac{-1}{3(x-3)}+2$

Własność funkcji g:
1) Dziedzina: $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
2) Zbiór wartości: $y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
3) Miejsce zerowe:

$g(x) = 0$:

$\frac{-1}{3(x-3)}+2=0 \qquad \frac{-1}{3(x-3)}=-2 \quad /\cdot(-1)$

$\frac{1}{3x-9}=\frac{2}{1}$

$2\,(3x-9)=1 \qquad 6x-18=1$

$6x = 19\ /:6$

$x=3\frac{1}{6}$ – miejsce zerowe

4) Punkt przecięcia z osią OY:

$x=0:\ y=\frac{-1}{3(0-3)}+2=\frac{-1}{-9}+2=2\frac{1}{9}\left(0, 2\frac{1}{9}\right)$

5) Funkcja rosnąca

Wzór funkcji:

$g(x)=\frac{-1}{3(x-3)}+2=\frac{-1}{3x-9}+\frac{2(3x-9)}{3x-9}=\frac{-1+6x-18}{3x-9}=\frac{6x-19}{3x-9}$

$g(x)=\frac{6x-19}{3x-9}$ – funkcja zapisana w postaci ilorazu.

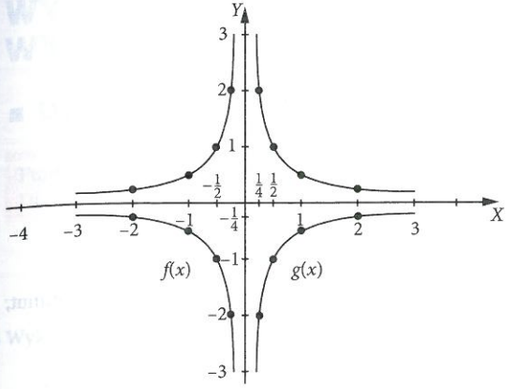
ZADANIE 3

Znajdź obraz funkcji $f(x)=\frac{1}{2x}$ w symetrii osiowej względem osi odciętych, rzędnej oraz początku układu współrzędnych. Podaj wzory otrzymanych funkcji.

ROZWIĄZANIE

$f(x)=\frac{1}{2x}$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Wzory:
- względem osi OX: $g(x) = -f(x)$

$g(x)=-\frac{1}{2x}$

- względem osi OY: $g(x) = f(-x)$

$g(x)=\frac{1}{2(-x)}=-\frac{1}{2x}$

Wzory funkcji w symetrii względem osi odciętych i osi rzędnych są takie same: $g(x)=-\frac{1}{2x}$.

Funkcja $f(x)=\frac{1}{2x}$ jest środkowo symetryczna, więc wzór funkcji w symetrii względem początku układu jest taki sam jak wzór funkcji (tak jak wartość ułamka: $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{-2}$).

ZADANIA PRAKTYCZNE ZWIĄZANE Z PROPORCJONALNOŚCIĄ ODWROTNĄ

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Typowe zadania związane z proporcjonalnością można rozwiązać, korzystając z własności proporcji. Gdy wielkości są wprost proporcjonalne, zapisujemy proporcję i obliczamy brakującą wielkość. Jeśli jednak są one odwrotnie proporcjonalne, zapisujemy proporcję, następnie jedną stronę proporcji zapisujemy odwrotnie i wyliczamy brakującą wielkość.

ZADANIE 1

Jadąc na motocyklu z prędkością 48km/h, pewną trasę można pokonać w czasie 20 minut. Ile czasu zajęłoby pokonanie tej trasy, idąc wolno z prędkością 3km/h, a z jaką prędkością należałoby jechać samochodem, by pokonać ją w 8 minut?

ROZWIĄZANIE

t – czas potrzebny do przejścia trasy

$v_1=48\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad t_1=\frac{20}{60}h\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad v_1=\frac{s}{t_1} \qquad (1)$

$v_2=3\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad t_2=? \qquad (2)$

Te wielkości są odwrotnie proporcjonalne – im wolniej idziemy, tym więcej czasu potrzebujemy na jej pokonanie. Z (1) wyznaczamy s i wstawiamy do (2).

$v_2=\frac{v_1t_1}{t_2}$ stąd $t_2=\frac{v_1t_1}{v_2}=\frac{48\cdot\frac{1}{3}}{3}=\frac{16}{3}\text{h} \qquad t=\frac{16}{3}\text{h}=5\frac{1}{3}\text{h}=$ **5 godzin 20 minut.**

v_3 – prędkość samochodu pokonującego trasę w 8 minut

$v_3 = \frac{s}{t_3}$, gdzie $t_3 = \frac{8}{60}$h, zaś s wyznaczamy z (1)

Podobnie – wielkości v_3 i t_3 są odwrotnie proporcjonalne.

$$v_3 = \frac{v_1 t_1}{t_3} = \frac{48 \cdot \frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \text{h}}{\frac{2}{15}} = \frac{16 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{\frac{2}{15}} = 16 \cdot \frac{15}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$v = 120$ [km/h]

Odpowiedź: Idąc pieszo, trasę można pokonać w 5 godzin i 20 minut, a by ją przejechać w osiem minut, trzeba jechać z prędkością 120 km/h.

ZADANIE 2

Trzy maszyny wykonują pewną pracę w czasie 12 godzin. Ile maszyn wykona tę samą pracę w ciągu 4 godzin i 30 minut?

ROZWIĄZANIE

x – ilość maszyn, a – wykonana praca

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \frac{a}{12\text{h}} \\ x &= \frac{a}{4{,}5\text{h}} \end{aligned}\right\} \text{ z proporcji } x = \frac{3 \cdot \frac{a}{4{,}5}}{\frac{a}{12}} = \frac{3\cancel{a}}{\frac{9}{2}} \cdot \frac{12}{\cancel{a}} = \frac{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}} = 8$$

Wielkości są odwrotnie proporcjonalne – im więcej maszyn, tym krótszy czas wykonania pracy.

Odpowiedź: Ta sama praca zostanie wykonana przez 8 maszyn.

ZADANIE 3

Pokonując pewną drogę, koło o obwodzie 2,4 m wykonało 200 obrotów. Ile obrotów wykona na tej drodze koło o obwodzie 0,5 metra?

ROZWIĄZANIE

x – ilość obrotów, b – pokonana droga

$$200 = \frac{b}{2{,}4}$$

$$x = \frac{b}{0{,}5}$$

Z proporcji (lub wyznaczając b z pierwszego równania i wstawiając do drugiego)

$$x = 200 \cdot 2b \cdot \frac{24}{10b}$$

$$x = 40 \cdot 24 = 960$$

Odpowiedź: Mniejsze koło wykona 960 obrotów.

WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Funkcja wykładnicza to funkcja dana wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.
Dla $a = 1$ otrzymujemy funkcję stałą.

ZADANIE 1

Wykonaj wykres funkcji $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i określ ich własności.

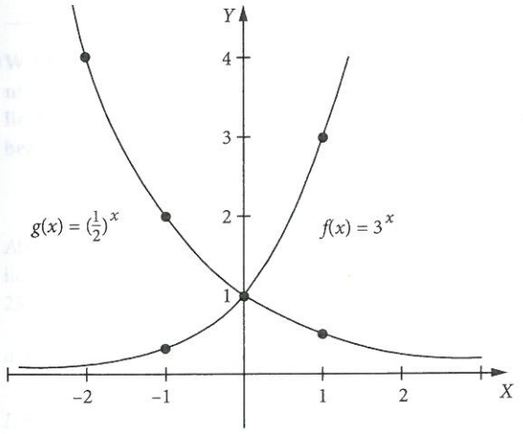
ROZWIĄZANIE

$f(x) = 3^x$

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	1	3

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$



Własności:
1) Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
2) Zbiór wartości: $y \in \mathbb{R}_+$ – funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie
3) Miejsca zerowe: brak
4) Punkt przecięcia z osią rzędnych: (0, 1)
5) Funkcja f jest rosnąca, a g malejąca. Funkcja wykładnicza jest malejąca, gdy podstawa $a \in (0, 1)$, a jest rosnąca, gdy $a \in (1, \infty)$.

ZADANIE 2

Podaj wzory funkcji $f(x) = 2^x$, w symetrii względem osi odciętych, rzędnych, początku układu oraz w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [3, -2]$, tj. o trzy jednostki w prawo i dwie w dół oraz o wektor $\vec{w} = [-2, 3]$, tj. o dwie w lewo i trzy w górę.

ROZWIĄZANIE

– oś OX: $g(x) = -f(x)$
$g(x) = -2^x$

– oś OY: $g(x) = f(-x)$
$g(x) = 2^{-x}$ lub $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- punkt (0, 0): $g(x) = -f(-x)$ $g(x) = -2^{-x}$
- trzy w prawo i dwa w dół: $g(x) = f(x - 3) - 2$ $g(x) = 2^{x-3} - 2$
- dwie w lewo i trzy w górę: $g(x) = f(x + 2) + 3$ $g(x) = 2^{x+2} + 3$

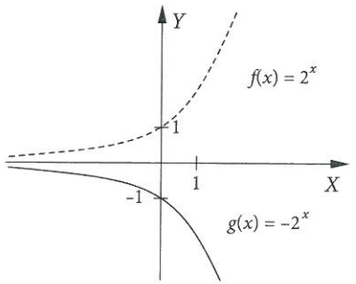
ZADANIE 3

Naszkicuj wykres funkcji o wzorze $f(x) = 2^x$, a następnie przekształć go w następujących przekształceniach:

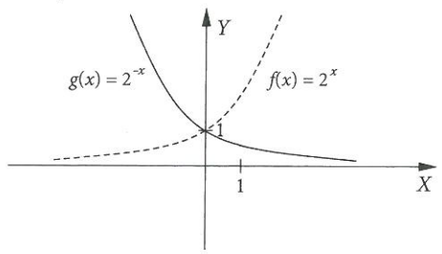
a) symetria względem osi OX
b) symetria względem osi OY
c) przesunięcie o dwie jednostki w prawo wzdłuż osi OX, tj. o wektor $\vec{u} = [2, 0]$
d) przesunięcie o dwie jednostki w dół wzdłuż osi OY, tj. o wektor $\vec{w} = [0, -2]$
Podaj wzory otrzymanych funkcji.

ROZWIĄZANIE

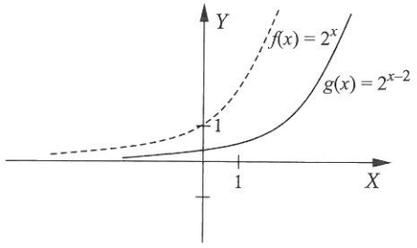
Ad a)



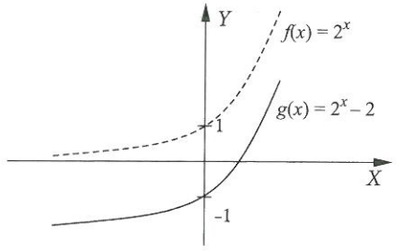
Ad b)



Ad c)



Ad d)



ZASTOSOWANIE FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Badając zjawiska zachodzące w przyrodzie lub społeczeństwie, szukamy prawidłowości, które można określić matematycznym wzorem. Badania pokazały, że część procesów w społeczeństwie oraz zjawisk w przyrodzie zmienia się wykładniczo, na przykład: wzrost liczby ludności, rozmnażanie bakterii czy rozpad pierwiastków promieniotwórczych.

Zmiana jest wykładnicza, gdy w każdej jednostce czasu jej wartość rośnie lub maleje tyle samo razy.

$f(t) = y_0 a^t$

y_0 – wartość początkowa obserwowanego zjawiska a – stała wielokrotność zmiany t – czas

ZADANIE 1

Badanie wzrostu liczby ludności w pewnym mieście w ciągu ostatnich kilkunastu lat pokazało, że wzrost jest wykładniczy. Określ funkcję opisującą wzrost liczby ludności, jeśli w ciągu ostatnich dwóch lat liczba ludności wzrosła od 100000 do 102010. Ilu mieszkańców może liczyć ta miejscowość za pięć lat?

ROZWIĄZANIE

$y_0 = 100000$ $t = 2$ $f(2) = 102010$ $a = ?$

$f(t) = y_0 a^t$

$f(2) = 100000a^2 = 102010$

$100000a^2 = 102010$

Aby podać wzór funkcji, musimy skorzystać z danych i obliczyć a – podstawę potęgi.

$a^2 = 1{,}0201$

$a = \sqrt{1{,}0201} = 1{,}01$

$f(t) = 100000 \cdot (1{,}01)^t$

Chcąc wskazać prognozę ilości mieszkańców za pięć lat, korzystamy ze wzoru wyznaczonej funkcji wykładniczej, zmieniając wartość początkową i przyjmując czas pięć lat.

Dane:

$y_0 = 102010$ $t = 5$

$a = 1{,}01$ $f(5) = ?$

$f(5) = 102010 \cdot (1{,}01)^5 = 102010 \cdot 1{,}05101 \approx \mathbf{107214}$

Odpowiedź: Za pięć lat liczba mieszkańców w mieście może wynosić 107214 osób.

ZADANIE 2

W 1950 r. w Polsce żyło 25,035 mln osób, a w 1952 r. liczba ta wzrosła do 25,999 mln. Oblicz średni roczny współczynnik przyrostu naturalnego ludności w latach 1950–1952 i oszacuj, jaka byłaby liczba mieszkańców Polski w 2000 r., gdyby współczynnik ten w następnych latach utrzymywał się bez zmian. Skomentuj wynik.

ROZWIĄZANIE

Aby określić liczbę ludności L_t po upływie okresu t lat, można posłużyć się wzorem $L_t = L_0 \cdot a^t$, gdzie L_0 jest liczbą ludności na początku tego okresu, natomiast a stałą opisującą roczny przyrost naturalny.

$25{,}999 = 25{,}035a^2$

$a = \sqrt{\frac{25{,}999}{25{,}035}} = \sqrt{1{,}0385\ldots} \approx 1{,}02$

Przyjmujemy 1950 r. za początek okresu. Znając liczbę ludności na początku okresu oraz po dwóch latach, możemy obliczyć współczynnik a.

$L(50) = 25{,}035 \cdot 1{,}02^{50} = 25{,}035 \cdot 2{,}69159 \approx 67{,}38$ mln

Obliczamy przybliżoną liczbę ludności w 2000 r. przy założeniu niezmiennego współczynnika przyrostu naturalnego. Rok 2000 to koniec 50-letniego okresu rozpoczętego po roku 1950.

Odpowiedź: Liczba ludności wynosiłaby ponad 67 mln. Ponieważ w rzeczywistości była o wiele niższa, rzeczywisty współczynnik rocznego przyrostu naturalnego w latach 1950–2000 był istotnie niższy niż w latach 1950–1952.

ZADANIE 3

Bakterie rozmnażają się przez podział. Z każdej komórki powstają dwie kolejne. Jeżeli w pewnym momencie jest jedna bakteria, to w wyniku kolejnych podziałów będzie ich 2^t, gdzie t oznacza krotność podziału. Ile bakterii powstanie w ciągu doby, jeżeli komórki rozmnażają się co 10 minut i nie giną?

ROZWIĄZANIE

$f(t) = 2^t$ — 60 minut : 10 minut = 6

$t = 24 \cdot 6 = 144$ — W ciągu doby rozmnażają się 144 razy.

$f(144) = \mathbf{2^{144}}$

Bakterie w ciągu godziny rozmnażają się sześć razy.

Odpowiedź: W ciągu doby powstanie 2^{144} bakterii.

ZADANIE 4

Liczne badania naukowe dowiodły, że pozostałą w organizmie, wyrażoną w miligramach masę leku po upływie czasu podanego w godzinach można obliczyć ze wzoru:

$\boldsymbol{m = ab^t}$ a i b – stałe m – masa leku [mg] t – czas [h]

Chory otrzymał sto miligramów silnego leku o przedłużonym działaniu, który po dwóch godzinach nerki usuwają z krwioobiegu tylko w dziesięciu procentach.

a) Oblicz, ile leku pozostanie w krwioobiegu po dwunastu godzinach?

b) Kiedy najpóźniej należy ponownie podać lek, by jego zawartość w organizmie wynosiła około trzydziestu miligramów?

c) Czy po dwóch dobach zawartość leku będzie mniejsza od dziesięciu miligramów?

ROZWIĄZANIE

$a \cdot b^t = m$

$a \cdot b^0 = 100$

$a \cdot 1 = 100$

$\boldsymbol{a = 100}$ Stała a ma wartość 100.

Obliczamy wartość stałych a i b, korzystając z podanych informacji. W momencie zażywania leku masa wynosi 100 mg, a czas ma wartość zero.

$10\% \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$ mg

100 mg – 10 mg = 90 mg

Obliczamy 10% z masy leku, różnicę oraz wartość stałej b.

dla $m = 90$ mg $t = 2$ h $a = 100$

$\boldsymbol{a \cdot b^t = m}$

$100 \cdot b^2 = 90$ $b^2 = 0{,}9$ $b = \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$

Otrzymujemy wzór:

$m = 100(0{,}95)^t$

Ad. a)

$t = 12$ h $m = ?$

$m = 100(0{,}95)^t$

$m = 100(0{,}95)^{12}$

$m \approx 100 \cdot 0{,}54$

$\boldsymbol{m = 54}$ mg

Obliczamy, jaka masa leku pozostanie po 12 godzinach.

Odpowiedź: Po upływie 12 godzin w krwioobiegu pozostaną 54 mg leku.

Ad. b)

$t = ?$ $m \approx 30$ mg

$100(0{,}95)^t = 30$

$(0{,}95)^t = 0{,}3$

$(0{,}95)^{23} \approx 0{,}31$ $(0{,}95)^{24} \approx 0{,}29$

Obliczamy czas, po którym w organizmie zostanie około 30 mg leku.

Odpowiedź: Po upływie doby zawartość leku będzie mniejsza od 30 mg.

Ad. c)

$100(0{,}95)^t < 10$

$(0{,}95)^t < 0{,}1$

$(0{,}95)^{44} \approx 0{,}1$ $(0{,}95)^{45} \approx 0{,}099$

Obliczmy, po ilu godzinach zawartość leku będzie mniejsza od 10 mg i czy nastąpi to przed upływem 48 godzin.

Odpowiedź: Po upływie 45 h zawartość leku będzie mniejsza od 10 mg, czyli po dwóch dobach na pewno będzie mniejsza.

ZADANIE 5

Chory przyjął 60 mg leku. Po czterech godzinach organizm usuwa 40% leku. Masę leku pozostałą po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$.

a) Wyznacz wartości stałych a oraz b. **b)** Ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 60 \\ a \cdot b^4 = 0{,}6 \cdot 60 \end{cases}$$

Niech t oznacza czas w godzinach. Dane zadania pozwalają napisać następujący układ równań.

Stąd $a = 60$ oraz $b^4 = 0{,}6 \cdot 60 = 36$, więc $b = \sqrt[4]{36} \approx 2{,}4$

Odpowiedź: $a = 60$, $b \approx 0{,}88$. $b^4 = 36$, $b = \sqrt[4]{36} \approx 2{,}4$.

Ad b)

$60 \cdot 0{,}88^{24} \approx 60 \cdot 0{,}0467 \approx 2{,}80$ mg

Do wzoru, w którym znamy już stałe a oraz b, podstawiamy $t = 24$.

Odpowiedź: Po upływie doby w organizmie chorego pozostanie około 2,80 mg leku.

ZADANIE 6

Pewna radioaktywna próbka ma masę 50 g, a jej rozpad powoduje zmniejszanie masy o 20% w ciągu każdego roku. Jaka będzie masa próbki po dwóch latach?

ROZWIĄZANIE

Po roku: $M_1 = 50 \cdot 0{,}8 = 40$ g

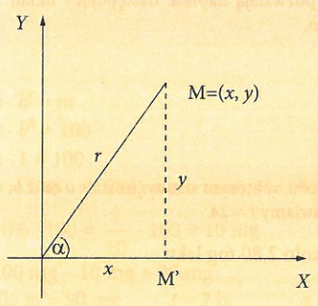
Po dwóch: $M_2 = 40 \cdot 0{,}8 = 32$ g

Odpowiedź: Masa próbki po dwóch latach będzie wynosić 32 g.

TRYGONOMETRIA

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.

Cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy danym kącie do długości przeciwprostokątnej.

Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

Cotangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości drugiej przyprostokątnej.

Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przydatne będą również zależności:

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

a także **twierdzenie Pitagorasa:**

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

ZADANIE 1

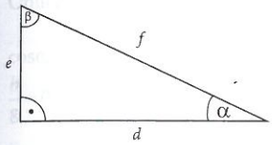
W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych *d* oraz *e* i przeciwprostokątnej *f* oblicz długość brakującego boku oraz wartości funkcji trygonometrycznych i miary kątów.

a) $d = 12$ cm $e = 24$ cm **b)** $d = 5$ cm $f = 15$ cm

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$d = 12$ cm $e = 24$ cm



Zawsze wykonujemy rysunek i staramy się, by był on zbieżny z danymi.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy *f*:

$$f^2 = d^2 + e^2 = 12^2 + 24^2 = 144 + 576 = 720$$

$$f = \sqrt{720} = \sqrt{36 \cdot 20} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{20} = 6\sqrt{4 \cdot 5} = 6 \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \text{ cm}$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych.

$$\sin\alpha = \frac{d}{f} = \frac{12}{12\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{e}{f} = \frac{24}{12\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{e} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{e}{d} = \frac{24}{12} = 2$$

Obliczamy $\sin\beta$ i $\cos\beta$.

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{e}{d} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{d}{e} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Wartości $\sin\beta$ i $\cos\beta$ można obliczyć, korzystając z zależności: $\sin\beta = \cos\alpha$ i $\cos\beta = \sin\alpha$.

Obliczamy miarę kąta.

Aby wyznaczyć miarę kąta, trzeba skorzystać z tablic funkcji trygonometrycznych. W tablicach wszystkie wartości funkcji są zapisane w ułamku dziesiętnym z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. W taki sam sposób trzeba zapisać każdą otrzymaną wartość funkcji.

Wybieramy jedną z funkcji, na przykład tangens.

$\text{tg}\beta = 2$ $\text{tg}\beta = 2{,}0000$ – szukamy wartości kąta w tablicach.

Jeżeli nie ma takiej wartości, to wybieramy te, które są najbliższe danej liczby.

$\text{tg}\,63° = 1{,}9626$ $\text{tg}\,64° = 2{,}0503$

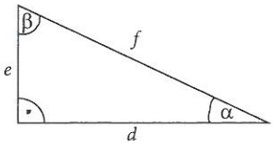
Wybieramy ten kąt, którego wartość tangensa jest bliższa liczby 2.

Dla 64° wartość tangensa jest o 0,0503 za duża (2,0503 – 2,0000 = 0,0503), a dla 63° o 0,0374 za mała (2.0000 – 1,9626 = 0,0374). Wybieramy mniejszą różnicę, czyli kąt β ma w przybliżeniu wartość 63°.

$\beta = 63°$ $\alpha = 90° - \beta = 90° - 63° = 27°$

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość $12\sqrt{5}$ cm, kąty ostre mają miarę 63° i 27°, a wartości funkcji trygonometrycznych wynoszą: $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ i $\text{tg}\beta = 2$.

Ad b) $d = 5$ cm $f = 15$ cm



Obliczamy e.

$e^2 + d^2 = f^2$

$e^2 + 5^2 = 15^2$ $e^2 + 25 = 225$

$e^2 = 225 - 25$ $e^2 = 200$

$e = \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych.

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{e}{f} = \frac{10\sqrt{2}}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{d}{f} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{tg}\alpha = \frac{e}{d} = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{d}{e} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Obliczamy miarę kątów.

$\cos\alpha = \frac{1}{3} = 0{,}3333$

$\cos 71° = 0{,}3256$ $\cos 70° = 0{,}3420$

$0{,}3333 - 0{,}3256 = 0{,}0077$ $0{,}3420 - 0{,}3333 = 0{,}0087$

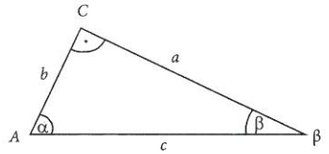
$\alpha = 71°$ $\beta = 90° - 71° = 19°$

Odpowiedź: Przyprostokątna ma długość $10\sqrt{2}$ cm, kąty ostre mają miary 71° i 19°, a wartości funkcji wynoszą: $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{1}{3}$, $\text{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ i $\text{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

ZADANIE 2

Wyznacz długości boków i kąty w trójkącie prostokątnym:

a) $a = 3$ cm, $\beta = 28°$ **b)** $c = 8$ cm, $\alpha = 68°$



ROZWIĄZANIE

Ad a) $a = 3$ cm, $\beta = 28°$

$\alpha = 90° - \beta = 90° - 28° = \mathbf{62°}$

Obliczamy przeciwprostokątną c z cosinusa kąta.

$\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\cos 28° = \frac{3}{c}$ $\cos 28° = 0{,}8829$

$\frac{3}{c} = \frac{0{,}8829}{1}$

$0{,}8829c = 3$ $/:0{,}8829$ $\mathbf{c \approx 3{,}4}$ **cm**

Obliczamy przyprostokątną b z tangensa kąta.

$\text{tg}\beta = \frac{b}{a}$ $\text{tg}\,28° = \frac{b}{3}$ $\text{tg}\,28° = 0{,}5317$

$\frac{b}{3} = \frac{0{,}5317}{1}$

$b = 0{,}5317 \cdot 3$ $\boldsymbol{b \approx 1{,}6}$ **cm**

Odpowiedź: Kąt ma miarę 62°, a boki długość 3,4 cm i 1,6 cm.

Ad b) $c = 8$ cm $\alpha = 68°$

Obliczamy miarę kąta β.

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 68° = \mathbf{22°}$

Obliczamy przyprostokątną α z sinusa kąta.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin 68° = \frac{a}{8}$ $\sin 68° = 0{,}9272$

$\frac{a}{8} = 0{,}9272$ $/\cdot 8$ $\boldsymbol{a = 7{,}4126 \approx 7{,}4}$ **cm**

Obliczamy przyprostokątną b z cosinusa kąta.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos 68^0 = \frac{b}{8}$ $\cos 68° = 0{,}3746$

$\frac{b}{8} = 0{,}3746$ $/\cdot 8$

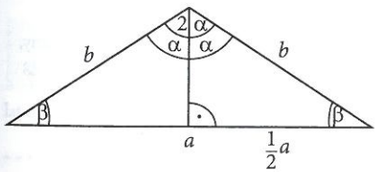
$b = 0{,}3746 \cdot 8$ $\boldsymbol{b \approx 2{,}9968 = 3}$ **cm**

Odpowiedź: Kąt ma miarę 22°, a boki mają długość 7,4 cm oraz 3 cm.

ZADANIE 3

Znajdź brakujące długości boków i brakujące miary kątów trójkąta równoramiennego, mając dane: ramię 10 cm i kąt między ramionami 148°.

ROZWIĄZANIE



Wysokość dzieli kąt między ramionami na dwa kąty o tej samej mierze, dlatego kąt między ramionami oznaczamy 2α.

Dane: Obliczyć:

$2\alpha = 140°$ a, β

$b = 10$ cm

Obliczamy miary kątów: $2\alpha = 148°$ $\alpha = 74°$ $\beta = 90° - \alpha = 90° - 74° = \mathbf{16°}$

Obliczamy podstawę a z sinusa kąta.

$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{b}$ $\sin 74° = \frac{\frac{1}{2}a}{10}$ $\sin 74° = 0{,}9613$

$\frac{\frac{1}{2}a}{10} = 0{,}9613 \quad /\cdot 10$ $\frac{1}{2}a = 9{,}613 \quad /\cdot 2$ $a = 19{,}226 \approx 19{,}2$ cm

Odpowiedź: Kąty między ramieniem i podstawą mają miarę 16°, a podstawa ma długość 19,2 cm.

ZADANIE 4

Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{-2\sin 60° \cdot \cos^2 30°}{\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 60°}}$

ROZWIĄZANIE

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, $\frac{1}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Najpierw obliczamy wartości poszczególnych funkcji trygonometrycznych dla wskazanych kątów i podstawiamy je do wyrażenia:

$$\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{3}} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

ZADANIE 5

W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i wysokości jest równa 5 cm. Kąt przy podstawie ma miarę 60°. Oblicz pole tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

Dane:
Sporządzamy rysunek i wprowadzamy niezbędne oznaczenia.
$l + h = 5$ cm
Szukane:
Pole trójkąta ABC.

$\sin\alpha = \sin 60° = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

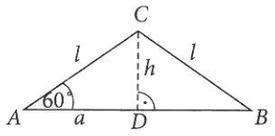
Korzystamy z faktu, że trójkąt ADC jest prostokątny, i znajdujemy funkcję trygonometryczną kąta α.

$l + h = 5$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} l+h=5 \\ \frac{h}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

z którego wyliczamy długości wysokości i ramienia.



$$\begin{cases} l+h=5 \\ \frac{h}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{więc} \quad l = 5-h$$

$\frac{h}{5-h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $2h = \sqrt{3}\cdot(5-h)$ $2h = 5\sqrt{3} - h\cdot\sqrt{3}$

$2h + h\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})\cdot h = 5\sqrt{3}$

$h = \frac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ $h = \frac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{-15+10\sqrt{3}}{4-3} = -15+10\sqrt{3}$

$l = 5-(-15+10\sqrt{3}) = 5+15-10\sqrt{3} = 20-10\sqrt{3}$

$a^2 + h^2 = l^2$

$a^2 = l^2 - h^2 = (20-10\sqrt{3})^2 - (-15+10\sqrt{3})^2 = 400 - 400\sqrt{3} + 300 - 225 + 300\sqrt{3} - 300 = 175 - 100\sqrt{3}$

$a = \sqrt{175-100\sqrt{3}} = 5\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 5\sqrt{4+3-4\sqrt{3}} = 5\sqrt{4-4\sqrt{3}+3} =$

$= 5\sqrt{2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 5\cdot|2-\sqrt{3}| = 5(2-\sqrt{3})$

Warto sprawdzić, czy wyrażenie podpierwiastkowe nie jest kwadratem sumy lub różnicy: jeżeli jest, to uprościmy wyrażenie.

Teraz, mając długość podstawy i wysokość trójkąta, obliczamy jego pole.

$P = \frac{2\cdot 5\cdot(2-\sqrt{3})\cdot(-15+10\sqrt{3})}{2} = 5\cdot(2-\sqrt{3})\cdot(-15+10\sqrt{3}) = 5(-30+20\sqrt{3}+15\sqrt{3}-30) =$

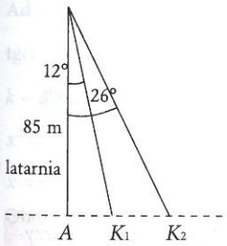
$= 5(35\sqrt{3}-60) = 25(7\sqrt{3}-12)$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi: $25(7\sqrt{3}-12)$ cm^2.

ZADANIE 6

Ze szczytu latarni morskiej wysokości 85 m widać dwa kutry rybackie pod kątami depresji odpowiednio 12° oraz 26°. Jaka jest odległość między tymi kutrami, jeśli podstawa latarni i kutry wyznaczają jedną prostą?

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$\operatorname{tg} 12° = \frac{AK_1}{85}$, $AK_1 = 85\cdot\operatorname{tg} 12° \approx 85\cdot 0{,}2126 \approx 18{,}1$ m

$\operatorname{tg} 26° = \frac{AK_2}{85}$, $AK_2 = 85\cdot\operatorname{tg} 26° \approx 85\cdot 0{,}4877 \approx 41{,}5$ m

Szukana odległość jest różnicą odległości każdego z kutrów od podstawy latarni. Odległości te obliczamy za pomocą funkcji tangens.

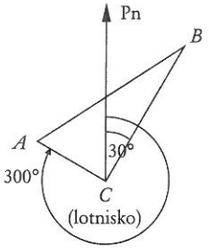
$x = AK_2 - AK_1 = 41{,}5 - 18{,}1 = 23{,}4$ m

Odpowiedź: Odległość między kutrami wynosi około 23,4 metra.

ZADANIE 7

Z lotniska wylatują jednocześnie dwa samoloty. Jeden z prędkością 200 km/h leci w kierunku 300° mierzonym od kierunku północnego zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a drugi z prędkością 240 km/h w kierunku 30° mierzonym tak samo. W czasie lotu oba samoloty są w stałej łączności radiowej o zasięgu 1200 km. po jakim czasie samoloty te stracą ze sobą łączność radiową?

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Zauważamy, że tory samolotów tworzą kąt prosty. Zatem ich odległość jest w dowolnej chwili równa długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego utworzonego przez położenie lotniska i położenia obydwóch samolotów w danej chwili (patrz rysunek).

$AC = 200t \qquad BC = 240t$

Obliczamy (w km) drogę pokonaną przez obydwa samoloty w czasie t (w godzinach).

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{200^2t^2 + 240^2t^2} =$$

$$= \sqrt{[(40\cdot 5)^2 + (40\cdot 6)^2]t^2} = \sqrt{(40t)^2(5^2+6^2)} =$$

$$= 40t\sqrt{61}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć odległość samolotów po czasie t od chwili startu.

$$40t\sqrt{61} = 1200$$

$$t = \frac{1200}{40\sqrt{61}} = \frac{30}{\sqrt{61}} = \frac{30\sqrt{61}}{61} \approx 3{,}84\text{ h}$$

Pytamy, po jakim czasie t odległość samolotów będzie równa 1200 km.

$$\frac{x}{60} = \frac{84}{100} \quad \text{więc} \quad x = \frac{84\cdot 60}{100} = \frac{504}{10} = 50{,}4 \approx 50 \text{ minut}$$

Obliczyliśmy czas w godzinach. Część ułamkową możemy zamienić na minuty.

Odpowiedź: Samoloty stracą łączność po około 3 godzinach i 50 minutach.

WYZNACZANIE BRAKUJĄCYCH FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA KĄTA OSTREGO

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Obliczyć brakujące funkcje trygonometryczne kata ostrego w trójkącie prostokątnym można, korzystając ze wzorów:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – jedynka trygonometryczna

$$\mathbf{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \mathbf{tg\alpha\ ctg\alpha = 1}$$

Można również wykonać pomocniczy rysunek trójkąta prostokątnego, oznaczyć odpowiednio boki, obliczyć długość brakującego boku z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczyć wskazane funkcje.

ZADANIE 1

Wyznacz brakujące funkcje trygonometryczne kąta ostrego α, gdy:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ **b)** $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 3$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $\sin\alpha = \frac{2}{3} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

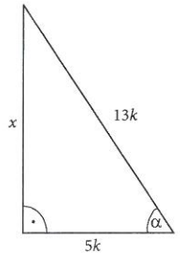
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Odpowiedź: Brakujące funkcje mają wartość: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ad b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

Rysujemy trójkąt i obliczamy bok x z twierdzenia Pitagorasa.

k – dowolna liczba całkowita dodatnia



$$x^2 + (5k)^2 = (13k)^2$$

$$x^2 + 25k^2 = 169k^2$$

$$x^2 = 169k^2 - 25k^2$$

$$x^2 = 144k^2$$

$$x = \sqrt{144k^2}$$

$$x = 12k$$

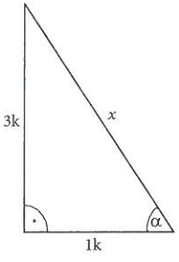
$$\sin\alpha = \frac{x}{13k} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{5k} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

Odpowiedź: Brakujące funkcje mają wartość: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Ad c) $\operatorname{tg}\alpha = 3$

$$\operatorname{tg}\alpha = 3 = \frac{3}{1}$$

k – dowolna liczba całkowita dodatnia



$$x^2 = (3k)^2 + (1k)^2 = 9k^2 + k^2 = 10k^2$$

$$x = \sqrt{10k^2} = k\sqrt{10}$$

Obliczamy sinus i cosinus kąta.

$$\sin\alpha = \frac{3k}{x} = \frac{3k}{k\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{1k}{x} = \frac{1k}{k\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{tg}\alpha = 1 \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Odpowiedź: Brakujące funkcje mają wartość: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

ZADANIE 2

Sprawdź, czy istnieje taki kąt ostry α, że:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ **b)** $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha=2$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Korzystamy ze wzoru jedynkowego: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$L=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1 \qquad P=1 \qquad L=P$$

Odpowiedź: Kąt α istnieje.

Ad b)

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha=2$

Obliczamy cosinus kąta ze wzoru jedynkowego.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1$

$\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{9}{9}-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Obliczamy cosinus z tangensa kąta.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $/\cdot\cos\alpha$

$2\cos\alpha=\sin\alpha$ $/:2$

$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{2}$

$\cos\alpha=\frac{1}{3}:2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Odpowiedź: Cosinusy kątów mają różne wartości, taki kąt nie istnieje.

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

W rozwiązaniu zadania korzystamy ze wzorów: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz działań na wyrażeniach algebraicznych, w tym ze wzorów skróconego mnożenia.

ZADANIE 1

Wykaż, że podane równości są prawdziwe:

a) $(1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\cos\alpha$ **b)** $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$ **c)** $1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$L=(1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=(1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=1\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-1\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha \qquad P=\cos\alpha \qquad L=P$$

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa.

Ad b) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$

$$L=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}+\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}$$

W liczniku wyrażenie pierwsze i ostatnie to wzór jedynkowy.

$$L=\frac{\sin^2\alpha+1+\cos\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha} \qquad P=\frac{2}{\sin\alpha} \qquad L=P$$

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa.

Ad c) $1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Przekształcamy prawą stronę.

$$P=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{1}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{1}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

W liczniku i w mianowniku sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika i wykonujemy odejmowanie i dodawanie, zapisując je na wspólnej kresce ułamkowej.

$$=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

Licznik ułamka mnożymy przez odwrotność mianownika i stosujemy wzór jedynkowy.

$$P=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

W miejsce $\cos^2\alpha$ wstawiamy przekształcony wzór jedynkowy: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

$P=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ $L=1-2\sin^2\alpha$ $L=P$

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa.

ZADANIE 2

Sprawdź tożsamość.

a) $(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1$;

b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{tg\alpha}\right)=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$L=1+\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=$ — Wykonujemy zaznaczone działania po lewej stronie równości.

$=1+\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$ — Sprowadzamy wyrażenie do wspólnego mianownika i korzystamy z „jedynki trygonometrycznej".

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\frac{1-\sin^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

$P=1$ $L=P$ — Tożsamość jest prawdziwa.

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa.

Ad b)

$L=\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=$ — Wykonujemy działania po lewej stronie równości.

$=\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$

$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=$

$=\frac{\sin^3\alpha+\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$

$=\frac{\sin\alpha\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos\alpha\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$ — Wyłączamy wspólny czynnik i korzystamy z wzoru jedynkowego.

$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$

$=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$

$P=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$ $L=P$ — Tożsamość jest prawdziwa.

Odpowiedź: Równość jest prawdziwa.

RÓWNANIA TRYGONOMETRYCZNE

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równania trygonometryczne rozwiązujemy tylko dla kąta ostrego, korzystając z wartości funkcji trygonometrycznych w tabeli wartości funkcji.

ZADANIE 1

Określ, dla jakiej wartości x kąt jest ostry, i rozwiąż równanie:

a) $\sin x=\frac{5}{8}$ **b)** $\operatorname{tg}3x=1$ **c)** $\cos(x-25°)=0{,}48$ **d)** $\operatorname{tg}(2x-10°)=\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $\sin x=\frac{5}{8}$ $x\in(0°;90°)$ — Zapisujemy prawą stronę równania za pomocą ułamka dziesiętnego z dokładnością 0,0001.

$\sin x=0{,}6250$

Szukamy w tablicach najbliższej wartości:

$\sin 38°=0{,}6157$ $\sin 39°=0{,}6293$ – bliższa wartość $\sin x\approx\sin 39°$ $\boldsymbol{x=39°}$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest kąt 39°.

Ad. c) $\operatorname{tg}3x=1$

$3x>0°$ /:3 i $3x<90°$ /: 3 — Określamy, jaką wartość może przyjąć x, by kąt był ostry.

$x>0°$ $x<30°$

$x\in(0°;30°)$

$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}45°$ $3x=45°$ /:3 $\boldsymbol{x=15°}$ — Rozwiązujemy równanie.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest kąt 15°.

Ad c) $\cos(x-25°)=0{,}48$

$x-25°>0°$ $x-25<90°$ — Określamy, do jakiego przedziału musi należeć x, by kąt był ostry.

$x>25°$ $x<115°$

$x\in(25°;115°)$

Rozwiązujemy równanie: $\cos(x-25°)=0{,}4800$

$\cos 61°=0{,}4848$ $\cos(x-25°)\approx\cos 61°$ $x-25°=61°$ $x=61°+25°=86°$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest kąt 86°.

Ad d) $\operatorname{tg}(2x-10°)=\sqrt{3}$

$2x-10°>0°$ i $2x-10°<90°$

$2x>10°$ /:2 $2x<100°$ /:2

$x>5°$ $x<50°$ $x\in(5°;50°)$

$\operatorname{tg}(2x-10°)=\operatorname{tg}60°$ $2x-10°=60°$ — Rozwiązujemy równanie.

$2x=70°$ /:2 $\boldsymbol{x=35°}$

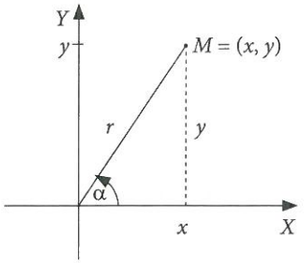
Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest kąt 35°.

WARTOŚCI TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW Z PRZEDZIAŁU (0°, 180°⟩

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych odczytujemy z tablic. Gdy kąt jest rozwartokątny, możemy skorzystać z układu współrzędnych i definicji pokazanych we wzorach maturalnych.

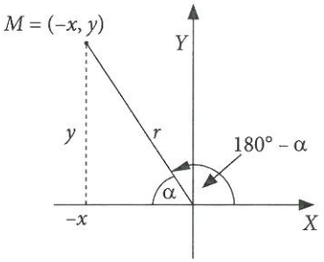
kąt ostry – I ćwiartka



$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

kąt rozwarty – II ćwiartka



$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y}{r}=\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}=-\cos\alpha$$

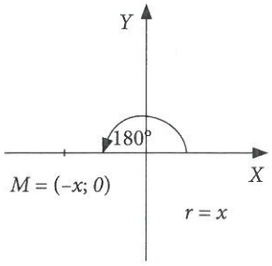
$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{-x}{y}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

Czyli ostatecznie dla kąta rozwartego, należącego do przedziału (90°; 180°):

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 180°.



$$\sin180^\circ=\frac{y}{r}=\frac{0}{r}=0 \qquad \sin180^\circ=0$$

$$\cos180^\circ=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{x}=-1 \qquad \cos180^\circ=-1$$

$$\operatorname{tg}180^\circ=\frac{y}{-x}=0 \qquad \operatorname{tg}180^\circ=0$$

$$\operatorname{ctg}180^\circ=\frac{-x}{y}=0 \qquad \text{nie istnieje}$$

ZADANIE 1

Oblicz, odczytaj wartość funkcji trygonometrycznych dla kątów: 100°; 120°; 135°; 150°; 162°.

ROZWIĄZANIE

$\sin100^\circ=\sin(180^\circ-80^\circ)=\sin80^\circ=0{,}9848$

$\cos100^\circ=\cos(180^\circ-80^\circ)=-\cos80^\circ=-0{,}1736$

$\operatorname{tg}100^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-80^\circ)=-\operatorname{tg}80^\circ=-5{,}6713$

$$\sin120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$\operatorname{tg}120^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-60^\circ)=-\operatorname{tg}60^\circ=-\sqrt{3}$

$$\sin135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\operatorname{tg}135^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-45^\circ)=-\operatorname{tg}45^\circ=-1$

$$\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}150^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-30^\circ)=-\operatorname{tg}30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\sin162^\circ=\sin(180^\circ-18^\circ)=\sin18^\circ=0{,}3090$

$\cos162^\circ=\cos(180^\circ-18^\circ)=-\cos18^\circ=-0{,}9511$

$\operatorname{tg}162^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-18^\circ)=-\operatorname{tg}18^\circ=-0{,}3249$

CIĄGI LICZBOWE

POJĘCIE CIĄGU, PRZYKŁADY I OBLICZANIE WYRAZÓW CIĄGU

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Ciąg liczbowy – ciąg, którego wyrazami są liczby.
Ciąg o wyrazach $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ zapisujemy (a_n), gdzie n oznacza numer wyrazu.

ZADANIE 1

Oblicz trzy początkowe wyrazy ciągu danego wzorem: a) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$ b) $b_n = (-1)^{n+1}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_1 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = 2\frac{1}{2}$ $\quad a_2 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + 3 = -1 + 3 = 2$

$a_3 = -\frac{1}{2}\cdot 3 + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = -1\frac{1}{2} + 3 = 1\frac{1}{2}$

Odpowiedź: Otrzymaliśmy trzy pierwsze wyrazy ciągu (a_n).

Ad b)

$b_1 = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$ $\quad b_2 = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$

$b_3 = (-1)^{3+1} = (-1)^4 = 1$

Odpowiedź: Otrzymaliśmy trzy pierwsze wyrazy ciągu (b_n).

ZADANIE 2

Oblicz wyraz a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n}, gdy: a) $a_n = -2n + 3$ b) $a_n = \frac{3n-1}{2n}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $a_n = -2n + 3$

$a_{n-1} = -2(n-1) + 3 = -2n - 2 + 3 = \mathbf{-2n + 5}$

$a_{n+1} = -2(n+1) + 3 = -2n - 2 + 3 = \mathbf{-2n + 1}$

$a_{2n} = -2 \cdot 2n + 3 = \mathbf{-4n + 3}$

Odpowiedź: Wyraz $a_{n-1} = -2n + 5$, $a_{n+1} = -2n + 1$ oraz $a_{2n} = -4n + 3$.

Ad b) $a_n = \frac{3n-1}{2n}$

$a_{n-1} = \frac{3(n-1)-1}{2(n-1)} = \frac{3n-3-1}{2n-2} = \frac{3n-4}{2n-2}$ $\quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{3n+3-1}{2n+2} = \frac{3n+2}{2n+2}$

$a_{2n} = \frac{3\cdot 2n-1}{2\cdot 2n} = \frac{6n-1}{4n}$

Odpowiedź: Wyraz $a_{n-1} = \frac{3n-4}{2n-2}$, $a_{n+1} = \frac{3n+2}{2n+2}$ oraz $a_{2n} = \frac{6n-1}{4n}$

ZADANIE 3

Podaj wzór ogólny ciągu:

a) kolejnych liczb nieparzystych,

b) którego wyrazy są odwrotnościami kwadratów liczb naturalnych n powiększonymi o 1,

c) którego kolejne wyrazy są równe odpowiednio: 2, 9, 28, 65… .

ROZWIĄZANIE

Ad a) $a_n = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ (lub, np., $a_n = 2n - 1$). **Ad b)** $b_n = \frac{1}{n^2} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ad c) $c_n = n^3 + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

ZADANIE 4

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{n+15}{n}$, $n \neq 0$. $\quad a_n = 1 + \frac{15}{n}$

a) Wyznacz szósty wyraz ciągu a_n. **b)** Sprawdź, czy istnieje wyraz równy 16.

c) Ile jest wyrazów większych niż 7? **d)** Znajdź dwa kolejne wyrazy, których różnica jest równa 0.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_6 = \frac{6+15}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Aby wyznaczyć wskazany wyraz, należy we wzorze ogólnym w miejsce n podstawić 6:

Odpowiedź: $a_6 = \frac{7}{2}$.

Ad b)

$\frac{n+15}{n}=16 \quad | \cdot n \qquad n+15=16n$ — Szukamy takiej liczby n, dla której $a_n = 16$.

$15n=15 \qquad n=1$

Odpowiedź: Tak, $a_1 = 16$.

Ad c)

$\frac{n+15}{n}>7 \quad | \cdot n$ (można mnożyć, n jest liczbą dodatnią) — Szukamy takich liczb n, dla których $a_n > 7$.

$n+15>7n$

$-6n>-15 \qquad 6n<15$

$n<\frac{15}{6} \qquad n<2\frac{1}{2}$

$n\in\{1, 2\}$

Odpowiedź: Dwa wyrazy ciągu są większe od 7.

Ad d)

$a_n=\frac{n+15}{n} \qquad a_{n+1}=\frac{n+16}{n+1}$ — Dla dowolnej liczby naturalnej n tworzymy dwa kolejne wyrazy; wzór na a_n już mamy:

$a_{n+1} - a_n = 0$, czyli $a_n = a_{n+1}$

$\frac{n+15}{n}=\frac{n+16}{n+1}$

$(n+15)(n+1)=n^2+16n \qquad n^2+16n+15=n^2+16n \qquad 15=0$

Odpowiedź: Nie istnieją takie dwa kolejne wyrazy, których różnica jest równa 0.

ZADANIE 5

Znajdź te wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{n^2+12n+8}{n}$, które są liczbami naturalnymi, $n \neq 0$.

ROZWIĄZANIE

$a_n=\frac{n^2}{n}+\frac{12n}{n}+\frac{8}{n}=n+12+\frac{8}{n}$

Przekształcamy wzór na wyraz ogólny danego ciągu tak, aby można było dostrzec liczby naturalne. Pierwsze dwa człony są zawsze liczbami naturalnymi, natomiast ostatni jest liczbą naturalną wtedy i tylko wtedy, gdy n jest dzielnikiem 8, czyli $n\in\{1, 2, 4, 8\}$.

Odpowiedź: Liczbami naturalnymi są wyrazy o numerach $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

ZADANIE 6

Naszkicuj wykres ciągu, którego wyraz ogólny dany jest wzorem $c_n = n^2 - 2n + 1$, $1 \le n \le 5$.

ROZWIĄZANIE

$n = 1 \qquad c_1 = 1 - 2 + 1 = 0$

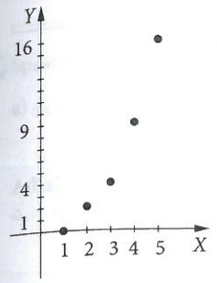
$n = 2 \qquad c_2 = 4 - 4 + 1 = 1$

$n = 3 \qquad c_3 = 9 - 6 + 1 = 4$

$n = 4 \qquad c_4 = 16 - 8 + 1 = 9$

$n = 5 \qquad c_5 = 25 - 10 + 1 = 16$

Możemy też zauważyć, że $c_n = (n - 1)^2$, co uprości rachunki.

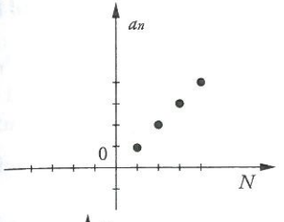


Należy pamiętać, że wykres ciągu nie jest linią ciągłą.

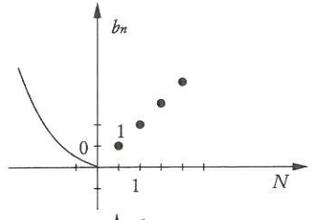
ZADANIE 7

Który z poniższych wykresów jest wykresem ciągu?

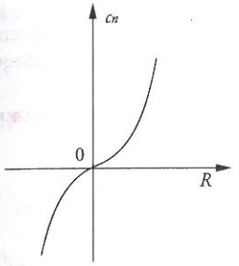
a)



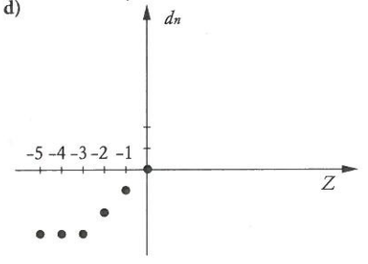
b)



c)



d)



Odpowiedź: Tylko a).

ZADANIE 8

Oblicz, ile dodatnich wyrazów ma ciąg, gdy $a_n = -n^2 + 9n - 14$.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli wyrazy mają być dodatnie, to $a_n > 0$.

$-n^2 + 9n - 14 > 0 \quad /\cdot(-1)$

$n^2 - 9n + 14 < 0 \qquad a = 1, b = -9, c = 14$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1=\frac{9-5}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2 \qquad n_2=\frac{9+5}{2\cdot 1}=\frac{14}{2}=7$

n jest liczbą naturalną dodatnią i należy do przedziału $(2; 7)$,

$n\in\{3, 4, 5, 6\}$ – wyrazy o tych numerach są dodatnie.

Odpowiedź: Ciąg ma 4 dodatnie wyrazy.

ZADANIE 9

Które wyrazy ciągu $a_n = -(n+2)(4-n)$ są ujemne?

ROZWIĄZANIE

$a_n < 0$

$-(n+2)(4-n) < 0 \quad /:(-1)$

$(n+2)(-n+4) > 0$

$(n+2)(n-4) < 0$

$n+2=0$ lub $n-4=0$

$n=-2 \quad n=4$

$-(n+2)(n-4) > 0 \quad /:(-1)$

n jest liczbą naturalną dodatnią $n \in \{1, 2, 3\}$

Odpowiedź: Ujemny jest wyraz pierwszy, drugi i trzeci.

CIĄG ARYTMETYCZNY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Ciąg arytmetyczny – co najmniej trzywyrazowy ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, którą nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.
Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym **różnica między dowolnym wyrazem ciągu a wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym jest stała** i wynosi r.

Ogólny wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r wyraża się wzorem:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

Sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego obliczamy ze wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Jeżeli do wzoru na sumę wstawimy w miejsce a_n wzór na wyraz ogólny, to otrzymamy postać wzoru, z którego obliczymy sumę, znając a_1 i r, bez konieczności obliczania a_n.

$$S_n = \frac{a_1 + [a_1 + (n-1)r]}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Różnicę ciągu arytmetycznego obliczamy, odejmując od wyrazu następnego wyraz poprzedni:

$$r = a_{n+1} - a_n$$

ZADANIE 1

Sprawdź, czy ciąg dany wzorem jest arytmetyczny.

a) $a_n = -2n + 3$ **b)** $b_n = n^2 - 3n$ **c)** $c_n = \frac{3n+2}{n-1}$ $(n \neq 1)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_{n+1} = -2(n+1) + 3 = -2n - 2 + 3 = -2n + 1.$

Korzystamy z definicji ciągu arytmetycznego, dlatego tworzymy różnicę:

$r = a_{n+1} - a_n = -2n + 1 - (-2n + 3) = -2n + 1 + 2n - 3 = -2.$

Różnica jest stała.

Odpowiedź: Tak, dany ciąg jest arytmetyczny.

Ad b)

$b_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 =$
$= n^2 - n - 2.$

Korzystamy z definicji ciągu arytmetycznego, dlatego tworzymy różnicę:

$r = b_{n+1} - b_n = n^2 - n - 2 - (n^2 - 3n) = n^2 - n - 2 - n^2 + 3n =$
$= 2n - 2$

Różnica nie jest stałą liczbą (zmienia się, gdy n się zmienia).

Odpowiedź: Nie, dany ciąg nie jest arytmetyczny.

Ad c)

Postępujemy analogicznie, jak w zadaniach 1 i 2.

$$c_{n+1} = \frac{3n+5}{n}$$

$$r = c_{n+1} - c_n = \frac{3n+5}{n} - \frac{3n+2}{n-1} = \frac{(3n+5)(n-1)}{n(n-1)} - \frac{(3n+2)n}{n(n-1)} = \frac{3n^2 - 3n + 5n - 5 - (3n^2 + 2n)}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{3n^2 + 2n - 5 - 3n^2 - 2n}{n(n-1)} = \frac{-5}{n(n-1)}$$

Odpowiedź: Dane liczby nie tworzą ciągu arytmetycznego.

ZADANIE 2

Sprawdź, czy dane liczby w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny:

$$x = \sqrt{3} - 1, \quad y = \sqrt{3}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

ROZWIĄZANIE

Należy sprawdzić, czy różnica jest taka sama, czyli $y - x = z - y$.

$$L = y - x = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = 1$$

$$P = z - y = \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = \frac{1 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = \frac{1 - 3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(-2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} + 2 - 3 + \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

$L \neq P$

Odpowiedź: Nie, dany ciąg nie jest arytmetyczny.

ZADANIE 3

Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_3 = 15$ i $a_{11} = -17$. Wyznacz ten ciąg i podaj wzór na jego wyraz ogólny.

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 15 \\ a_1 + 10r = -17 \end{cases}$$

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 = 15 - 2r \\ a_1 + 10r = -17 \end{cases}$$

$15 - 2r + 10r = -17$

$8r = -32 \quad r = -4 \quad a_1 = 15 + 8 = 23$

Po wyliczeniu pierwszego wyrazu i różnicy tworzymy ogólny wyraz ciągu.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-4) = 23 - 4n + 4 = -4n + 27$

Odpowiedź: $a_1 = 23$, $r = -4$, $a_n = -4n + 27$.

ZADANIE 4

Ciąg a_n jest określony wzorem $a_n = -2n + 5$.

a) Udowodnij, że ciąg a_n jest arytmetyczny.

b) Suma ilu początkowych wyrazów ciągu a_n jest równa -140?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_{n+1} = -2(n+1) + 5 = -2n + 3$

$r = a_{n+1} - a_n = -2n + 3 - (-2n + 5) =$

$= -2n + 3 + 2n - 5 = -2$

Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy zbadać różnicę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: Różnica jest wielkością stałą, dlatego ciąg ten jest arytmetyczny.

Ad b)

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

Stosujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu.

$-140 = \frac{3 - 2n + 5}{2} \cdot n \quad / \cdot 2 \qquad -280 = (8 - 2n) \cdot n$

$-280 = 8n - 2n^2$

Przekształcamy ostatnie równanie.

$2n^2 - 8n - 280 = 0 \quad / : 2 \qquad n^2 - 4n - 140 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-140) = 16 + 560 = 576 \quad \sqrt{\Delta} = 24$

$n_1 = \frac{4 - 24}{2} = \frac{-20}{2} = -10, \quad n_2 = \frac{4 + 24}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe i odrzucamy pierwiastek ujemny.

Odpowiedź: Suma 14 początkowych wyrazów jest równa -140.

ZADANIE 5

Wyznacz ciąg arytmetyczny, wiedząc, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem $S_n = -n^2 + 2n$.

ROZWIĄZANIE

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$S_1 = a_1 \qquad S_1 = -1^2 + 2 = 1$

Najpierw wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu, korzystając z zależności.

$a_1 = 1$

$S_2 = -2^2 + 2 \cdot 2 = 0$

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + r = 2a_1 + r$

Aby wyznaczyć różnicę ciągu, wystarczy znaleźć wartość sumy dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

$0 = 2 + r \qquad r = -2$

Odpowiedź: Jest to ciąg arytmatyczny, w którym pierwszy wyraz wynosi 1, a różnica -2.

ZADANIE 6

Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 18. Trzydziesty wyraz tego ciągu jest o 12 większy od wyrazu czternastego. Wyznacz ten ciąg.

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 18 \\ a_{30} - a_{14} = 12 \end{cases}$$

Zadanie rozwiążemy, tworząc układ równań.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4r = 18 \\ a_1 + 29r - a_1 - 13r = 12 \end{cases}$$

Układ powinien mieć dwie niewiadome: pierwszy wyraz i różnicę.

$$\begin{cases} 2a_1 + 4r = 18 \\ 16r = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 9 \\ r = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$a_1 = 9 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

Odpowiedź: Jest to ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz wynosi $\frac{15}{2}$, a różnica $\frac{3}{4}$.

ZADANIE 7

Pewna firma za wykopanie studni zażądała 1350 zł. Wykopanie pierwszego metra kosztuje 20 zł, a każdego następnego o 10 zł więcej niż poprzedniego. Oblicz głębokość wykopanej studni.

ROZWIĄZANIE

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

Wystarczy zauważyć, że w zadaniu występuje ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 20$ oraz $r = 10$.
Stosujemy wzór na sumę n kolejnych wyrazów takiego ciągu.

$$1350=\frac{20+20+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n$$

Zauważamy, że $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$. Do wzoru na sumę podstawiamy wszystkie dane.

$$1350=\frac{40+10n-10}{2}\cdot n$$

Rozwiązujemy równanie.

$$2700=30n+10n^2 \qquad 10n^2+30n-2700=0$$

$$n^2+3n-270=0$$

$$\Delta=9+4\cdot 270=1089,\quad \sqrt{\Delta}=33$$

$$n_1=\frac{-3-33}{2}=-\frac{36}{2}=-18$$

$$n_2=\frac{-3+33}{2}=\frac{30}{2}=15$$

Obliczamy pierwiastki równania i odrzucamy pierwiastek ujemny.

Odpowiedź: Głębokość studni wynosi 15 m.

ZADANIE 8

Miary kątów wielokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4°. Największy kąt tego wielokąta ma miarę 172°. Znajdź liczbę boków i liczbę przekątnych tego wielokąta.

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} a_n=a_1+(n-1)\cdot r \\ \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n=(n-2)\cdot 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 172=a_1+4(n-1) \\ (a_1+172)\cdot n=360\cdot(n-2) \end{cases}$$

Niech n oznacza poszukiwaną liczbę boków (a zarazem kątów) danego wielokąta. Kąty tworzą ciąg arytmetyczny o znanej różnicy $r = 4$ i znanym ostatnim wyrazie $a_n = 172°$. Sumę tego ciągu możemy wyrazić na dwa sposoby: jako sumę n-wyrazowego ciągu arytmetycznego oraz jako sumę kątów wewnętrznych n-kąta. W ten sposób otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi n oraz a_1.

$$\begin{cases} a_1=176-4n \\ (348-4n)\cdot n=360n-720 \end{cases}$$

$$4n^2+12n-720=0 \qquad n^2+3n-180=0$$

$$\Delta=3^2+4\cdot 1\cdot 180=729,\quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{729}=27$$

$$n_1=\frac{-3-27}{2}=-\frac{30}{2}=-15 \qquad n_2=\frac{-3+27}{2}=\frac{24}{2}=12$$

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{12\cdot 9}{2}=54.$$

Zatem liczba boków wielokąta to $n = 12$. Liczbę przekątnych obliczymy, korzystając z odpowiedniego wzoru.

Odpowiedź: Dany wielokąt jest dwunastokątem. Ma on 54 przekątne.

ZADANIE 9

Przeprowadzone w firmie badania wykazały, że wydajność pracy między listopadem a kwietniem tworzy malejący ciąg arytmetyczny. Wydajność w kwietniu była o 26,6% mniejsza niż w listopadzie, a wartość półrocznej produkcji wyniosła 390 000 zł. Oblicz wartość produkcji w listopadzie i kwietniu.

ROZWIĄZANIE

$$a_6=(100\%-26{,}6\%)a_1=73{,}4\%a_1=0{,}734a_1$$

$$\begin{cases} a_6=0{,}734a_1 \\ \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6=390\,000 \end{cases}$$

Wartości produkcji w kolejnych miesiącach od listopada do kwietnia to wyrazy od a_1 do a_6 pewnego ciągu arytmetycznego o znanej liczbie wyrazów i znanej sumie. Znamy również stosunek wartości wyrazu szóstego do wyrazu pierwszego. Daje nam to układ równań z niewiadomymi a_1 i a_6.

$$3\cdot 1{,}734a_1=390\,000 \qquad 1{,}734a_1=130\,000$$

$$a_1\approx 74\,971{,}16 \text{ zł} \qquad a_6=0{,}734a_1\approx 0{,}734\cdot 74\,971{,}16\approx 55\,028{,}83 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Wartość produkcji wynosiła w listopadzie 74 971,16 zł, a w kwietniu 55 028,83 zł.

ZADANIE 10

Oblicz sumę:
a) 5 + 10 + 15 + …+ 495, **b)** 40 początkowych wyrazów ciągu (2, 4, 6, …),
c) 20 początkowych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

5 + 10 + 15 +…+ 495

$a_1 = 5$ $r = 5$ $a_n = 495$ $n = ?$ $S_n = ?$

Obliczamy n ze wzoru na ogólny wyraz ciągu:

$a_1 + (n-1)\,r = a_n$

$5 + (n-1)\cdot 5 = 495 \quad /:5$

$1 + n - 1 = 99 \qquad n = 99$

Obliczamy S_{99}:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$$

$$S_{99}=\frac{(5+495)}{2}\cdot 99=\frac{500}{2}\cdot 99=24750$$

Odpowiedź: Suma ma wartość 24750.

Ad b)

(2, 4, 6, …), $n = 40$ $a_1 = 2$ $r = 2$ $S_{40} = ?$ $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$

$$S_{40}=\frac{2\cdot 2+(40-1)\cdot 2}{2}\cdot 40=(4+39\cdot 2)\cdot 20=(4+78)\cdot 20=82\cdot 20=1640$$

Odpowiedź: Suma pierwszych czterdziestu wyrazów wynosi 1640.

Ad c)

$n = 20$ $S_{20} = ?$

Pierwszym wyrazem ciągu, czyli najmniejszą liczbą naturalną, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, jest liczba 2 (2 : 7 = 0 r 2)

$a_1 = 2$

Kolejną liczbą, która daje resztę 2, jest 9. $a_2 = 9$ $r = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n \qquad S_{20}=\frac{2\cdot 2+(20-1)\cdot 7}{2}\cdot 20=(4+19\cdot 7)\cdot 10=137\cdot 10=1370$$

Odpowiedź: Suma pierwszych dwudziestu wyrazów wynosi 1370.

ZADANIE 11

Oblicz sumę liczb naturalnych nie większych od 98, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 3.

ROZWIĄZANIE

$a_1 = 3$ $(3 : 5 = 0$ r $3)$ $a_2 = 8$ $(8 : 5 = 1$ r $3)$ $r = a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5$ $r = 5$

$a_n = 98$ – liczby nie większe od 98 to mniejsze lub równe 98, a $98 : 5 = 19$ r 3

$n = ?$ $S_n = ?$

Obliczamy n ze wzoru na a_n:

$a_1 + (n - 1)\,r = a_n$

$3 + (n - 1) \cdot 5 = 98$ $3 + 5n - 5 = 98$ $5n = 100$ $/:5$ $n = 20$

Obliczamy S_{20}:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_{20} = \frac{3 + 98}{2} \cdot 20 = 101 \cdot 10 = 1010$$

Odpowiedź: Suma liczb nie większych od 98, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, wynosi 1010.

ZADANIE 12

Między liczbą 142 i 106 wstaw pięć liczb tak, aby wraz z tymi liczbami tworzyły kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

ROZWIĄZANIE

142, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 106 $a_1 = 142$, $a_7 = 106$

a_1 a_7

$a_n = a_1 + (n - 1)\,r$

$a_7 = 142 + (7 - 1)\,r = 106$

$142 + 6r = 106$ $6r = -36$ $/:6$ $r = -6$

Obliczamy kolejne wyrazy.

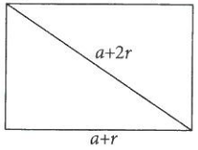
$a_2 = a_1 + r = 142 - 6 = 136$ $a_3 = a_2 + r = 136 - 6 = 130$ $a_4 = a_3 + r = 130 - 6 = 124$

$a_5 = a_4 + r = 124 - 6 = 118$ $a_6 = a_5 + r = 118 - 6 = 112$

Odpowiedź: Liczby, które należy wstawić, to: 136, 130, 124, 118 i 112.

ZADANIE 13

Oblicz pole prostokąta o obwodzie 140 cm, wiedząc, że długość jego boków oraz przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny.



Jeżeli w zadaniu podana jest wiadomość, że kolejne boki tworzą ciąg arytmetyczny, to możemy oznaczać boki tak, jak oblicza się trzy pierwsze wyrazy ciągu:
$a_1 = a$, $a_2 = a + r$ i $a_3 = a + 2r$.

Dane:
Ob = 140 cm
a, $a + r$, $a + 2r$ – długość boków, które tworzą ciąg arytmetyczny.
$a = ?$, $r = ?$ $P = ?$

Wzory:
$a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$
$Ob = 2a + 2\,(a + r)$
$P = a\,(a + r)$

ROZWIĄZANIE

Ten ciąg jest rosnący i $a > 0$.

Obliczamy a i r, korzystając z obwodu i tw. Pitagorasa:

$2a + 2\,(a + r) = 140$ $/:2$ $a + a + r = 70$ $2a + r = 70$

$r = 70 - 2a$

$a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$ $a^2 + a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2r + (2r)^2$

$a^2 + 2ar + r^2 = 4ar + 4r^2$ $a^2 - 2ar - 3r^2 = 0$

$a^2 - 2a\,(70 - 2a) - 3\,(70 - 2a)^2 = 0$ $a^2 - 140a + 4a^2 - 3\,(70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 2a + (2a)^2) = 0$

$5a^2 - 140a - 3\,(4900 - 280a + 4a^2) = 0$ $5a^2 - 140a - 14700 + 840a - 12a^2 = 0$

$-7a^2 + 700a - 14700 = 0$ $/:(-7)$ $a^2 - 100a + 2100 = 0$

$\Delta = (-100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2100 = 10000 - 8400 = 1600$ $\sqrt{\Delta} = 40$

$$a_1 = \frac{100 - 40}{2} = 30 \qquad a_2 = \frac{100 + 40}{2} = 70$$

$r = 70 - 2 \cdot 30 = 70 - 60 = 10$ różnica byłaby ujemna.

Obliczamy pole:

$P = a\,(a + r)$ $P = 30 \cdot (30 + 10) = 30 \cdot 40 = 1200$ [cm^2]

Odpowiedź: Pole prostokąta wynosi 1200 cm^2.

ZADANIE 14

Dla jakiej wartości x liczby: $\log_5 \frac{1}{2}$, x, $\log_5 50$ w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

ROZWIĄZANIE

$$x - \log_5 \frac{1}{2} = \log_5 50 - x$$

$$2x = \log_5 50 + \log_5 \frac{1}{2}$$

Korzystamy z własności logarytmów: $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

$$2x = \log_5\left(50 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_5 25 \qquad 2x = \log_5 25 \qquad 2x = 2 \qquad x = 1$$

Jeśli liczby tworzą ciąg arytmetyczny, to znaczy, że różnica między nimi jest taka sama, czyli: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.

Odpowiedź: Dla $x = 1$ liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

CIĄG GEOMETRYCZNY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Ciąg geometryczny – ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz z wyjątkiem pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną **ilorazem ciągu geometrycznego**.
Ciąg geometryczny to ciąg, w którym stosunek dowolnego wyrazu do wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego jest stały i wynosi q.

Aby obliczyć iloraz ciągu (a_n), należy, znając wzór na ogólny wyraz ciągu a_n, obliczyć wyraz a_{n+1} i podzielić wyraz a_{n+1} przez a_n.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dowolny wyraz ciągu geometrycznego (a_n), znając wyraz pierwszego a_1 i iloraz q, obliczamy ze wzoru:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym iloraz q jest różny od 1, obliczamy ze wzoru:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{gdy } q \neq 1$$

Jeżeli $q = 1$, ciąg geometryczny jest stały, wszystkie wyrazy mają tą samą wartość i wtedy sumę n początkowych wyrazów obliczamy ze wzoru:

$$S_n = n \cdot a_1, \text{ gdy } q = 1$$

Kwadrat środkowego wyrazu równy jest iloczynowi jego sąsiednich wyrazów:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+2}$$

ZADANIE 1

Sprawdź, czy ciąg o podanym wyrazie ogólnym jest geometryczny.

a) $a_n = 2^{3n-1}$ **b)** $b_n = 1 - 2n + 1$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_{n+1} = 2^{3(n+1)-1} = 2^{3n+3-1} = 2^{3n+2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{3n+2}}{2^{3n-1}} = 2^{3n+2-3n+1} = 2^3 = 8$

Należy utworzyć a_{n+1} wyraz ciągu i zbadać wartość ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Iloraz jest stałą liczbą.

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny.

Ad b)

$b_n = -2n + 1 \qquad b_{n+1} = -2(n+1) + 1 = -2n - 2 + 1 = -2n - 1$

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-2n-1}{-2n+1} = \frac{-(2n+1)}{-(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n-1}$

Odpowiedź: Ciąg nie jest ciągiem geometrycznym, ponieważ iloraz q zależy od n.

ZADANIE 2

Wyznacz ciąg geometryczny, wiedząc, że: **a)** $a_3 = 8$ i $a_8 = 256$ **b)** $b_2 = 8$ i $b_6 = \frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 8, \quad a_8 = a_1 \cdot q^7 = 256$

Wyznaczyć ciąg geometryczny oznacza znaleźć jego pierwszy wyraz i iloraz.

$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 8 \\ a_1 \cdot q^7 = 256 \end{cases}$

Tworzymy układ równań.

$\frac{a_1 \cdot q^2}{a_1 \cdot q^7} = \frac{8}{256}$

$\frac{1}{q^5} = \frac{1}{32} \qquad q^5 = 32 \qquad q = 2 \qquad a_1 = \frac{8}{q^2} = \frac{8}{4} = 2$

Odpowiedź: $a_1 = 2$, $q = 2$.

Ad b)

$b_2 = 8, \quad b_6 = \frac{1}{2} \qquad b_1 q^{n-1} = b_n$

$\begin{cases} b_1 q^{2-1} = 8 \\ b_1 q^{6-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{b_1 q}{b_1 q^5} = \frac{8}{1} \cdot \frac{2}{1}$

$\frac{1}{q^4} = \frac{16}{1} \qquad 16q^4 = 1 \qquad q^4 = \frac{1}{16}$

$q^4 - \frac{1}{16} = 0 \qquad \left(q^2 + \frac{1}{4}\right)\left(q^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$

$q^2 + \frac{1}{4} = 0$ lub $q^2 - \frac{1}{4} = 0$

wyrażenie zawsze dodatnie

$\left(q + \frac{1}{2}\right)\left(q - \frac{1}{2}\right) = 0$

$q = -\frac{1}{2}$ lub $q = \frac{1}{2}$

$b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \qquad b_1 \cdot \frac{1}{2} = 8$

$b_1 = -16 \qquad b_1 = 16$

Odpowiedź: Otrzymaliśmy dwa ciągi geometryczne w jednym. Pierwszy wyraz wynosi -16 i iloraz $-\frac{1}{2}$, a w drugim odpowiednio 16 i $\frac{1}{2}$.

ZADANIE 3

Dla jakich różnych od zera liczb x liczby a, b i c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, jeżeli $a = x^{-1}$, $b = x$, $c = 3x^2 - 2x$.

ROZWIĄZANIE

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad x \neq 0$

Należy sprawdzić, dla jakich x zachodzi równość.

$\frac{x}{x^{-1}} = \frac{3x^2 - 2x}{x}$

$x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1$ Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

Odpowiedź: $x \in \{1, 2\}$.

ZADANIE 4

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 3, a suma odwrotności wyrazu pierwszego i trzeciego wynosi 18. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) oraz podaj wzór ogólny ciągu (a_n).

ROZWIĄZANIE

$q = 3 \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} = 18$ Zapisujemy równania wynikające z treści zadania.

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} = 18 \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{9a_1} = 18$ Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu.

$\frac{10}{9a_1} = 18 \qquad 10 = 9 \cdot 18 \cdot a_1 \qquad a_1 = \frac{10}{9 \cdot 18} = \frac{5}{81}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{5}{81} \cdot 3^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-5}$ Wstawiamy do wzoru na wyraz ogólny wyliczone wartości.

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu wynosi $a_1 = \frac{5}{81}$, a ogólny wzór ciągu ma postać $5 \cdot 3^{n-5}$

ZADANIE 5

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}$. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest geometryczny, i wyznacz jego iloraz.

ROZWIĄZANIE

$a_{n+1} = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ Tworzymy wyraz ciągu o numerze $n + 1$ i badamy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}} = \frac{2 \cdot (2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1})}{2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}} = 2$

Iloraz jest stałą liczbą, dlatego ciąg jest geometryczny. Zarazem wyznaczyliśmy jego iloraz.

Odpowiedź: Iloraz tego ciągu jest stały i wynosi 2, więc ciąg jest geometryczny.

ZADANIE 6

Iloraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, a suma jego pięciu początkowych wyrazów wynosi –605. Wyznacz ten ciąg.

ROZWIĄZANIE

$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ Należy wyznaczyć pierwszy wyraz tego ciągu. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$S_5 = a_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = -605$

$\frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right] = -605 \qquad \frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right) = -605$

$\frac{3}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{242}{243} = -605 \qquad a_1 = \frac{-605 \cdot 243 \cdot 2}{3 \cdot 242} \qquad a_1 = -405$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz wynosi –405, a iloraz $\frac{1}{3}$.

ZADANIE 7

W ciągu geometrycznym składającym się z pięciu wyrazów iloczyn pierwszego, trzeciego i piątego wyrazu jest równy $\frac{1}{8}$, a iloczyn pierwszego i drugiego jest równy 2. Wyznacz ten ciąg.

ROZWIĄZANIE

$\begin{cases} a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = \frac{1}{8} \\ a_1 \cdot a_2 = 2 \end{cases}$ Korzystając z treści zadania, układamy układ równań.

$\begin{cases} a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{8} \\ a_1 \cdot a_1 \cdot q = 2 \end{cases}$ Układ przekształcamy tak, aby pozostały dwie niewiadome: pierwszy wyraz i iloraz.

$\begin{cases} a_1^3 \cdot q^6 = \frac{1}{8} \\ a_1^2 \cdot q = 2 \end{cases}$

$q = \frac{2}{a_1^2}$ Z drugiego równania wyliczamy q i wstawiamy do pierwszego.

$a_1^3 \cdot \frac{2^6}{a_1^{12}} = \frac{1}{8} \qquad \frac{2^6}{a_1^9} = \frac{1}{2^3} \qquad a_1^9 = 2^9$

$a_1 = 2 \qquad q = \frac{1}{2}$

Odpowiedź: Szukany ciąg: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

ZADANIE 8

Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego jest równa 13. Jeżeli do pierwszej dodamy 2, do drugiej 5, a do trzeciej 4, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

ROZWIĄZANIE

1) $a_1 + a_2 + a_3 = 13$ – suma trzech wyrazów ciągu geometrycznego

$a + aq + aq^2 = 13 \qquad a(1 + q + q^2) = 13$

2) $a + 2, aq + 5, aq^2 + 4$ – wyrazy ciągu arytmetycznego o stałej różnicy

$(aq + 5) - (a + 2) = (aq^2 + 4) - (aq + 5) \qquad aq + 5 - a - 2 = aq^2 + 4 - aq - 5$

$-aq^2 + 2aq - a = -1 - 3 \qquad aq^2 - 2aq + a = 4$

$a(q^2-2q+1)=4$

$\begin{cases} a(q^2+q+1)=13 \\ a(q^2-2q+1)=4 \end{cases}$

$\frac{a(q^2+q+1)}{a(q^2-2q+1)}=\frac{13}{4}$

$13(q^2-2q+1)=4(q^2+q+1)$

$13q^2-26q+13=4q^2+4q+4 \qquad 9q^2-30q+9=0 \quad /:3$

$3q^2-10q+3=0 \qquad a=3 \qquad b=-10 \qquad c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot3\cdot3=100-36=64 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

$q_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-8}{2\cdot3}=\frac{1}{3} \qquad q_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+8}{2\cdot3}=3$

$q=\frac{1}{3}$ lub $q=3$

$a(q^2-2q+1)=4 \qquad a(q^2-2q+1)=4$

$a\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}+1\right]=4 \qquad a(3^2-2\cdot3+1)=4$

$a\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1\right)=4 \qquad a(9-6+1)=4$

$a\left(\frac{1}{9}-\frac{6}{9}+1\right)=4 \qquad 4a=4 \quad /:4$

$a\left(1-\frac{5}{9}\right)=4 \qquad a=1$

$\frac{4}{9}a=4 \quad /:\frac{4}{9}$

$a=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}=9$

$a_1=a=9$ lub $a_1=a=1$

$a_2=aq=9^3\cdot\frac{1}{3_1}=3 \qquad a_2=aq=1\cdot3=3$

$a_3=aq^2=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{9}{1}\cdot\frac{1}{9}=1 \qquad a_3=aq^2=1\cdot3^2=1\cdot9=9$

Odpowiedź: Otrzymaliśmy dwie trójki liczb 9, 3, 1 oraz 1, 3, 9.

ZADANIE 9

Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego jest równa 30. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej 8, a do trzeciej 38, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Znajdź te liczby.

ROZWIĄZANIE

1) $a_1+a_2+a_3=30 \qquad a+a+r+a+2r=30 \qquad 3a+3r=30 \quad /:3 \qquad a+r=10$

2) $a+2,\ a+r+8,\ a+2r+38$ – wyrazy ciągu geometrycznego o stałym ilorazie

$\frac{a+r+8}{a+2}=\frac{a+2r+38}{a+r+8}$

1) $r=10-a \qquad a+r=10$

2) $\frac{10+8}{a+2}=\frac{a+2(10-a)+38}{10+8}$

$\frac{18}{a+2}=\frac{a+20-2a+38}{18}$

$(a+2)(58-a)=18\cdot18 \qquad 58a-a^2+116-2a=324$

$-a^2+56a-208=0 \quad /\cdot(-1)$

$a^2-56a+208=0$

$\Delta=(-56)^2-4\cdot1\cdot208=3136-832=2304 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{2304}=48$

$a=\frac{56-48}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4$ lub $a=\frac{56+48}{2\cdot1}=\frac{104}{2}=52$

$r=10-4=6 \qquad a_1=a=4 \qquad r=10-52=42 \qquad a_1=a=52$

$a_2=a+r=4+6=10 \qquad a_2=a+r=52-42=10$

$a_3=a+2r=4\cdot2\cdot6=16 \qquad a_3=a+2r=52+2(-42)=52-84=-32$

$(4, 10, 16) \qquad (52, 10, -32)$

Odpowiedź: Otrzymaliśmy dwie trójki liczb: 4, 10, 16 oraz 52, 10, –32.

KREDYTY I LOKATY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Gdy bierzemy kredyt w banku, spłacamy odsetki. Jeśli składamy lokatę w banku, odsetki płaci nam bank. **Stopa procentowa określa, jaką część kapitału stanowią odsetki.** W praktyce przyjęta jest zasada, że stopę procentową określa się w skali rocznej. Odsetki można obliczać za pomocą procentu prostego lub składanego.
Posługując się zasadą **procentu prostego**, naliczamy odsetki proporcjonalnie do czasu i zawsze od kapitału początkowego. **Procent składany** pozwala nam po upływie okresu podstawowego dopisać odsetki do kapitału początkowego i ponownie naliczać odsetki od nowej kwoty.

Procent składany
Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

ZADANIE 1

Oblicz, na jak długo musimy założyć 1000 zł na lokatę 6%, by otrzymać 1100 zł.

Dane:

$K=1000$ zł $\qquad K_n=1100$ zł $\qquad p=6\%=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$ $\qquad t=?$ – czas, na jaki ma być złożona lokata

Wzory:

$K_n=K+ptK \qquad K_n=K(1+pt)$

ROZWIĄZANIE

$1000\left(1+\frac{3}{50}\cdot t\right)=1100 \quad /:100$

$10+\frac{10}{1}\cdot\frac{3}{50}t=11 \qquad \frac{3}{5}t=1 \quad /:\frac{3}{5} \qquad t=\frac{5}{3}\text{[roku]} \qquad t=\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{1}=20 \text{ miesięcy}$

Odpowiedź: Musimy założyć lokatę na 20 miesięcy.

ZADANIE 2

Oblicz, na jaki minimalny procent należy ulokować kwotę 1800 zł, aby za pół roku otrzymać 1890 zł.

Dane:

$K=1800$ zł $\qquad K_n=1890$ zł $\qquad t=\frac{1}{2}$ roku $\qquad p=?$

Wzory:

$K_n=K+ptK \qquad K(1+pt)=K_n$

ROZWIĄZANIE

$1800\left(1+p\cdot\frac{1}{2}\right)=1890 \quad /:90 \qquad 20\left(1+\frac{1}{2}p\right)=21$

$20+10p=21 \qquad 10p=1 \quad /:10 \qquad p=\frac{1}{10}\cdot 100\%=10\%$

Odpowiedź: Lokata musi być minimum 10 procentowa.

ZADANIE 3

Kapitał pewnej firmy w roku 2012 wynosił 200 000 zł. po pierwszym roku powiększył się o 5%, a po drugim o 35%. Oblicz średni roczny procentowy wzrost kapitału tej firmy w ciągu tych dwóch lat.

ROZWIĄZANIE

200 000 zł — Początkowy kapitał firmy.

1,05 · 200 000 = 210 000 zł — Kapitał firmy po pierwszym roku (liczbę 1,05 nazywamy współczynnikiem zysku po pierwszym roku).

1,35 · 210 000 = 283 500 zł — Kapitał firmy po drugim roku (liczbę 1,35 nazywamy współczynnikiem zysku po drugim roku).

$x\cdot(x\cdot 200\,000)=283\,500$

$x^2\cdot 200\,000=283\,500$ — Ponieważ średni współczynnik przyrostu kapitału w pierwszym i drugim roku powinien być taki sam, otrzymujemy równanie.

$x^2=\frac{283\,500}{200\,000}\approx 1{,}4175 \qquad x\approx 1{,}1906$

Odpowiedź: Procentowy średni roczny przyrost kapitału wynosi około 19,06%.

ZADANIE 4

Oblicz, jaką kwotę należy złożyć w banku na lokacie, której stopa procentowa jest równa 6%, jeżeli po 4 miesiącach chcemy mieć kwotę 2040 zł.

Dane:

$K_n=2040$ zł – kapitał końcowy $\qquad p=6\%=\frac{6}{100}=\frac{3}{50} \qquad t=4$ miesiące $=\frac{4}{12}$ roku $=\frac{1}{3}$ roku

$K=?$ – kapitał początkowy $\qquad o$ – odsetki

Wzory:

$K_n=K+o \qquad K_n=K+ptK \qquad K_n=K(1+pt) \qquad K(1+pt)=K_n$

ROZWIĄZANIE

$K\left(1+\frac{3}{50}\cdot\frac{1}{3}\right)=2040 \qquad K\left(1+\frac{1}{50}\right)=2040$

$\frac{51}{50}K=2040 \quad /:\frac{51}{50} \qquad K=\frac{2040}{1}\cdot\frac{50}{51}=40\cdot 50=2000$ zł

Odpowiedź: Należy wpłacić kwotę 2000 zł.

ZADANIE 5

Na dwumiesięczną lokatę wpłacono 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 5%. Ile wyniosą odsetki z tej lokaty po pół roku?

Dane:

$K=2000$ zł – wpłacona kwota

$p\%=\frac{2}{12}\cdot 5\%=\frac{1}{6}\cdot 5\%=\frac{5}{6}\%$

Oprocentowanie jest zawsze roczne. Procent dzielimy przez część roku, po której następuje kapitalizacja odsetek, 2 miesiące to $\frac{1}{6}$ roku. W ciągu sześciu miesięcy odsetki będą naliczane 3 razy – co dwa miesiące.

ROZWIĄZANIE

$K_3=K\left(1+\frac{p}{100}\right)^3=2000\left(1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{100}\right)^3=2000\left(1+\frac{1}{120}\right)^3=\frac{2000}{1}\left(\frac{121}{120}\right)^3=\frac{2000}{1}\cdot\frac{121}{120}\cdot\left(\frac{121}{120}\right)^2=$

$=\left(\frac{121}{36\cdot 24}\right)^3=\frac{1771561}{864}\approx 050{,}42 \text{ zl} \qquad o=K_3-K=2050{,}42-2000=50{,}42 \text{ zl}$

Odpowiedź: Po pół roku odsetki wyniosą 50,42 zł.

ZADANIE 6

Wpłacono 100 zł na lokatę półroczną. Po roku oszczędzania stan konta wynosi 108,16 zł. Jakie jest oprocentowanie lokaty?

Dane:

$n=2 \qquad K_2=108{,}16$ zł $\qquad K=100$ zł $\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{100}=\frac{p}{200} \qquad p$ – oprocentowanie

ROZWIĄZANIE

$100\left(1+\frac{p}{200}\right)^2=108{,}16 \quad /:100 \qquad \left(\frac{200}{200}+\frac{p}{200}\right)^2=1{,}0816$

$\left(\frac{200+p}{200}\right)^2=1{,}0816 \qquad (200+p)^2=1{,}0816\cdot(200)^2$

$(200+p)^2=43264 \qquad 200+p=\sqrt{43264}$

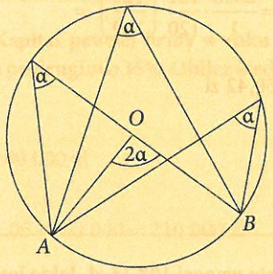
$200+p=208 \qquad p=8 \qquad p\%=8\%$

Odpowiedź: Oprocentowanie lokaty wynosi 8%.

PLANIMETRIA

KĄTY W KOLE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE



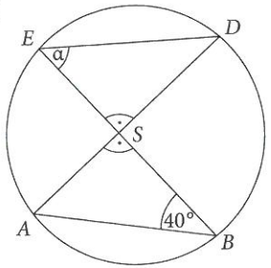
Kąty w okręgu

Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają jednakowe miary. Kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty.

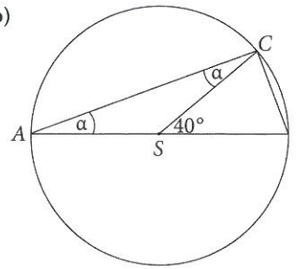
ZADANIE 1

Wyznacz miarę kąta α, gdy *S* jest środkiem okręgu.

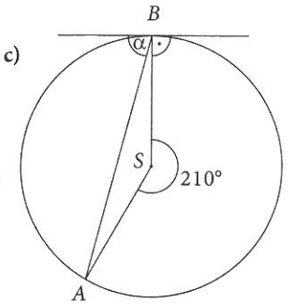
a)



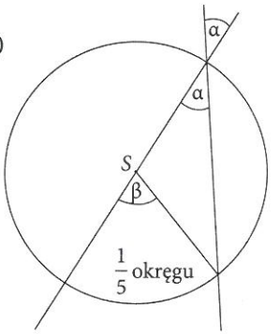
b)



c)

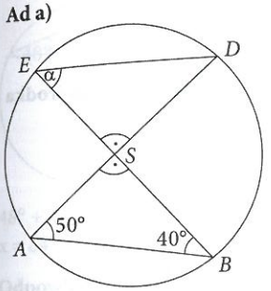


d)



ROZWIĄZANIE

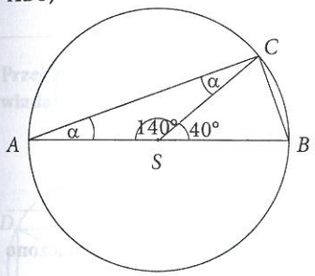
Ad a)



$\sphericalangle SAB = 50°$, bo suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°;
$\alpha = 50°$, bo jest kątem wpisanym opartym na tym samym, co kąt *DAB*.

Odpowiedź: Kąt α ma miarę 50°.

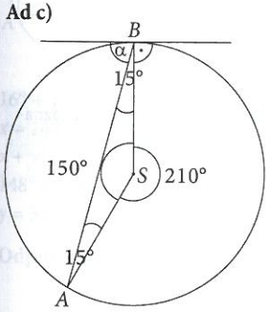
Ad b)



$\sphericalangle ASC = 140°$, bo jest kątem przyległym do $\sphericalangle CSB$.
Trójkąt *ASC* jest równoramienny, więc
$2\alpha = 180° - 40° = 140°$ i $\alpha = 20°$

Odpowiedź: Kąt α ma miarę 20°.

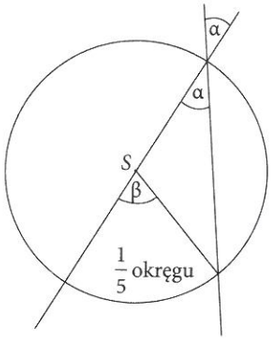
Ad c)



$\sphericalangle ASB = 360° - 210° = 150°$
$\sphericalangle BAS = \sphericalangle ABS = (180° - 150°) : 2 = 15°$
$\alpha + 15° = 90°$ $\quad \alpha = 90° - 15° = 75°$

Odpowiedź: Kąt α ma miarę 75°.

Ad d)



$\frac{1}{5}$ okręgu odpowiada kątowi środkowemu $\beta = \frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$.

Kąt α jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, co kąt środkowy β.

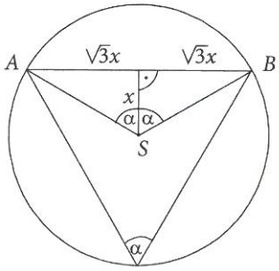
$\alpha = 72° : 2 = 36°$

Odpowiedź: Kąt α ma miarę 36°.

ZADANIE 2

W okręgu o środku S i promieniu r stosunek długości cięciwy AB do odległości tej cięciwy do środka okręgu wynosi $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta wpisanego opartego na tej cięciwie.

ROZWIĄZANIE



$\frac{AB}{x} = 2\sqrt{3}$

$AB = 2\sqrt{3}x$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$

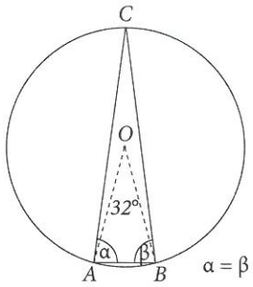
$\alpha = 60°$

Odpowiedź: Miara kąta wpisanego wynosi 60°.

ZADANIE 3

Na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, opisano okrąg, którego środek oznaczono literą O. Oblicz kąty trójkąta ABC, wiedząc, że $\sphericalangle AOB = 32°$.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym zaznaczamy dany kąt.

Kąt przy wierzchołku C ma miarę 16°.

Kąty przy podstawie są równe, a suma kątów w trójkącie wynosi 180°.

$2\alpha + 16° = 180°$

$\alpha = 82°$

Kąt ACB jest dwa razy mniejszy od kąta AOB. Są to kąty, odpowiednio, wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku. Otrzymujemy równanie:

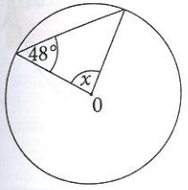
Rozwiązujemy równanie:

Odpowiedź: Kąty trójkąta mają miary: 16°, 82° i 82°.

ZADANIE 4

Cięciwa okręgu tworzy z promieniem przechodzącym przez koniec cięciwy kąt o mierze 48°. Oblicz miarę kąta środkowego wypukłego odpowiadającego danej cięciwie.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym zaznaczamy cięciwę, dany kąt i szukany kąt x.

Zauważamy, że szukany kąt jest jednym z kątów w trójkącie równoramiennym, którego bokami są dana cięciwa i promienie okręgu. Układamy równanie:

$48° + 48° + x = 180°$

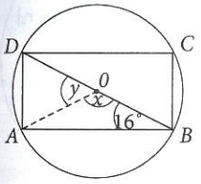
$x = 84°$

Odpowiedź: Szukany kąt ma miarę 84°.

ZADANIE 5

Przekątna tworzy z bokiem prostokąta kąt o mierze 16°. Wyznacz miary kątów środkowych odpowiadających łukom wyznaczonym przez wierzchołki prostokąta na okręgu opisanym na prostokącie.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym zaznaczamy prostokąt i okrąg opisane na tym prostokącie, dany kąt i kąty szukane.

Zauważamy, że kąt o mierze x jest jednym z kątów trójkąta równoramiennego, w którym kąty przy podstawie mają równe miary (16°). Układamy równanie:

$16° + 16° + x = 180°$

$x = 148°$

$x + y = 180°$

$148° + y = 180°$

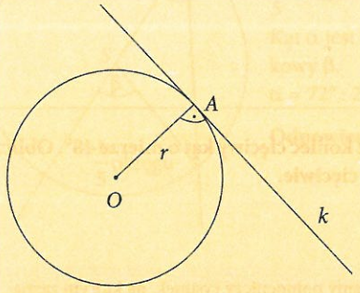
$y = 32°$

Kąt o mierze x jest przyległy do kąta o mierze y. Suma kątów przyległych wynosi 180°. Otrzymujemy równanie:

Odpowiedź: Szukane kąty mają miary: 148° i 32°.

STYCZNA DO OKRĘGU, OKRĘGI STYCZNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE



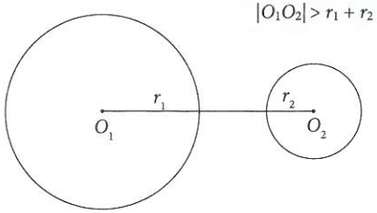
Styczna do okręgu jest to prosta, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.
k – styczna do okręgu o środku O i promieniu r, a A to punkt styczności.

Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności i środek okręgu.

Wzajemne położenie dwóch okręgów.

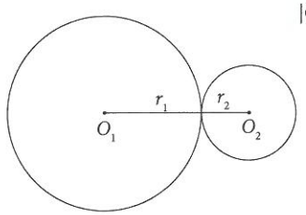
– okręgi rozłączne zewnętrznie:

$|O_1O_2| > r_1 + r_2$



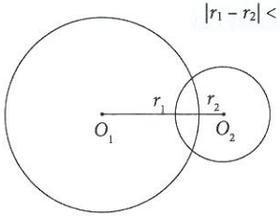
– okręgi styczne zewnętrznie:

$|O_1O_2| = r_1 + r_2$



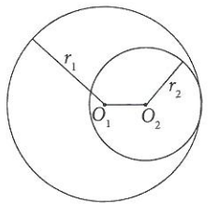
– okręgi przecinające się:

$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$



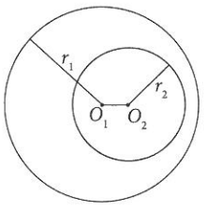
– okręgi wewnętrznie styczne:

$O < |O_1O_2| = |r_1 - r_2|$



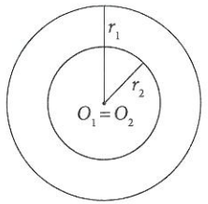
– okręgi wewnętrznie rozłączne:

$O < |O_1O_2| < |r_1 - r_2|$



– okręgi współśrodkowe:

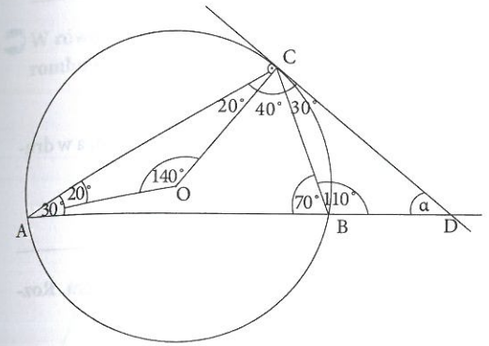
$|O_1O_2| = 0$
$r_1 \neq r_2$



ZADANIE 1

W okrąg o środku O wpisano trójkąt ABC, styczna do okręgu w punkcie C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz miarę $\sphericalangle CDB$, gdy $\sphericalangle CAB = 30°$ i $\sphericalangle ABC = 70°$.

ROZWIĄZANIE



$\sphericalangle ABC$ jest kątem wpisanym, więc
$\sphericalangle AOC = 140°$
$\sphericalangle AOC = (180° - 140°) : 2 = 20°$
$\sphericalangle BCA = 180° - 30° - 70° = 80°$
$\sphericalangle BCO = 80° - 20° = 60°$
$\sphericalangle OCD = 90°$ – kąt między promieniem i styczną
$\sphericalangle DCB = 90° - 60° = 30°$
$\alpha = 180° - 30° - 110° = 40°$

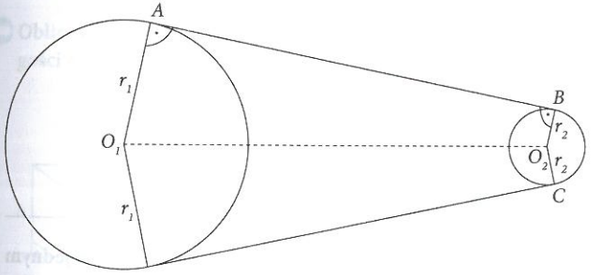
$\sphericalangle CBD = 180° - 70° = 110°$
Odpowiedź: Kąt CDB ma miarę 40°.

ZADANIE 2

W maszynie rolniczej dwa koła o promieniu 26 cm i 8 cm połączono pasem transmisyjnym. Odległość między środkami kół wynosi 82 cm. Oblicz długość pasa pomiędzy punktami styczności pasa i obu kół. Rozwiąż dwa przypadki.

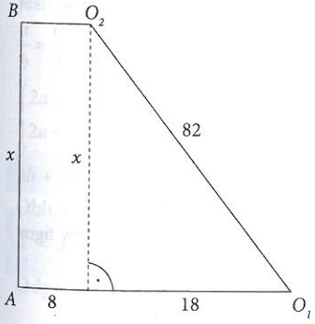
ROZWIĄZANIE

I przypadek:



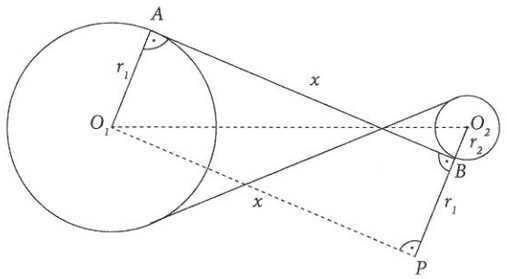
Dane:
$r_1 = 26$ cm
$r_2 = 8$ cm
$|O_1O_2| = 82$

Czworokąt AO_1O_2B jest trapezem prostokątnym



$x^2 + 18^2 = 82^2$
$x^2 + 324 = 6724$
$x^2 = 6400$
$x = 80$ cm

II przypadek:



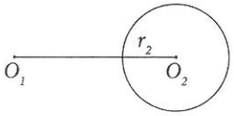
$x^2 + (r_1 + r_2)^2 = 82^2$
$x^2 + (26 + 8)^2 = 82^2$
$x^2 + 1156 = 6724$
$x^2 = 5568$
$x \approx 74{,}6$ cm

Odpowiedź: Odległość pomiędzy punktami styczności w pierwszym przypadku wynosi 80 cm, a w drugim 74,6 cm.

ZADANIE 3

Odległość środków dwóch okręgów wynosi 6 cm, a jeden z promieni okręgu ma długość 2 cm. Rozważ wszystkie możliwe położenia okręgów, określając długość promienia drugiego okręgu.

ROZWIĄZANIE



$|O_1O_2| = 6$ cm i $r_2 = 2$ cm

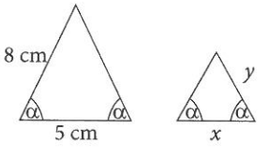
1) gdy $O < r_1 < 4$ – okręgi rozłączne zewnętrznie
2) gdy $r_1 = 4$ – okręgi styczne zewnętrznie
3) gdy $4 < r_1 < 8$ – okręgi przecinają się
4) gdy $r_1 = 8$ – okręgi wewnętrznie styczne
5) gdy $r_1 > 8$ – okręgi wewnętrznie rozłączne

FIGURY PODOBNE

ZADANIE 1

W dwóch trójkątach równoramiennych kąty przy podstawach są równe. Podstawa i ramię w jednym trójkącie wynoszą odpowiednio 5 cm i 8 cm, a obwód drugiego trójkąta wynosi 35 cm. Oblicz długość podstawy i ramienia drugiego trójkąta.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

Ob = 8 + 8 + 5 = 21

Dane trójkąty są podobne. Stosunek obwodów figur podobnych jest równy skali podobieństwa.

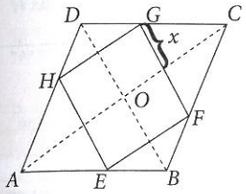
$s = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$ $\quad 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3}$ $\quad 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$

Odpowiedź: Podstawa drugiego trójkąta ma długość $\frac{25}{3}$ cm, a ramię $\frac{40}{3}$ cm.

ZADANIE 2

W równoległobok, którego przekątne wynoszą 10 cm i 15 cm, wpisano romb w ten sposób, że boki rombu są równoległe do przekątnych równoległoboku. Oblicz długość boku rombu.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$AC = 15$ cm, $BD = 10$ cm
$EF = FG = GH = HE = 2x$

$\frac{2x}{15} = \frac{5-x}{5}$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów HGD i ACD.

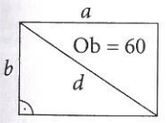
$10x = 75 - 15x$ $\quad 25x = 75$ $\quad x = 3$

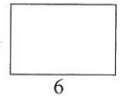
Odpowiedź: Bok rombu ma długość 6 cm.

ZADANIE 3

Oblicz długość przekątnej prostokąta o obwodzie 60 cm, podobnego do prostokąta o bokach długości 4 cm i 6 cm.

ROZWIĄZANIE





Jeśli prostokąty są podobne, to:

$\frac{a}{b} = \frac{6}{4}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

$\begin{cases} 2a = 3b \\ 2a + 2b = 60 \end{cases}$ – obwód prostokąta

$3b + 2b = 60$ $\quad 5b = 60$ /:5 $\quad b = 12$ cm $\quad 2a = 3 \cdot 12$ /:2 $\quad a = 18$ cm

Obliczamy długość przekątnej.

$d^2 = a^2 + b^2 = 182 + 122 = 324 + 144 = 468$ $\quad d = \sqrt{4 \cdot 117} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 13} = 2 \cdot 3\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$ cm

Odpowiedź: Przekątna prostokąta ma długość $6\sqrt{13}$ cm.

ZADANIE 4

Stosunek obwodów dwóch kwadratów jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz długość boków kwadratów, gdy suma ich pól wynosi 160 cm².

ROZWIĄZANIE

$P_1 + P_2 = 160$

$(3x)^2 + x^2 = 160$
$9x^2 + x^2 = 160$
$10x^2 = 160 \qquad x^2 = 16 \qquad x = 4$
$3x = 3 \cdot 4 = 12$

Odpowiedź: Boki kwadratów mają długość 4 cm i 12 cm.

ZADANIE 5

Sprawdź, czy trójkąty są podobne, jeśli:

a) długości ich boków wynoszą: 5, 12 i 13 oraz $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{4}$,

b) długość ich boków i kąt między nimi wynoszą: 5, 8 i 64° oraz 24, 15 i 64°

c) miary ich kątów wynoszą: 70° i 30° oraz 70° i 80°.

ROZWIĄZANIE

Ad a) Jeżeli trójkąty są podobne, to stosunki długości boków w jednym trójkącie są takie same jak w drugim trójkącie:

1) $\frac{5}{12} = \frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{5}}$ 2) $\frac{5}{13} = \frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}}$ 3) $\frac{12}{13} = \frac{1\frac{1}{5}}{1\frac{1}{4}}$

$L_1 = \frac{5}{12} \qquad P_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \qquad L_1 = P_1$

2) $L_2 = \frac{5}{13} \qquad P_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \qquad L_2 \neq P_2$ – trójkąty nie są podobne

Ad b) 5, 8, 64° 24,15, 64°
Kąty są takie same.
$\frac{5}{8} \qquad \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Stosunek długości boków jest taki sam.

Odpowiedź: Trójkąty są podobne.

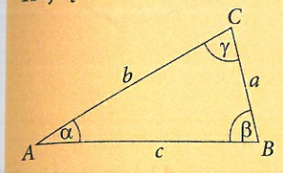
Ad c)
70°, 30° 70°, 80°
180° – (70° + 30°) = 80° 180° – (70° + 80°) = 30°

Odpowiedź: Trójkąty są podobne – oba mają kąty o miarach: 30°, 70°, 80°.

ZWIĄZKI MIAROWE W WIELOKĄTACH

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Trójkąt



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie ABC:
a, b, c – **długości boków**, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C
$2p = a + b + c$ – **obwód trójkąta**
α, β, γ – **miary kątów** przy wierzchołkach A, B, C
h_a, h_b, h_c – **wysokości** opuszczone z wierzchołków A, B, C
R, r – **promienie okręgów** opisanego i wpisanego

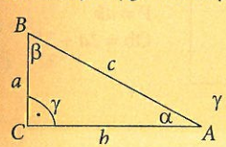
Wzory na pole trójkąta

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Trójkąt prostokątny

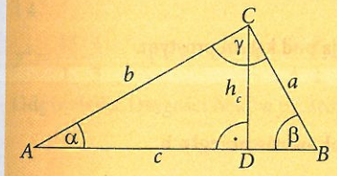
a) Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym:



$\gamma = 90° \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

b) Twierdzenie Pitagorasa: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

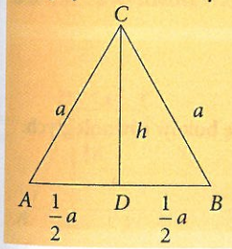


$h_c^2 = |AD| \cdot |DB| \qquad h_c = \frac{ab}{c}$

$a = c \sin\alpha = c \cos\beta \qquad a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

$R = \frac{1}{2} c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$

Trójkąt równoboczny



a – długość boku
h – wysokość trójkąta

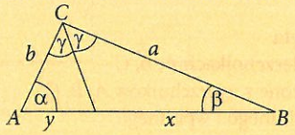
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, nazywanym **środkiem ciężkości trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2:1.

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

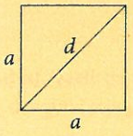


$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

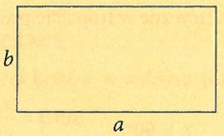
Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Kwadrat



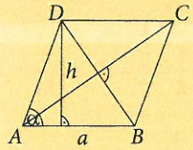
$P = a^2$
Ob = 4a
$d = a\sqrt{2}$

Prostokąt



P = ab
Ob = 2a + 2b

Romb



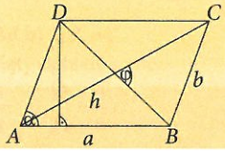
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Pole rombu: $P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$

Ob = 4a

Przekątne rombu połowią się i przecinają pod kątem prostym.

Równoległobok



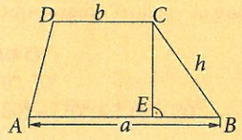
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku:

$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$

Ob = 2a + 2b

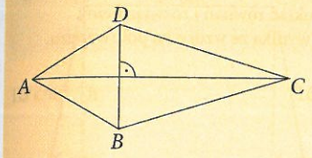
Trapez



Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Deltoid



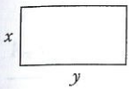
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu: $P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$

ZADANIE 1

Znajdź długości boków prostokąta, wiedząc, że stosunek długości tych boków wynosi 3:4, a pole prostokąta jest równe 48 cm².

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

Zapisujemy układ równań wynikający z treści zadania.

$$\begin{cases} 4x = 3y \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y \cdot y = 48 \end{cases} \quad /:3$$

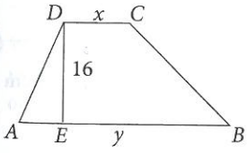
$y^2 = \frac{48}{1} \cdot \frac{4}{3}$ $\quad y = 8$ $\quad x = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = 6$

Odpowiedź: Długości boków prostokąta wynoszą: 6 cm i 8 cm.

ZADANIE 2

Oblicz długości podstaw trapezu, gdy stosunek ich długości wynosi 2:3, pole trapezu jest równe 240 cm², a wysokość trapezu jest równa 16 cm.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ \frac{(x+y)\cdot 16}{2}=240 \end{cases}$$

Wypisujemy równania wynikające z treści zadania, tworzymy z nich układ równań i rozwiązujemy. Drugie równanie wynika ze wzoru na pole trapezu.

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ (x+y)\cdot 8=240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ x+y=30 \end{cases}$$

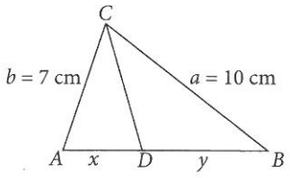
$\frac{2}{3}y+y=30 \qquad \frac{5}{3}y=30 \qquad y=18 \qquad x=12$

Odpowiedź: Podstawy trapezu mają długości: 12 cm i 18 cm.

ZADANIE 3

W trójkącie ABC mamy $a = 10$ cm, $b = 7$ cm. Oblicz długość boku c, gdy odcinki AD i BD, wyznaczone przez dwusieczną CD kąta C na boku AB, różnią się o 2 cm.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$c = x + y$

$$\begin{cases} y-x=2 \\ \frac{7}{x}=\frac{10}{y} \end{cases}$$

Korzystamy z danych i twierdzenia o dwusiecznej.

$$\begin{cases} y=2+x \\ 7y=10x \end{cases}$$

$7\cdot(2+x)=10x \qquad 14+7x=10x \qquad x=\frac{14}{3},\ y=\frac{20}{3}$

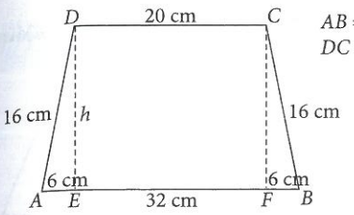
$c=\frac{14}{3}+\frac{20}{3}=\frac{34}{3}$ [cm]

Odpowiedź: Długość boku c wynosi $\frac{34}{3}$ cm.

ZADANIE 4

Działka na mapie w skali 1 : 750 ma kształt trapezu równoramiennego o podstawach długości 32 cm i 20 cm oraz ramionach długości 16 cm. Podaj w arach jej rzeczywistą powierzchnię.

ROZWIĄZANIE



$AB = 32$ cm
$DC = 20$ cm

Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$P=\frac{(20+32)\cdot h}{2}=26\cdot h$

Obliczamy pole tego trapezu (na mapie).

$h^2+6^2=16^2 \qquad h=\sqrt{220}=2\sqrt{55}$

Brakującą wysokość znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa.

$P=52\sqrt{55}\approx 385{,}6423213\ \text{cm}^2\approx 385{,}64\ \text{cm}^2$

$P_{rz} = 385{,}64 \cdot 562500 = 216\,922\,500\ \text{cm}^2$

Obliczamy rzeczywistą powierzchnię trapezu, wykorzystując skalę mapy i wyrażamy powierzchnię w arach.

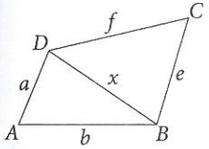
$P_{rz} = 21692{,}25\ \text{m}^2 \approx 216{,}92$ arów.

Odpowiedź: Rzeczywista powierzchnia wynosi 216,92 arów.

ZADANIE 5

Przekątna dzieli czworokąt o obwodzie wynoszącym 32 cm na dwa trójkąty, których obwody wynoszą, odpowiednio, 20 cm i 24 cm. Oblicz długość tej przekątnej.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym zaznaczamy przekątną o długości x.

$a + b + x = 20$ cm
$e + f + x = 24$ cm
$a + b + e + f = 32$
$a + b + 2x + e + f = 44$
$32 + 2x = 44$
$x = 6$ cm

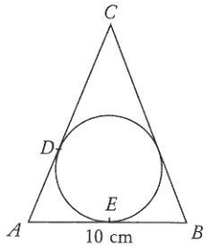
Obwód trójkąta ABD, obwód trójkąta BCD, obwód czworokąta $ABCD$. Dodajemy obwody trójkątów i uwzględniamy obwód równoległoboku.

Odpowiedź: Przekątna ma długość 6 cm.

ZADANIE 6

W trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$ i $AB = 10$ cm, wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta ABC, wiedząc, że punkt styczności D okręgu wpisanego dzieli bok AC (poczynając od wierzchołka C) w stosunku 3:2.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$AD = 2x,\ DC = 3x$

$AD = AE = \frac{1}{2}AB = 5$

Zatem:

$2x = 5 \qquad x = \frac{5}{2} \qquad 3x = 7\frac{1}{2}$

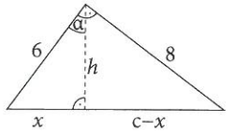
Obwód = 10 + 12,5 + 12,5 = 35 cm

Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC wynosi 35 cm.

ZADANIE 7

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz tangens kąta pomiędzy wysokością trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego a krótszą przyprostokątną.

ROZWIĄZANIE



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{h} \qquad x = ? \qquad h = ? \qquad c = ?$

Obliczamy przeciwprostokątną c z tw. Pitagorasa.

$c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \qquad c = \sqrt{100} = 10$ cm

Obliczamy x i h z tw. Pitagorasa.

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 6^2 \\ (10 - x)^2 + h^2 = 8^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 = 36 - x^2 \\ (10^2 - 2 \cdot 10 \cdot x + x^2) + (36 - x^2) = 64 \end{cases}$$

$100 - 20x + x^2 + 36 - x^2 = 64$

$-20x = 64 - 136 \qquad -20x = -72 \quad /:(-20) \qquad x = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}$

$h^2 = 36 - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = 36 - \frac{324}{25} = 36 - 12\frac{24}{25} = 35\frac{25}{25} - 12\frac{24}{25} = 23\frac{1}{25} = \frac{576}{25} \qquad h = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$

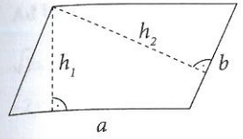
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{h} = \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{3}{4}$

Odpowiedź: Tangens kąta wynosi: $\frac{3}{4}$.

ZADANIE 8

Oblicz długość równoległoboku, którego obwód wynosi 96 cm, a wysokości są w stosunku 7 : 5.

ROZWIĄZANIE



Dane: Ob = 96 $\qquad h_2 : h_1 = 7 : 5$

Wzory: $P = ah_1 = bh_2, \qquad Ob = 2a + 2b$

Wykorzystujemy stosunek wysokości i obliczamy stosunek boków, korzystając z pola równoległoboku.

$ah_1 = bh_2 \quad /:h_1 \quad /:b$

$\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{7}{5} \qquad 5a = 7b$

Korzystamy z obwodu i obliczamy a i b.

$2a + 2b = 96$

$$\begin{cases} a + b = 48 \quad /\cdot 7 \\ 5a - 7b = 0 \end{cases}$$

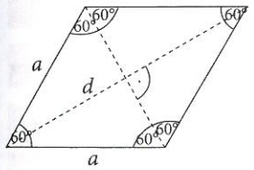
$$\begin{cases} 7a + 7b = 7 \cdot 48 \\ 5a - 7b = 0 \end{cases}$$

$12a = 7 \cdot 48 \quad /:12 \qquad a = 7 \cdot 4 = 28$ cm $\qquad b = 48 - a = 48 - 28 = 20$ cm

Odpowiedź: Boki równoległoboku mają długość 28 cm i 20 cm.

ZADANIE 9

Oblicz pole i obwód rombu o kącie 120° i dłuższej przekątnej długości 8 cm.



Dane:
$\alpha = 120°,\ d = 8$ cm, $P = ?$, $Ob = ?$, $a = ?$

Wzory:

$Ob = 4a, \quad P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ROZWIĄZANIE

Obliczamy a:

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4 \quad /\cdot 2 \qquad a\sqrt{3} = 8 \quad /\cdot\sqrt{3}$

Jeżeli kąt rozwarty ma miarę 120°, to romb składa się z dwóch trójkątów, w których wysokość jest połową przekątnej $h = 4$.

$3a = 8\sqrt{3} \quad /:3$

$a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Obliczamy obwód i pole:

$Ob = 4a = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm $\qquad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64 \cdot 3}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^2

Odpowiedź: Obwód rombu wynosi $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm, a pole $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

RÓWNANIE PROSTEJ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równanie kierunkowe prostej wyraża się wzorem $y = ax + b$, gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym a, natomiast b wyznacza na osi rzędnych punkt przecięcia z tą osią $(0, b)$.

Gdy znamy współrzędne dwóch punktów $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ przez które przechodzi prosta, to jej równanie możemy wyznaczyć, podstawiając współrzędne punktów do równania kierunkowego i rozwiązując układ równań, lub skorzystać ze wzoru:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$, gdy A i B nie są równocześnie równe zero.

Proste równoległe – dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy ich współczynniki kierunkowe są takie same: $a_1 = a_2$.

Proste prostopadłe – dwie proste są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe są liczbami przeciwnymi i odwrotnymi równocześnie, np. 2 i $-\frac{1}{2}$, -3 i $\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$.

Gdy $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$, to $a_1a_2 = -1$, $a_1 = -\frac{1}{a_2}$, $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.

ZADANIE 1

Wśród podanych równań prostych wskaż równania ogólne i kierunkowe. Zamień równania kierunkowe na ogólne i ogólne na kierunkowe.

a) $-2x + y + 10 = 0$ **b)** $\sqrt{3}x - 2y = 0$ **c)** $y = 6$

d) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ **e)** $x - 5 = 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$-2x + y + 10 = 0$ – postać ogólna

$y = 2x - 10$ – postać kierunkowa

Jest to równanie ogólne prostej. Aby zamienić je na równanie kierunkowe, należy z danego równania wyliczyć y.

Ad b)

$\sqrt{3}x - 2y = 0$ – postać ogólna

$-2y = -\sqrt{3}x$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ – postać kierunkowa

Jest to równanie ogólne prostej. Wyliczamy y.

Ad c)

$y - 6 = 0$ – postać ogólna

Ad d)

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ – postać kierunkowa

$\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{2} = 0 \quad / \cdot 6 \qquad \frac{6}{1}\cdot\frac{2}{3}x + 6y - \frac{6}{1}\cdot\frac{1}{2} = 0$

$4x + 6y - 3 = 0$ – postać ogólna

Jest to równanie kierunkowe. Aby uzyskać jego postać ogólną, wystarczy przenieść wyraz wolny na lewą stronę.

Ad e)

$x - 5 = 0$ – postać ogólna

$x = 5$ – ta prosta jest równoległa do osi rzędnych i nie ma postaci kierunkowej

ZADANIE 2

Napisz równanie ogólne prostej, wiedząc, że przechodzi ona przez punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -4)$.

ROZWIĄZANIE

$y = ax + b$

Równanie ma postać:

$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}$

Należy ułożyć układ równań, korzystając z faktu, że dane punkty należą do prostej.

$-3 = 2b, \quad b = -\frac{3}{2}$

$2a - \frac{3}{2} = -4$

$2a = -4 + \frac{3}{2}$

$2a = -\frac{5}{2}$

$a = -\frac{5}{4}$

$y = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}x + y + \frac{3}{2} = 0 \quad / \cdot 4$

$5x + 4y + 6 = 0$

Odpowiedź: Równanie ogólne prostej ma postać $5x + 4y + 6 = 0$.

ZADANIE 3

Podaj równanie kierunkowe prostej, gdy należą do niej punkty $E = (-3, 4)$ i $F = (5, -2)$.

ROZWIĄZANIE

$E = (-3, 4)$ $\quad F = (5, -2)$

$(y - y_E)(x_F - x_E) - (y_F - y_E)(x - x_E) = 0$

$(y - 4)(5 + 3) - (-2 - 4)(x + 3) = 0$

$(y - 4) \cdot 8 - (-6)(x + 3) = 0$

$8(y - 4) + 6(x + 3) = 0 \quad /:2$ $\quad 4(y - 4) + 3(x + 3) = 0$

$4y - 16 + 3x + 9 = 0$ $\quad 4y = -3x + 7 = 0 \quad /:4$

Można rozwiązać zadanie tak, jak zadanie 2, lub skorzystać ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty. Korzystamy ze wzoru.

Odpowiedź: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ – równanie kierunkowe prostej.

ZADANIE 4

Podaj równanie prostej równoległej do prostej $x - 3y + 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $B = (2, -3)$.

ROZWIĄZANIE

$x - 3y + 4 = 0$, $\quad B = (2, -3)$.

$x - 3y + 4 = 0$

Proste są równoległe, gdy ich współczynniki kierunkowe są takie same.

Zapisujemy prostą w postaci kierunkowej.

$-3y = -x - 4 \quad /\cdot(-1)$ $\quad 3y = x + 4 \quad /:3$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ – równanie prostej w postaci kierunkowej

$a = \frac{1}{3}$ – współczynnik kierunkowy prostej równoległej $\quad B = (2, -3)$

Podstawiamy dane do postaci kierunkowej prostej i obliczamy b:

$y = ax + b$ $\quad ax + b = y$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} + b = -3$ $\quad \frac{2}{3} + b = -3$ $\quad b = -3 - \frac{2}{3} = -3\frac{2}{3}$

Odpowiedź: Prosta równoległa ma równanie $y = \frac{1}{3}x - 3\frac{2}{3}$.

ZADANIE 5

Podaj równanie prostej prostopadłej do prostej $-2x - y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $C = (4, -1)$.

ROZWIĄZANIE

Z równania ogólnego prostej przechodzimy do postaci kierunkowej, by otrzymać współczynnik kierunkowy.

$-y = 2x - 1 \quad /\cdot(-1)$ $\quad y = -2x + 1$

$a = \frac{1}{2}$ – liczba przeciwna i odwrotna do -2 $\quad C = (4, -1)$

$y = ax + b$

$ax + b = y$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} + b = -1$ $\quad 2 + b = -1$ $\quad b = -1 - 2 = -3$

Podstawiamy dane do postaci kierunkowej i obliczamy b:

Odpowiedź: Równanie prostej prostopadłej to $y = \frac{1}{2}x - 3$.

ZADANIE 6

Określ wzajemne położenie prostych danych równaniami:

a) $k: y = \frac{1}{3}x - 6$ $\quad l: x - 3y = 0$

b) $k: -4x + 6y - 1 = 0$ $\quad l: x - 2y + 2 = 0$

c) $k: x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3} = 0$ $\quad l: y = \sqrt{3} \cdot x + 1$

d) $k: x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3} = 0$ $\quad l: y = \sqrt{3} \cdot x + 1$

ROZWIĄZANIE

Zapisujemy proste w postaciach kierunkowych i określamy ich położenie.

Ad a)

$k: \ y = \frac{1}{3}x - 6$ $\quad l: \ x - 3y = 0$

$-3y = -x \quad /\cdot(-1)$

$3y = x \quad /:3$

$y = \frac{1}{3}x$

Odpowiedź: Proste mają takie same współczynniki kierunkowe, są równoległe.

Ad b)

$k: -4x + 6y - 1 = 0$

$6y = 4x + 1 \quad /:6$

$y = \frac{4}{6}x + \frac{1}{6}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

$l: \ x - 2y + 2 = 0$

$-2y = -x - 2 \quad /\cdot(-1)$

$2y = x + 2 \quad /:2$

$y = \frac{1}{2}x + 1$

Odpowiedź: Proste przecinają się.

Ad c)

$k: \ x + \sqrt{3y} - 2\sqrt{3} = 0$ $\quad l: \ y = \sqrt{3}x + 1$

$\sqrt{3}y = -x + 2\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3}$

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

Odpowiedź: Proste są prostopadłe, ich współczynniki kierunkowe są przeciwne i odwrotne.

Ad d)

$k: \ y = -\frac{1}{2}x + 3$

l: $x + 2y - 6 = 0$

$2y = -x + 6 \quad /:2$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$

Odpowiedź: Równania prostych są takie same, są to dwie pokrywające się proste, czyli jedna prosta.

ZADANIE 7

Oblicz punkt przecięcia się prostych:

a) $y = 2x + 5$ i $3x + 4y - 31 = 0$ **b)** $y = 4x + 4$ i $y = 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $2x - y + 5 = 0$ i $3x + y - 2 = 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $y = 2x + 5$ i $3x + 4y - 31 = 0$

$3x + 4(2x + 5) - 31 = 0$

$3x + 8x + 20 = 31 \qquad 11x = 11 \ /:11 \qquad x = 1$

$y = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

Gdy mamy prostą w postaci kierunkowej i ogólnej, to najłatwiej podstawić w miejsce y w postaci ogólnej równanie postaci kierunkowej.

Odpowiedź: Punkt przecięcia się prostych to P = (1, 7).

Ad b) $y = 4x + 4$ i $y = 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$4x + 4 = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} \ /\cdot 3$

Gdy obie postacie są kierunkowe, najlepiej przyrównać do siebie wzory.

$12x + 12 = 5x - 2 \qquad 7x = -14 \ /:7 \qquad x = -2 \qquad y = 4 \cdot (-2) + 4 = -8 + 4 = -4$

Odpowiedź: Punkt przecięcia się prostych to P = (−2, −4).

Ad c) $2x - y + 5 = 0$ i $3x + y - 2 = 0$

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 3x + y = 2 \quad * \end{cases}$$

$5x = -3 \ /:5 \qquad x = -\frac{3}{5}$

$* \quad y = 2 - 3x = 2 - \frac{3}{1} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 2 + \frac{9}{5} = 3\frac{4}{5}$

Odpowiedź: Punkt przecięcia się prostych to $P = \left(-\frac{3}{5}, 3\frac{4}{5}\right)$

DŁUGOŚĆ I ŚRODEK ODCINKA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Długość odcinka $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Współrzędne środka S **odcinka** AB: $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$

ZADANIE 1

Punkty $C = (-2, 1)$ i $D = (3, -2)$ są końcami odcinka CD. Oblicz długość odcinka CD i współrzędne punktu S, który jest środkiem tego odcinka.

ROZWIĄZANIE

$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$ Obliczamy długość odcinka CD.

$|CD| = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$S = \left(\frac{x_E + x_F}{2}, \frac{y_E + y_F}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Obliczamy współrzędne środka odcinka CD.

Odpowiedź: Odcinek ma długość $\sqrt{34}$, a środek odcinka ma współrzędne $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

ZADANIE 2

Oblicz brakujące wartości współrzędnych końców odcinka:

a) $E = (1, 2)$, $F = (f, -3)$, $|EF| = 3\sqrt{5}$ **c)** $G = (2, -4)$, $H = (8, h)$, $|GH| = 4$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = |EF| \quad /()^2 \qquad (f-1)^2 + (-3-2)^2 = (3\sqrt{5})^2$

$(f-1)^2 + 25 = 45 \qquad (f-1)^2 - 20 = 0 \qquad (f-1)^2 - (\sqrt{20})^2 = 0$

$\left[(f-1) + \sqrt{4 \cdot 5}\right] \cdot \left[(f-1) - 2\sqrt{5}\right] = 0$ Korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$f - 1 + 2\sqrt{5} = 0$ lub $f - 1 - 2\sqrt{5} = 0$

$f_1 = 1 - 2\sqrt{5} \qquad f_2 = 1 + 2\sqrt{5}$

Odpowiedź: Współrzędne punktu F mogą mieć wartość $F_1 = (1 - 2\sqrt{5}, -3)$ lub $F_2 = (1 + 2\sqrt{5}, -3)$.

Ad b)

$\sqrt{(x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2} = |GH| \quad /()^2$

$(8-2)^2 + (h+4)^2 = 4^2 \qquad 36 + (h+4)^2 = 16 \qquad (h+4)^2 = -20$ ujemne

Odpowiedź: Taki odcinek nie istnieje, ponieważ wyrażenie podniesione do kwadratu nie może być ujemne.

ZADANIE 3

Wiedząc, że punkt S jest środkiem odcinka, oblicz brakujące współrzędne odcinka KL.

a) S = (−3, −1), K = (4, −2), L = ? **b)** S = (−2, 3), L = (−1, 5), K = ?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\left(\frac{x_K + x_L}{2}, \frac{y_K + y_L}{2}\right) = S$

$\left(\frac{4 + x_L}{2}, \frac{-2 + y_L}{2}\right) = (-3, -1)$

$\frac{4 + x_L}{2} = -3 \ /\cdot 2 \qquad \frac{-2 + y_L}{2} = -1 \ /\cdot 2$

$4 + x_L = -6 \qquad -2 + y_L = -2$

$x_L = -10 \qquad y_L = 0$

$L = (-10, 0)$

Odpowiedź: Punkt L ma współrzędne $L = (-10, 0)$.

Ad b)

$\left(\frac{x_K + x_L}{2}, \frac{y_K + y_L}{2}\right) = S$

$\left(\frac{x_K - 1}{2}, \frac{y_K + 5}{2}\right) = (-2, 3)$

$\frac{x_K - 1}{2} = -2 \ /\cdot 2 \qquad \frac{y_K + 5}{2} = 3$

$x_K - 1 = -4 \qquad y_K + 5 = 6$

$x_K = -3 \qquad y_K = 1$

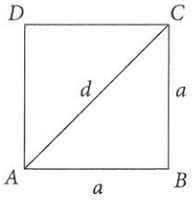
$K = (-3, 1)$

Odpowiedź: Punkt K ma współrzędne $K = (-3, 1)$.

ZADANIE 4

Oblicz pole i obwód kwadratu, gdy jego przeciwległe wierzchołki mają współrzędne $A = (-2, 1)$, $C = (3, -4)$.

ROZWIĄZANIE



Obliczamy przekątną d kwadratu – długość odcinka AC.

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(3+2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$d = 5\sqrt{2}$ $\quad d = a\sqrt{2}$ $\quad a = 5$ – długość boku kwadratu

$Ob = 4a = 4 \cdot 5 = 20$ $\quad P = a^2 = 5^2 = 25$

Odpowiedź: Pole kwadratu wynosi 25, a obwód 20.

OKRĄG W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r, $r > 0$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

ZADANIE 1

Podaj równanie okręgu, znając jego środek i promień:

a) $S = (-3, 4)$, $r = 2$ **b)** $S = (2, -5)$, $r = \frac{4}{3}$ **c)** $S = (-2, -6)$, $r = 3$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ **Ad b)** $(x - 2)^2 + (y + 5) = \frac{16}{9}$ **Ad c)** $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 9$

ZADANIE 2

Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień, znając równanie okręgu:

a) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 5$ **b)** $(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 20$ **c)** $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{49}{16}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $S = (-2, 6)$, $r = \sqrt{5}$ **Ad b)** $S = (-4, -7)$, $r = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ **Ad c)** $S = (3, 1)$, $r = \frac{7}{4}$

ZADANIE 3

Napisz równanie okręgu:

a) o promieniu 3 stycznego do obu osi układu,

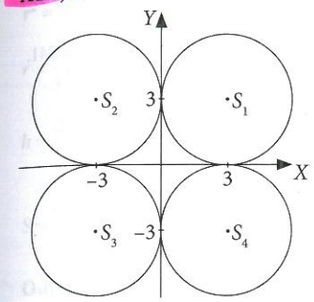
b) o środku $S = (2, -3)$ i stycznego do osi odciętych,

c) o środku $S = (-4, 5)$ i stycznego do osi rzędnych,

d) przechodzącego przez punkt $P = (8, 9)$ i stycznego do obu osi.

ROZWIĄZANIE

Ad a)



$S_1 = (3, 3)\ r = 3$ $\quad (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$S_2 = (-3, 3)$ $\quad r = 3$ $\quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

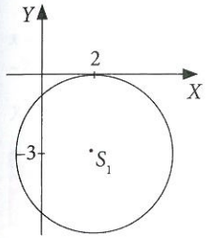
$S_3 = (-3, -3)$ $\quad r = 3$ $\quad (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

$S_4 = (3, -3)$ $\quad r = 3$ $\quad (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

Odpowiedź: Są cztery okręgi, które spełniają warunki zadania. Ich równania to: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 - (y - 3)^2$, $(x + 3)^2 + (y + 3) = 9$, $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Ad b)

$S = (2, -3)$



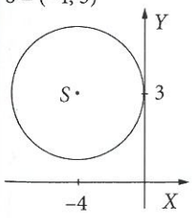
Oś odciętych to oś $0x$. Odległość punktu S od osi odciętych to 3 jednostki, więc promień okręgu ma długość 3.

$S = (2, -3)$ $\quad r = 3$

Odpowiedź: Równanie okręgu ma postać: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Ad c)

$S = (-4, 5)$



Oś rzędnych to oś $0y$. Odległość punktu S od osi $0y$ wynosi 4, więc $r = 4$.

Odpowiedź: Równanie okręgu ma postać: $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

Ad d)

Jeżeli okrąg ma być styczny do obu osi i przechodzić przez punkt z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych, to obie współrzędne środka okręgu muszą być takie same:

$S = (a, a)$, promień okręgu ma również długość a.

Jeżeli punkt P należy do okręgu, to podstawiamy współrzędne tego punktu do równania okręgu i obliczamy a.

$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ $\quad P = (8, 9)$

$8^2 - 2\cdot 8\cdot a + a^2 + 9^2 - 2\cdot 9\cdot a + a^2 = a^2$ $\quad 64 - 16a + a^2 + 81 - 18a = 0$

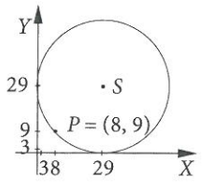
$a^2 - 34a + 145 = 0$

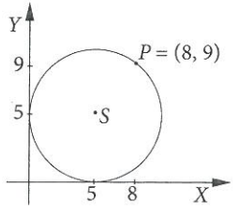
$\Delta = (-34)^2 - 4\cdot 1\cdot 145 = 1156 - 580 = 576$ $\quad \sqrt{\Delta} = 24$ $\quad a_1 = \frac{34-24}{2} = 5$ $\quad a_2 = \frac{34+24}{2} = 29$

Odpowiedź: Otrzymujemy dwa okręgi o równaniach: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ oraz $(x-29)^2 + (y-29)^2 = 841$.

Sprawdzamy poprawność obliczeń na rysunkach:

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ $\quad P = (8, 9)$ $\quad (x-29)^2 + (y-29)^2 = 841$ $\quad P = (8, 9)$

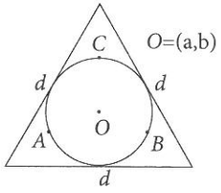




ZADANIE 4

Do okręgu należą punkty $A(0, 1)$, $B(3, 0)$ i $C(4, 3)$. Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na tym okręgu.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy rysunek.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (3-a)^2 + b^2 = r^2 \\ (4-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają okrąg. Projektujemy równanie tego okręgu, a następnie podstawiamy w miejsce x i y współrzędne danych punktów, otrzymując układ równań z trzema niewiadomymi: współrzędnymi a i b środka okręgu oraz promieniem r okręgu.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2b + 1 = r^2 \\ a^2 + b^2 - 6a + 9 = r^2 \\ a^2 + b^2 - 8a - 6b + 25 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 4b + 24 = 0 \quad /:(-4) \\ -2a - 6b + 16 = 0 \quad /:(-2) \end{cases}$$

Zauważamy, że przy odejmowaniu równań stronami (np. odejmiemy pierwsze i drugie równanie od trzeciego) zredukują się wszystkie kwadraty i pozostanie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi a i b.

$$\begin{cases} 2a + b = 6 \quad /\cdot(-1) \\ a + 3b = 8 \quad /\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - b = -6 \\ 2a + 6b = 16 \end{cases}$$

$5b = 10 \quad /:5$

$b = 2$

$a + 3\cdot 2 = 8$ $\quad a = 8 - 6 = 2$ $\quad a = 2$

$r^2 = 2^2 + (1-2)^2 = 5$ $\quad r = \sqrt{5}$

W dalszym ciągu będziemy potrzebowali jedynie promienia okręgu. Wiemy bowiem, że promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny to jedna trzecia wysokości tego trójkąta. Mając wysokość, możemy obliczyć bok trójkąta, a potem jego pole.

$r = \frac{1}{3}h$ $\quad h = 3r = 3\sqrt{5}$

$h = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{3\sqrt{5}}{1} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ $\quad d\sqrt{3} = 6\sqrt{5} \quad /\cdot\sqrt{3}$ $\quad 3d = 6\sqrt{15} \quad /:3 \quad d = 2\sqrt{15}$

$S = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 15\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $15\sqrt{3}$.

ZADANIE 5

Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek prostej $x - 2y - 6 = 0$ wycięty przez hiperbolę o równaniu: $xy = 8$.

ROZWIĄZANIE

$x - 2y - 6 = 0$

$-2y = -x + 6 \quad /\cdot(-1)$ $\quad 2y = x - 6 \quad /:2$

$y = \frac{1}{2}x - 3$ – równanie prostej w postaci kierunkowej

x	0	6	2
y	−3	0	−2

$x = 0: \ y = -3$ $\quad x = 2: \ y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} - 3 = 1 - 3 = -2$

$y = 0: 0 = \frac{1}{2}x - 3$

$-\frac{1}{2}x = -3 \quad /\cdot(-1)$

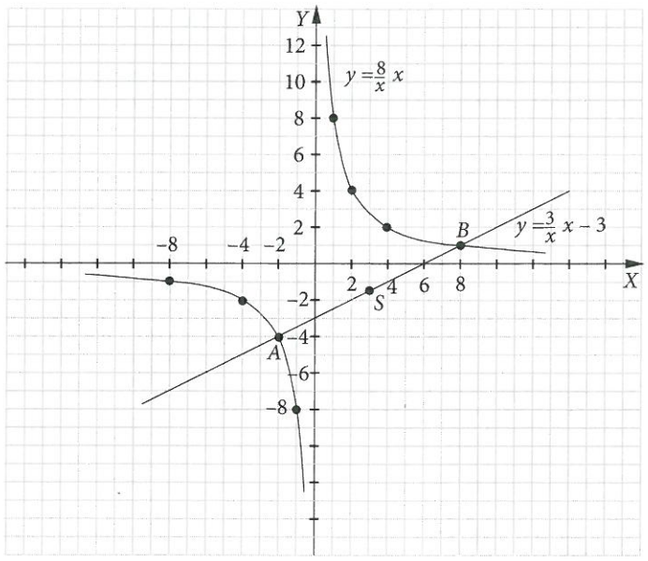
$\frac{1}{2}x = 3 \quad /\cdot 2$

$x = 6$

$xy = 8$

$y = \frac{8}{x}$

x	−8	−4	−2	−1	0	1	2	4	8
y	−1	−2	−4	−8	x	8	4	2	1



$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-3 \\ y=\frac{8}{x} \end{cases}$$

Obliczamy współrzędne punktów A i B.

$\frac{1}{2}x-3=\frac{8}{x} \quad /\cdot x$

$\frac{1}{2}x^2-3x-8=0 \quad /\cdot 2$

$x^2-6x-16=0 \qquad a=1,\ b=-6,\ c=-16$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=100 \qquad \sqrt{\Delta}=10$

$x_1=\frac{6-10}{2}=-2 \qquad y_1=\frac{8}{-2}=-4 \qquad A=(-2,-4)$

$x_2=\frac{6+10}{2}=8 \qquad y_2=\frac{8}{8}=1 \qquad B=(8,1)$

$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+8}{2},\frac{-4+1}{2}\right)=\left(3,1\frac{1}{2}\right)$

Obliczamy współrzędne punktu S – środek odcinka AB i środek okręgu.

Promień okręgu jest połową odcinka AB.

$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(8+2)^2+(1+4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{125}$

Odpowiedź: Okrąg ma równanie $(x-3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.

WIELOKĄT W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Zdobyte wcześniej wiadomości i umiejętności pozwalają rozwiązywać różnorodne zadania dotyczące trójkątów oraz czworokątów umieszczonych w układzie współrzędnych.
W zadaniach tych warto wykonać dokładny rysunek w układzie współrzędnych. Rysunek nie jest rozwiązaniem zadania, ale pozwala sprawdzić poprawność obliczeń.
Uwaga! We wzorach maturalnych znajduje się wzór na pole trójkąta, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków.

$$A=(x_A,y_A),\ B=(x_B,y_B),\ C=(x_C,y_C)$$

W wartości wzoru

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$$

ZADANIE 1

Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: $-x+y+2=0$, $y=-\frac{3}{5}x+2\frac{4}{5}$, $-7x-y+10=0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.

ROZWIĄZANIE

1) $y=x-2$ **2)** $y=-\frac{3}{5}x+2\frac{4}{5}$ **3)** $y=-7x+10$

Każdy z wierzchołków to punkt przecięcia się pary prostych.
Na przykład: A: 1 i 2, B: 2 i 3, C: 1 i 3.

A: $x-2=-\frac{3}{5}x+2\frac{4}{5}$

$1\frac{3}{5}x=4\frac{4}{5} \quad /:\frac{8}{5}$

$x=\frac{24}{5}\cdot\frac{5}{8}=3$

$y=x-2=3-2=1$

$A=(3,1)$

B: $-\frac{3}{5}x+2\frac{4}{5}=-7x+10$

$6\frac{2}{5}x=7\frac{1}{5} \quad /:\frac{32}{5}$

$x=\frac{36}{5}\cdot\frac{5}{32}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$

$y=-\frac{7}{1}\cdot\frac{9}{8}+10=-\frac{63}{8}+10=-7\frac{7}{8}+10=2\frac{1}{8}$

$B=\left(1\frac{1}{8},2\frac{1}{8}\right)$

C: $x-2=-7x+10$

$8x=12 \quad /:8$

$x=\frac{12}{8}=1\frac{1}{2}$

$y=x-2=1\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}$

$C=\left(1\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

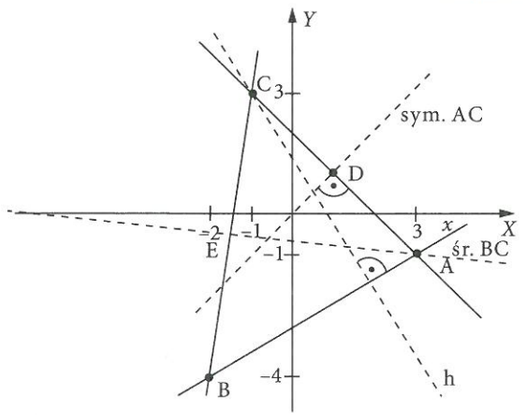
Odpowiedź: Wierzchołki mają współrzędne $A=(3,1)$, $B=\left(1\frac{1}{8},2\frac{1}{8}\right)$, $C=\left(1\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

ZADANIE 2

Korzystając z poprzedniego zadania, oblicz:

a) równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C,
b) równanie symetralnej odcinka AC,
c) równanie środkowej boku BC,
d) obwód trójkąta,
e) pole trójkąta.

ROZWIĄZANIE



Ad a)

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej h.

Prosta h, zawierająca wysokość poprowadzoną z wierzchołka C, jest prostopadła do AB, punkt C należy do prostej h. Jeżeli prosta h jest prostopadła do AB, to współczynnik kierunkowy prostej h jest liczbą przeciwną i odwrotną do współczynnika kierunkowego prostej AB.

Prosta AB to prosta o równaniu $y=\frac{3}{5}x-2\frac{4}{5}$, $a_{AB}=\frac{3}{5}$, $a_h=-\frac{5}{3}$, $C=(-1,3)$

Podstawiamy dane i obliczamy b:

$y=ax+b$ $\quad ax+b=y$

$-\frac{5}{3}\cdot(-1)+b=3$ $\quad \frac{5}{3}+b=3$ $\quad b=3-1\frac{2}{3}=2\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$ $\quad y=-\frac{5}{3}x+1\frac{1}{3}$

Odpowiedź: Równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C ma postać $y=-\frac{5}{3}x+1\frac{1}{3}$.

Ad b)

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej AC. Symetralna boku AC jest prostopadła do AC, a punkt D należy do symetralnej i jest środkiem odcinka AC.

Obliczamy współrzędne punktu D, korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

Prosta AC to prosta: $y=-x+2$ więc $a_{AC}=-1$, $a_{sym}=1$.

$$D=\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(1,1)$$

Do postaci kierunkowej podstawiamy dane: $a=1$ i $D=(1,1)$ i obliczamy b:

$y=ax+b$ $\quad ax+b=y$ $\quad 1\cdot1+b=1$ $\quad b=0$

Odpowiedź: Równanie symetralnej AC ma postać $y=x$.

Ad c)

Środkowa to prosta, która przechodzi przez wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku. Środkowa BC to prosta, do której należą punkt A oraz punkt E – środek odcinka BC.

$$E=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-2+(-1)}{2},\frac{-4+3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Wyznaczamy równanie prostej, korzystając ze wzoru na prostą przechodzącą przez dwa dane punkty.

$A=(3,-1)$ i $E=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$: $(y-y_A)(x_E-x_A)-(y_E-y_A)(x-x_A)=0$

$(y+1)\left(-\frac{3}{2}-3\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)(x-3)=0$ $\quad (y+1)\left(-4\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-3)=0$

$-\frac{9}{2}y-4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$ $\quad -\frac{9}{2}y=\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}$

$-\frac{9}{2}y=\frac{1}{2}x+3$ $\quad /\cdot(-1)$ $\quad \frac{9}{2}y=-\frac{1}{2}x-3$ $\quad /\cdot\frac{2}{9}$ $\quad y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}x-\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{9}$

Odpowiedź: Równanie środkowej boku BC ma postać $y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}$.

Ad d)

$A=(3,-1)$, $B=(-2,-4)$, $C=(-1,3)$ $\quad Ob=|AB|+|BC|+|AC|$

Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$|AB|=\sqrt{(-2-3)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

Obliczamy długość odcinka BC:

$$|BC|=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$

$$|BC|=\sqrt{(-1+2)^2+(3+4)^2}=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=5\sqrt{2}$$

Obliczamy długość odcinka AC:

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

$$|AC|=\sqrt{(-1-3)^2+(3+1)^2}=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\cdot2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$Ob=\sqrt{34}+5\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\sqrt{34}+9\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Obwód trójkąta wynosi $\sqrt{34}+9\sqrt{2}$.

Ad e)

$A=(3,-1)$ $\quad B=(-2,-4)$ $\quad C=(-1,3)$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P=\frac{1}{2}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$$

$$P=\frac{1}{2}|(-2-3)(3+1)-(-4+1)(-1-3)|=\frac{1}{2}|(-5)\cdot4-(-3)(-4)|=\frac{1}{2}|-20-12|=\frac{1}{2}|-32|=\frac{1}{2}\cdot32=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{1}=16$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi 16.

ZADANIE 3

Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach $-x + y - 3 = 0$, $-3x + y + 7 = 0$, $-x - y + 1 = 0$. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to dwie proste muszą być prostopadłe.

1) $-x + y - 3 = 0$
$y = x + 3$

2) $-3x + y + 7 = 0$
$y = 3x - 7$

3) $-x - y + 1 = 0$
$y = -x + 1$

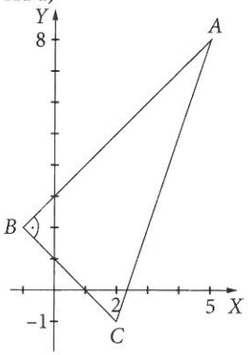
Odpowiedź: Proste $y = x + 3$ oraz $y = -x + 1$ są prostopadłe, więc trójkąt jest prostokątny.

ZADANIE 4

Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny, gdy:
a) $A = (5, 8)$, $B = (-1, 2)$, $C = (2, -1)$ **b)** $A = (-2, 1)$, $B = (-5, -8)$, $C = (1, -2)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)



Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to długości boków spełniają twierdzenie Pitagorasa. Wystarczy pokazać, że: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad /()^2$$

$$|AB|^2 = (-1-5)^2 + (2-8)^2 = (-6)^2 + (-6)^2 = 36 + 36 = 72$$

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \quad /()^2$$

$$|BC|^2 = (2+1)^2 + (-1-2)^2 = 3^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

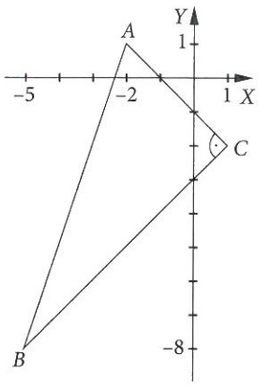
$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \quad /()^2$$

$$|AC|^2 = (2-5)^2 + (-1-8)^2 = (-3)^2 + (-9)^2 = 9 + 81 = 90$$

$L = |AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90$ $\qquad P = |AC|^2 = 90$ $\qquad L = P$

Odpowiedź: Trójkąt jest prostokątny.

Ad b)



Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych AC i BC:

$$a_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2-1}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1$$

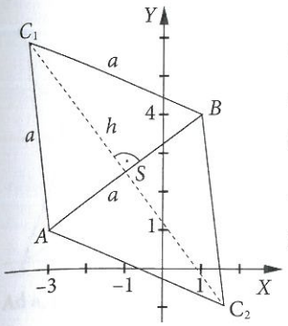
$$a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2+8}{1+5} = \frac{6}{6} = 1$$

Odpowiedź: Współczynniki kierunkowe prostych AC i BC są przeciwne i odwrotne, proste są prostopadłe, więc trójkąt jest prostokątny.

ZADANIE 5

Oblicz pole i obwód trójkąta równobocznego ABC oraz wyznacz współrzędne wierzchołka C, gdy $A = (-3, 1)$ i $B = (1, 4)$.

ROZWIĄZANIE



$$a = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$a = |AB| = \sqrt{(1+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$ – długość boku

$Ob = 3a = 3 \cdot 5 = 15$ – obwód trójkąta

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ – wzór na pole trójkąta równobocznego

$P = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ – pole trójkąta

Obliczamy współrzędne wierzchołka C. Wierzchołek C należy do prostej zawierającej wysokość trójkąta h, a długość boku trójkąta np. $AC = 5$. Prosta h jest prostopadła do AB i przechodzi przez S środek odcinka AB.

Obliczamy współczynnik kierunkowy AB:

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{1+3} = \frac{3}{4} \qquad a = -\frac{4}{3}$$ – liczba przeciwna i odwrotna do a_{AB}

Obliczamy współrzędne punktu S:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$$

$$S = \left(-1, 2\frac{1}{2}\right) \quad a = -\frac{4}{3}$$

$ax + b = y$

$$-\frac{4}{3} \cdot (-1) + b = 2\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{3} + b = 2\frac{1}{2}$$

$$b = 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 2\frac{3}{6} - 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{6} \qquad y = -\frac{4}{3}x + 1\frac{1}{6}$$ – równanie prostej zawierającej wysokość h

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \quad /()^2$$

Korzystamy ze wzoru na długość odcinka AC.

$$(x_C + 3)^2 + (y_C - 1)^2 = 5^2$$

W miejsce y_C podstawiamy równanie prostej h.

$$(x+3)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 1\frac{1}{6} - 1\right)^2 = 25$$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3}x\right)^2 = 25$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 25$$

$$x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{36} - \frac{4}{9}x + \frac{16}{9}x^2 = 25$$

$$\frac{25}{9}x^2 + 5\frac{5}{9}x - 15\frac{35}{36} = 0 \qquad \frac{25}{9}x^2 + \frac{50}{9}x - \frac{575}{36} = 0 \quad /:25 \qquad \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{23}{36} = 0 \quad /\cdot 36$$

$4x^2+8x-23=0 \qquad a=4 \qquad b=8 \qquad c=-23$

$\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\cdot 4\cdot(-23) = 64+368 = 432 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{432}=\sqrt{16\cdot 27}=4\sqrt{9\cdot 3}=12\sqrt{3}$

$x_1=\frac{-8-12\sqrt{3}}{2\cdot 4}=\frac{4(-2-3\sqrt{3})}{8}=\frac{-2-3\sqrt{3}}{2} \qquad x_2=\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}$

$y_1=-\frac{4}{3}x_1+1\frac{1}{6}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{-2-3\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{6}=\frac{8+12\sqrt{3}+7}{6}=\frac{15+12\sqrt{3}}{6}=\frac{3(5+4\sqrt{3})}{6}=\frac{5+4\sqrt{3}}{2}$

$y_2=-\frac{4}{3}x_2+1\frac{1}{6}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{6}=\frac{8-12\sqrt{3}+7}{6}=\frac{5-4\sqrt{3}}{2}$

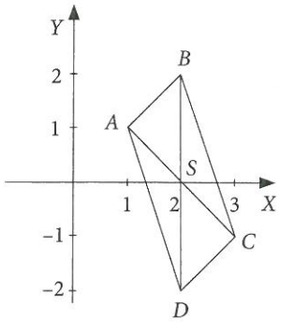
Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $\frac{25\sqrt{3}}{4}$, obwód 15, a wierzchołek C ma współrzędne

$C_1=\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2},\frac{5+4\sqrt{3}}{2}\right)$ lub $C_2=\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2},\frac{5-4\sqrt{3}}{2}\right)$.

ZADANIE 6

Punkty $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(3,-1)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Oblicz jego pole i wyznacz współrzędne wierzchołka D.

ROZWIĄZANIE



Obliczamy pole, korzystając ze wzoru na pole trójkąta, gdy dane są jego wierzchołki.

Współrzędne wierzchołka D obliczamy, korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka. Obliczamy współrzędne punktu S, który jest środkiem odcinka AC i BD.

$P_{ABCD}=2P_{\triangle ABC}$

$P_{\square ABCD}=2\cdot\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$

$P_{\square ABCD}=\left|(2-1)(-1-1)-(2-1)(3-1)\right|=\left|1\cdot(-2)-1\cdot 2\right|=\left|-2-2\right|=\left|-4\right|=4$

$S=\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1+3}{2},\frac{1-1}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{0}{2}\right)$ $S=(2,0)$ – środek odcinka BD.

$S=\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right) \qquad \left(\frac{2+x_D}{2},\frac{2+y_D}{2}\right)=(2,0)$

Korzystamy ponownie ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

$\frac{2+x_D}{2}=2 \quad /\cdot 2$ i $\frac{2+y_D}{2}=0 \quad /\cdot 2$

Porównujemy odpowiednie współrzędne.

$2+x_D=4 \qquad 2+y_D=0$

$x_D=4-2=2 \qquad y_D=0-2=-2$

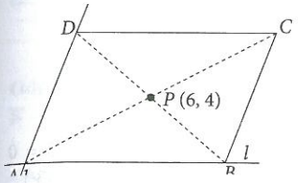
$D=(2,-2)$

Odpowiedź: Pole równoległoboku wynosi 4, a punkt D ma współrzędne $D=(2,-2)$.

ZADANIE 7

Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $x-y+1=0$ i $3x+2y-12=0$. Punkt $P(6,4)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki oraz współrzędne wierzchołków.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy rysunek, na którym dane proste są oznaczone, odpowiednio, k oraz l. Ich punkt przecięcia jest jednym z wierzchołków równoległoboku. Oznaczamy ten punkt A.

Ad a, b)

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x+1 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$

Znajdujemy współrzędne punktu A, rozwiązując układ równań danych prostych.

$\begin{cases} y=x+1 \\ 3x+2(x+1)-12=0 \end{cases}$

$8x+2x+x-12=0$

$5x=10$

$x=2, \quad y=3$

$A(2,3)$

Punkt P jest środkiem odcinka łączącego przeciwległe wierzchołki równoległoboku, punkty A i C. Obliczamy współrzędne x i y punktu C, korzystając z wzorów na współrzędne środka odcinka.

$\frac{2+x}{2}=6$ i $\frac{3+y}{2}=4$

$x+2=12$ i $y+3=8$

$x=10, \quad y=5$

$C(10,5)$

Szukamy równania prostej m, równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt C. Leży na niej kolejny bok równoległoboku, BC. Wystarczy zmienić wyraz wolny w równaniu prostej k na taki, przy którym C leży na tej prostej.

$x-y+c=0$

$10-5+c=0$

$c=-5$

$m: x-y-5=0$

Podobnie szukamy równania prostej n, równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt C. Leży na niej czwarty bok równoległoboku, CD.

$3x+2y+c=0$

$3\cdot 10+2\cdot 5+c=0$

$c=-40,$

$n: 3x+2y-40=0$

Wierzchołek B jest punktem wspólnym prostych l oraz m. Rozwiązujemy układ równań.

$\begin{cases} 3x+2y-12=0 \\ x-y-5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=x-5 \\ 3x+2(x-5)-12=0 \end{cases}$

$5x - 10 - 12 = 0 \qquad 5x = 22$

$x = \frac{22}{5}$ i $y = -\frac{3}{5}$

$B\left(\frac{22}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 40 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 1 \\ 3x + 2(x+1) = 40 \end{cases}$

Podobnie, wierzchołek D jest punktem wspólnym prostych k oraz n. Rozwiązujemy stosowny układ równań.

$5x + 2 = 40$

$x = \frac{38}{5}$ i $y = \frac{43}{5} \qquad D\left(\frac{38}{5}, \frac{43}{5}\right)$

Odpowiedź: Proste zawierające pozostałe dwa boki równoległoboku mają równania $x - y - 5 = 0$ oraz $3x + 2y - 40 = 0$, a wierzchołkami równoległoboku są punkty $(2, 3)$, $\left(\frac{22}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $(10, 5)$ i $\left(\frac{38}{5}, \frac{43}{5}\right)$.

PRZEKSZTAŁCENIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

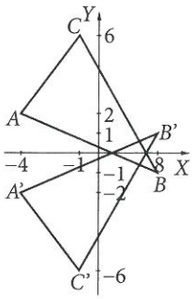
Symetria osiowa względem osi odciętych **OX** przekształca punkt **A = (x, y)** na punkt **A' = (x, –y)**.
Symetria osiowa względem osi rzędnych **OY** przekształca punkt **A = (x, y)** na punkt **A' (–x , y)**.
Symetria środkowa względem **początku układu współrzędnych** przekształca punkt **A = (x, y)** na punkt **A' (–x, –y)**.

ZADANIE 1

Znajdź obraz trójkąta o wierzchołkach A = (–4, 2), B = 3, –1) i C = (–1, 6) w symetrii względem obu osi oraz początku układu współrzędnych. Wykonaj rysunek i podaj współrzędne otrzymanych trójkątów.

ROZWIĄZANIE

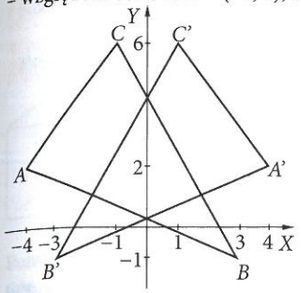
– względem osi OX: A = (–4, 2), B = (3, –1), C = (–1, 6)



Iksowe współrzędne pozostają bez zmian, a igrekowe zmieniają znak.

Odpowiedź: W symetrii względem osi OX wierzchołki trójkąta mają współrzędne: A' = (–4, –2), B' = (3, 1) i C' = (–1, –6).

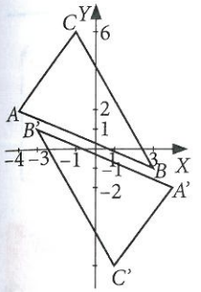
– względem osi OY: A = (–4, 2), B = (3, –1), C = (–1, 6)



Współrzędna x zmienia znak, a współrzędna y pozostaje bez zmiany.

Odpowiedź: W symetrii względem osi OY wierzchołki trójkąta mają współrzędne: A' = (4, 2), B' = (–3, –1), C' = (1, 6)

– względem początku układu współrzędnych: A = (–4, 2), B = (3, –1), C = (–1, 6)

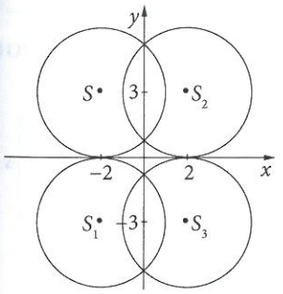


Obie współrzędne zmieniają znak.

Odpowiedź: W symetrii względem początku układu współrzędnych wierzchołki trójkąta mają współrzędne A' = (4, –2), B' (–3, 1) i C = (1, –6).

ZADANIE 2

Znajdź obraz okręgu o środku S = (–2, 3) i promieniu 3 cm względem obu osi układu i początku układu współrzędnych.



Odpowiedź: Obrazem jest okrąg o tym samym promieniu i środku: $S_1 = (–2, 3)$, symetria względem OX; $S_2 = (2, 3)$, symetria względem OY; $S_3 = (2, –3)$, symetria względem punktu (0, 0).

STEREOMETRIA

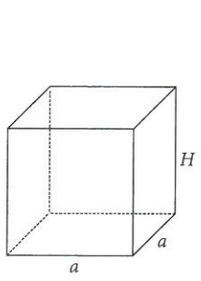
GRANIASTOSŁUPY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

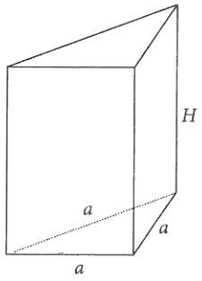
Graniastosłup prosty – wielościan, którego dwie podstawy są wielokątami przystającymi, a ściany boczne są prostokątami.

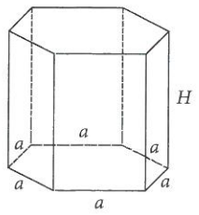
Rozwiązujemy zadania tylko z graniastosłupami prostymi, dlatego słowo prosty w treści zadania jest często pominięte.

Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, który ma w podstawie wielokąt foremny. Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma w podstawie trójkąt równoboczny, graniastosłup prawidłowy czworokątny – kwadrat, a graniastosłup prawidłowy sześciokątny – sześciokąt foremny.

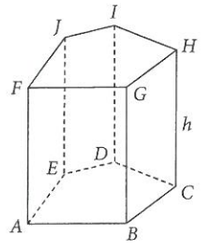


$V = P_p \cdot H$





$P = 2P_p + P_b$

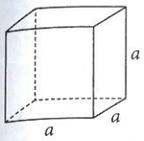


$P_b = 2ph$, **gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa**

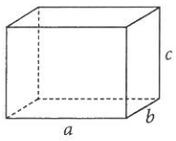
W podstawie graniastosłupa mogą pojawić się też inne wielokąty: romb, równoległobok, trójkąt prostokątny, trapez itp.

Sześcian – graniastosłup prosty, w którym wszystkie ściany są kwadratami.

Prostopadłościan – graniastosłup prosty, którego wszystkie ściany są prostokątami.



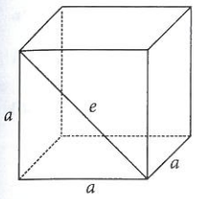
Pole całkowite: $P_c = 6a^2$
Objętość: $V = a^3$



Pole całkowite: $P_c = 2ab + 2bc + 2ac$
Objętość: $V = a \cdot b \cdot c$

ZADANIE 1

Oblicz pole i objętość sześcianu, gdy przekątna jego ściany wynosi 2 cm.



Dane:
$e = 2$ cm $\quad a = ?$ $\quad P = ?, V = ?$

Wzory:
$e = a\sqrt{2}$ $\quad P = 6a^2$ $\quad V = a^3$

ROZWIĄZANIE

$a\sqrt{2} = 2 \quad / \cdot \sqrt{2}$

$2a = 2\sqrt{2} \quad / : 2 \qquad a = \sqrt{2}$ cm

Obliczamy długość boku ze wzoru na przekątną kwadratu.

$P = 6a^2 = 6(\sqrt{2})^2 = 6 \cdot 2 = 12$ cm^2

Obliczamy pole.

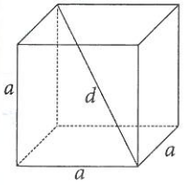
$V = a^3 = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm^3

Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Pole sześcianu wynosi 12 cm^2, a objętość $2\sqrt{2}$ cm^3.

ZADANIE 2

Oblicz objętość i długość przekątnej sześcianu, gdy jego pole wynosi 5,4 dm^2.



Dane:
$P = 5{,}4$ dm^2 $\quad a = ?$ $\quad V = ?$ $\quad d = ?$

Wzory:
$P = 6a^2$ $\quad V = a^3$ $\quad d = a\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

$6a^2 = 5{,}4 \quad / : 6$

$a^2 = 0{,}9$

Obliczamy długość boku ze wzoru na pole.

$a = \sqrt{0{,}9} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ dm

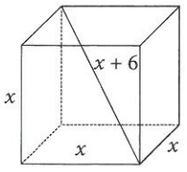
$V = a^3 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^3 = \frac{27\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{1000} = \frac{27\cdot 10\sqrt{10}}{1000} = \frac{27\sqrt{10}}{100}$ dm^3 Obliczamy objętość.

$d = a\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3\sqrt{30}}{10}$ dm Obliczamy przekątną sześcianu.

Odpowiedź: Objętość sześcianu wynosi $\frac{27\sqrt{10}}{100}$ dm^3, a przekątna ma długość $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ dm.

ZADANIE 3

Oblicz objętość i pole powierzchni sześcianu, którego przekątna jest o 6 cm dłuższa od długości jego krawędzi.



Dane:
$x\sqrt{3} = x + 6$
Wzory
$P = 6x^2$ $V = x^3$

ROZWIĄZANIE

$x\sqrt{3} = x + 6$ $x\sqrt{3} - x = 6$ Obliczamy długość krawędzi.

$x(\sqrt{3} - 1) = 6 \quad / \cdot(\sqrt{3} + 1)$

$x(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 6(\sqrt{3} + 1)$ $x((\sqrt{3})^2 - 1^2) = 6(\sqrt{3} + 1)$

$x(3 - 1) = 6(\sqrt{3} + 1)$ $2x = 6(\sqrt{3} + 1) \quad / : 2$ $x = 3(\sqrt{3} + 1)$ cm

$P = 6x^2 = 6\left[3(\sqrt{3} + 1)\right]^2 = 6\cdot 9((\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1 + 1^2) = 54(3 + 2\sqrt{3} + 1) = 54(2\sqrt{3} + 4) = 54\cdot 2(\sqrt{3} + 2) =$

$= 108(\sqrt{3} + 2)$ cm^2

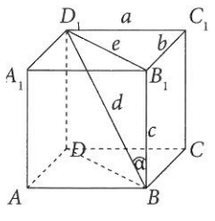
$V = x^3 = \left[3(\sqrt{3} + 1)\right]^3 = 27(\sqrt{3} + 1)^3 = 27((\sqrt{3})^3 + 3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1 + 3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2 + 1^3) = 27(3\sqrt{3} + 3\cdot 3 + 3\sqrt{3} + 1) =$

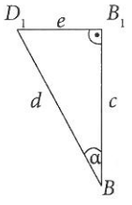
$= 27(6\sqrt{3} + 10) = 27\cdot 2(3\sqrt{3} + 5) = 54(3\sqrt{3} + 5)$ cm^3

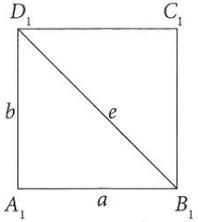
Odpowiedź: Pole sześcianu wynosi $108(\sqrt{3} + 2)$ cm^2, a objętość $54(3\sqrt{3} + 5)$ cm^3.

ZADANIE 4

Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu, w którym przekątna o długości 10 cm tworzy z krawędzią boczną kąt 30°, a jedna z krawędzi podstawy ma długość 3 cm.







Dane:
$d = 10$ cm $\alpha = 30°$ $b = 3$ cm $c = ?, e = ?, a = ?, P = ?$
Wzory:
$\frac{c}{d} = \cos\alpha$ $\frac{e}{d} = \sin\alpha$ $a^2 + b^2 = e^2$ $P = 2ab + 2bc + 2ac$

ROZWIĄZANIE

$\frac{c}{d} = \cos\alpha$ $\frac{c}{10} = \cos 30^0$ $\frac{c}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Obliczamy c z cosinusa kąta.

$2c = 10\sqrt{3} \quad / : 2$ $c = 5\sqrt{3}$ cm

$\frac{e}{d} = \sin\alpha$ $\frac{e}{d} = \sin 30^0$ $\frac{e}{d} = \frac{1}{2}$ Obliczamy e z sinusa kąta.

$2e = 10 \quad / : 2$ $e = 5$ cm

$a^2 + b^2 + e^2$ Obliczamy krawędź a z tw. Pitagorasa.

$a^2 + 3^2 = 5^2$ $a^2 = 25 - 9 = 16$ $a = 4$ cm Obliczamy pole.

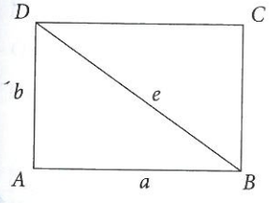
$P = 2ab + 2bc + 2ac = 2\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 5\sqrt{3} + 2\cdot 4\cdot 5\sqrt{3} = 24 + 70\sqrt{3} = 2(12 + 35\sqrt{3})$ cm^2

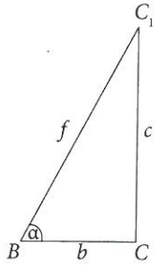
Odpowiedź: Pole prostopadłościanu wynosi $2(12 + 35\sqrt{3})$ cm^2.

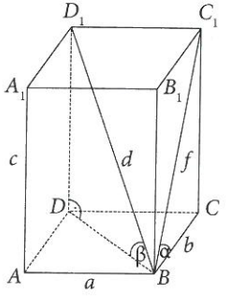
ZADANIE 5

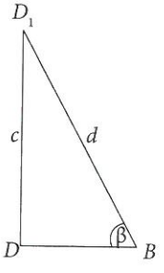
Przekątna ściany bocznej prostopadłościanu o długości 8 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 48°, a przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 32°. Oblicz objętość prostopadłościanu i długość przekątnej prostopadłościanu.

ROZWIĄZANIE









Dane: $f = 8$ cm $\alpha = 48°$ $\beta = 32°$ $a = ?, b = ?, c = ?, V = ?, d = ?$
Wzory: $\frac{c}{f} = \sin\alpha$ $\frac{b}{f} = \cos\alpha$ $\frac{c}{d} = \sin\beta$ $\frac{e}{d} = \cos\beta$ $a^2 + b^2 = e^2$ $V = abc$

ROZWIĄZANIE

$\frac{c}{f} = \sin\alpha$ $\frac{c}{8} = \sin 48°$ Obliczamy bok c z sinusa kąta α.

$\frac{c}{8} = 0{,}7431 \quad / \cdot 8$ $c = 5{,}9448 \approx 5{,}9$ cm

$\frac{b}{f} = \cos\alpha$ — Obliczamy bok b z cosinusa kąta α.

$\frac{b}{8} = \cos 48^\circ \quad / \cdot 8 \quad b = 8 \cdot 0{,}6691 = 5{,}3528 \approx 5{,}4$ cm

$\frac{c}{d} = \sin\beta \qquad \frac{5{,}9}{d} = \sin 32^\circ$ — Obliczamy długość przekątnej prostopadłościanu z sinusa kąta β.

$\frac{5{,}9}{d} = 0{,}5299 \qquad \frac{5{,}9}{d} = \frac{0{,}5299}{1}$

$0{,}5299d = 5{,}9 \quad /:0{,}5299 \qquad d \approx 11{,}1$ cm

$\frac{e}{d} = \cos\beta$ — Obliczamy przekątną z podstawy cosinusa kąta β.

$\frac{e}{11{,}1} = \cos 32^\circ \quad / \cdot 11{,}1 \qquad e = 11{,}1 \cdot 0{,}8480 \approx 9{,}4$ cm

$a^2 + b^2 = e^2 \qquad a^2 + (5{,}4)^2 = (9{,}4)^2$ — Obliczamy bok a z tw. Pitagorasa.

$a^2 = 88{,}36 - 29{,}16 = 59{,}2 \qquad a = \sqrt{59{,}2} \approx 7{,}7$ cm

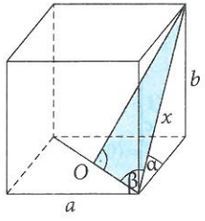
$V = abc = 7{,}7 \cdot 5{,}4 \cdot 5{,}9 = 245{,}322 \approx 245$ cm^3 — Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Przekątna prostopadłościanu ma długość 11,1 cm, a objętość wynosi 245 cm^3.

ZADANIE 6

W prostopadłościanie o podstawie kwadratu przekątna podstawy ma długość $d = 2\sqrt{2}$ cm, a kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy wynosi $\alpha = 60^\circ$. Oblicz objętość graniastosłupa. Wyznacz miarę kąta, jaki tworzy przekątna podstawy z przekątną ściany bocznej tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$d = a \cdot \sqrt{2} \qquad 2\sqrt{2} = a \cdot \sqrt{2} \qquad a = 2$ cm — Obliczamy długość krawędzi podstawy tego gra-

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}60^\circ = \frac{b}{2}, \quad b = 2 \cdot \operatorname{tg}60^\circ, \quad b = 2 \cdot \sqrt{3}$ cm — Obliczamy długość krawędzi bocznej, korzystając z funkcji trygonometrycznej w trójkącie prostokątnym BCG.

$V = a^2 \cdot b = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm^3 — Obliczamy objętość graniastosłupa.

$\cos\beta = \frac{\frac{d}{2}}{x} \qquad \frac{d}{2} = \sqrt{2} \qquad x^2 = 2^2 + (2 \cdot \sqrt{3})^2$

$x^2 = 4 + 12 \qquad x^2 = 16, \; x = 4$

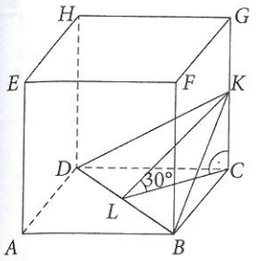
$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}3536 \qquad \beta \approx 69^\circ$ — Aby znaleźć miarę szukanego kąta, korzystamy z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym OBG. Wystarczy znaleźć wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta.

Odpowiedź: Objętość prostopadłościanu wynosi $8\sqrt{3}$ cm^3, a kąt nachylenia wynosi 69°.

ZADANIE 7

Sześcian o krawędzi $a = 12$ cm rozcięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz pole i obwód otrzymanego przekroju.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

Podstawa to przekątna kwadratu o boku długości 12 cm.
Zatem podstawa trójkąta ma długość:

$DB = 12\sqrt{2}$ cm — Przekrój jest trójkątem DBK. Aby obliczyć jego pole, należy znaleźć długość podstawy i wysokości.

$\cos 30^\circ = \frac{LC}{LK} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{LK},$

$LK = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$ cm — Długość wysokości obliczymy, korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym KLC.

$\text{Pole} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot LK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{6} = 24 \cdot \sqrt{12} =$ — Obliczamy pole przekroju.

$= 48\sqrt{3}$ cm^2

$(KL)^2 + (LB)^2 = (KB)^2$

$(4\sqrt{6})^2 + (6\sqrt{2})^2 = (KB)^2$ — Obliczamy obwód przekroju. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta KLB, aby obliczyć długość ramienia trójkąta.

$96 + 72 = (KB)^2 \qquad (KB)^2 = 168 \qquad KB = \sqrt{168}$ cm

Obwód $= (12\sqrt{2} + 2\sqrt{168})$ cm $= (12\sqrt{2} + 4\sqrt{42})$ cm

Odpowiedź: Pole jest równe $48\sqrt{3}$ cm^2, a obwód $(12\sqrt{2} + 4\sqrt{42})$ cm.

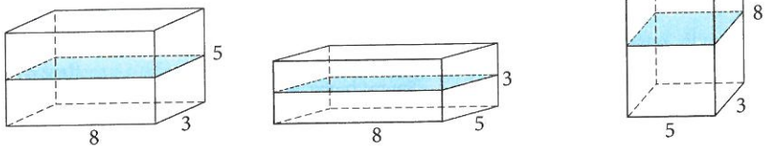
ZADANIE 8

Oblicz pole przekrojów prostopadłościanu o bokach długości 3 cm, 5 cm i 8 cm, gdy płaszczyzna przekroju:

a) jest równoległa do ściany,
b) przechodzi przez przekątne podstaw,
c) przechodzi przez wierzchołek jednej podstawy i przeciwległą krawędź drugiej podstawy,
d) przechodzi przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

ROZWIĄZANIE

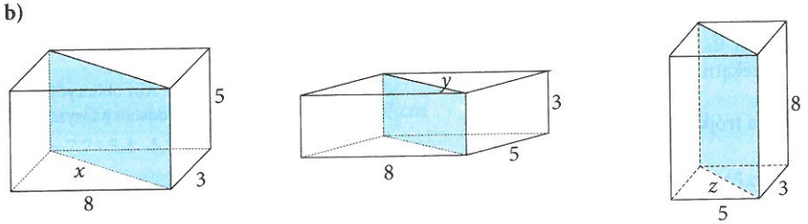
Ad a)



$P = 8 \cdot 3 = 24\ \text{cm}^2$ $P = 8 \cdot 5 = 40\ \text{cm}^2$ $P = 5 \cdot 3 = 15\ \text{cm}^2$

Odpowiedź: Pola przekrojów wynoszą odpowiednio 24 cm², 40 cm² i 15 cm².

Ad b)



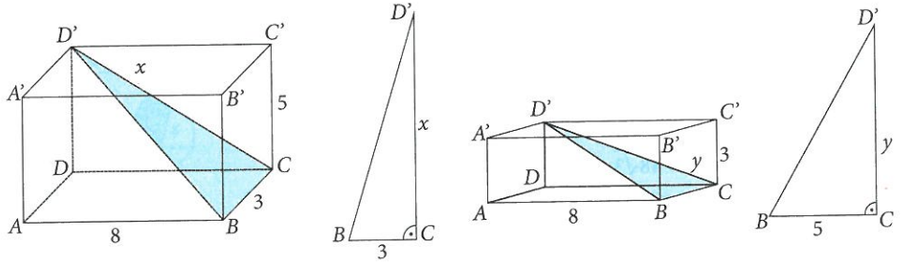
$x^2 = 8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$ $y^2 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25$ $z^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$x = \sqrt{73}$ $y^2 = 89$ $y = \sqrt{89}$ $z = \sqrt{34}$

$P = 5x = 5\sqrt{73}\ \text{cm}^2$ $P = 3y = 3\sqrt{89}\ \text{cm}^2$ $P = 8z = 8\sqrt{34}\ \text{cm}^2$

Odpowiedź: Pola przekrojów wynoszą odpowiednio $5\sqrt{73}$ cm², $3\sqrt{89}$ cm², $8\sqrt{34}$ cm².

Ad c)



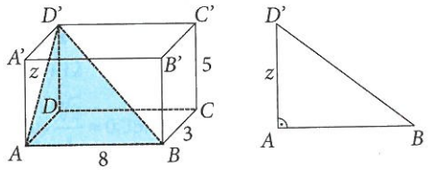
$x^2 = 8^2 + 5^2 = 89$ $x = \sqrt{89}$

$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x = \frac{3}{2}\sqrt{89}\ \text{cm}^2$

$y^2 = 8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$

$y = \sqrt{73}$

$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot y = \frac{5}{2}\sqrt{73}\ \text{cm}^2$



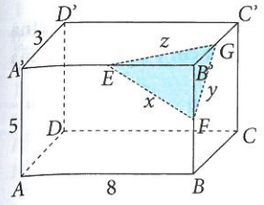
$z^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

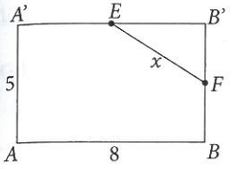
$z = \sqrt{34}$

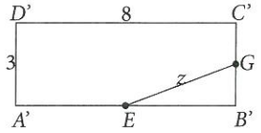
$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot z = 4z = 4\sqrt{34}\ \text{cm}^2$

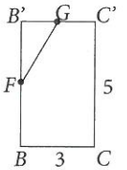
Odpowiedź: Pola przekrojów wynoszą odpowiednio $\frac{3}{2}\sqrt{89}\ \text{cm}^2, \frac{5}{2}\sqrt{73}\ \text{cm}^3, 4\sqrt{34}\ \text{cm}^2$.

Ad d)









$x^2 = (2,5)^2 + 4^2 = \frac{25}{4} + 16 =$

$= 6\frac{1}{4} + 16 = 22\frac{1}{4} = \frac{89}{4}$

$x = \frac{\sqrt{89}}{2}$

$z^2 = 4^2 + (1,5)^2 = 16 + \frac{9}{4} =$

$= 16 + 2\frac{1}{4} = 18\frac{1}{4} = \frac{73}{4}$

$z = \frac{\sqrt{73}}{2}$

$y^2 = (2,5)^2 + (1,5)^2 =$

$= \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = \frac{34}{4}$

$y = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$

Wzór na pole trójkąta, gdy dane są długości boków trójkąta.

$p = \frac{x+y+z}{2} = \frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$p = \frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}$

p – połowa obwodu trójkąta

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}-\frac{\sqrt{73}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}-\frac{\sqrt{73}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}}{4}\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}-2\sqrt{89}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}-2\sqrt{73}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{89}+\sqrt{73}+\sqrt{34}-2\sqrt{34}}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{\left[\left(\sqrt{73}+\sqrt{34}\right)^2 - 89\right]\left[89-(\sqrt{73}-\sqrt{34})^2\right]} =$$

Zmieniamy kolejność i tak zapisujemy, by otrzymać wzór skróconego mnożenia.
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{(73+2\sqrt{73\cdot 34}+34-89)(89-73+2\sqrt{73\cdot 34}-34)} =$$

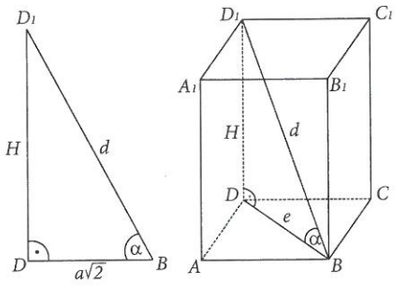
$$= \frac{1}{16}\sqrt{(2\sqrt{73\cdot 34}+18)(2\sqrt{73\cdot 34}-18)} = \frac{1}{16}\sqrt{4\cdot 73\cdot 34 - 18^2} = \frac{1}{16}\sqrt{9928-324} = \frac{1}{16}\sqrt{9604} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{98}{1} = \frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}\ \text{cm}^2$$

Odpowiedź: Pole przekroju wynosi $6\frac{1}{8}$ cm².

ZADANIE 9

Oblicz pole powierzchni bocznej, kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy i przekątną graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy jego objętość wynosi 240 cm³, a wysokość ma długość 12 cm.



Dane: $V = 240\ \text{cm}^3$ $H = 12$ $a = ?$ $P = ?$
$\alpha = ?$ $d = ?$

Wzory:

$V = Pp$ $H = a^2H$ $Pb = 4aH$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{H}{a\sqrt{2}}$ $d^2 = H^2 + (a\sqrt{2})^2$

ROZWIĄZANIE

$a^2 \cdot 12 = 240 \quad /:12$ — Obliczamy bok a ze wzoru na objętość.

$a^2 = 20 \qquad a = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$

$P_b = 4aH = 4 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 12 = 96\sqrt{5}\ \text{cm}^2$ — Obliczamy pole powierzchni bocznej.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{H}{a\sqrt{2}} = \dfrac{12}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{10}} \approx \dfrac{6}{3{,}16} \approx 1{,}8987$ — Obliczamy kąt z tangensa kąta.

$\operatorname{tg}62° = 1{,}8807 \qquad \alpha = 62°$

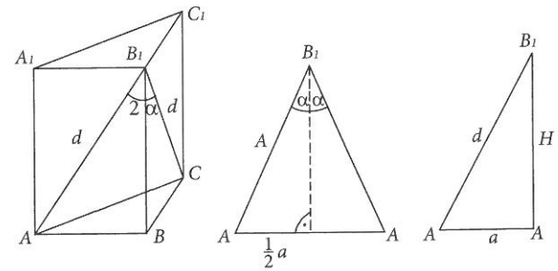
$d^2 = H^2 + (a\sqrt{2})^2 = H^2 + 2a^2 = 122 + 2 \cdot 20 = 144 + 40 = 184$ — Obliczamy długość przekątnej.

$d = \sqrt{184} = \sqrt{4 \cdot 46} = 2\sqrt{46}\ \text{cm}$

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej graniastosłupa wynosi $96\sqrt{5}\ \text{cm}^2$, kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy ma wartość 62°, a przekątna ma długość $2\sqrt{46}$ cm.

ZADANIE 10

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątne sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka mają długość 10 cm i tworzą kąt o mierze 40°. Oblicz objętość tego graniastosłupa, zaokrąglając wynik do 10 cm³.



Dane: $d = 10\ \text{cm}$ $2\alpha = 40°$
$a = ?, H = ?, V = ?$

Wzory: $\dfrac{\frac{1}{2}a}{d} = \sin\alpha$ $H^2 + a^2 = d^2$

$V = PpH = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}H$

ROZWIĄZANIE

Obliczamy bok a z sinusa kąta.

$\dfrac{\frac{1}{2}a}{10} = \sin 20° \qquad \dfrac{1}{2}a = 10 \cdot 0{,}342$

$\dfrac{1}{2}a = 3{,}42 \quad /\cdot 2 \qquad a = 6{,}84 \approx 6{,}8\ \text{cm}$

Obliczamy wysokość z tw. Pitagorasa.

$H^2 + (6{,}8)^2 = 10^2 \qquad H^2 + 46{,}24 = 100$

Obliczamy objętość.

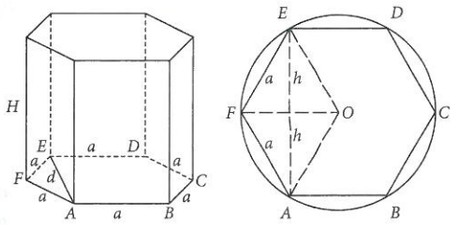
$H^2 = 100 - 46{,}24 = 53{,}76 \qquad H \approx 7{,}3\ \text{cm}$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{(6{,}8)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 7{,}3 = \frac{46{,}24\sqrt{3} \cdot 7{,}3}{4} = 84{,}388\sqrt{3} \approx 84{,}388 \cdot 1{,}73 \approx 145{,}991 \approx 150\ \text{cm}^3$$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa wynosi 150 cm³.

ZADANIE 11

Oblicz pole graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, gdy jego objętość wynosi $216\sqrt{3}$ cm³, a krótsza przekątna podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ cm.



Dane: $d = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$ $V = 216\sqrt{3}\ \text{cm}^3$
$a = ?, H = ?, V = ?$

Wzory: $d = 2h = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$V = P_pH = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}H$

$P = 2P_p + P_b = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6aH = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$

ROZWIĄZANIE

$a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3} \qquad a = 4\ \text{cm}$ — Obliczamy a z przekątnej.

$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}H = 216\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3} \qquad \dfrac{3 \cdot 4^2}{2} \cdot H = 216$ — Obliczamy H z objętości.

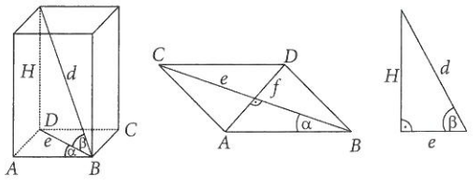
$\dfrac{3 \cdot 16}{2} \cdot H = 216 \qquad 24H = 216 \quad /:24 \qquad H = 9\ \text{cm}$ — Obliczamy pole.

$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH = 3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot 4 \cdot 9 = 48\sqrt{3} + 216 = 24(2\sqrt{3} + 9)\ \text{cm}^2$

Odpowiedź: Pole graniastosłupa wynosi $24(2\sqrt{3} + 9)\ \text{cm}^2$.

ZADANIE 12

Podstawą graniastosłupa jest romb. Dłuższa przekątna rombu, o długości 12 cm, tworzy z krawędzią podstawy kąt 30°. Dłuższa przekątna graniastosłupa tworzy z dłuższą przekątną rombu kąt 60°. Oblicz objętość graniastosłupa.



Dane: $e = 12$ $\alpha = 30°$ $\beta = 60°$ $a = ?, f = ?, H = ?, V = ?$

Wzory: $\frac{\frac{1}{2}e}{a}\cos\alpha$ $\frac{\frac{1}{2}f}{\frac{1}{2}e} = tg\alpha$ $\frac{H}{e} = tg\beta$ $V = PpH = \frac{1}{2}efH$

ROZWIĄZANIE

$\frac{6}{a} = \cos 30°$ $\frac{6}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Obliczamy bok a z cosinusa kąta.

$\sqrt{3}a = 12 \quad /\cdot\sqrt{3}$ $3a = 12\sqrt{3} \quad /:3$ $a = 4\sqrt{3}$ [cm]

$\frac{f}{12} = tg30°$ $\frac{f}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Obliczamy przekątną f z tangensa kąta.

$3f = 12\sqrt{3} \quad /:3$ $f = 4\sqrt{3}$ cm

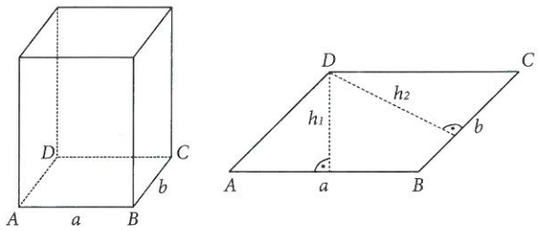
$\frac{H}{12} = tg60° \quad /\cdot 12$ $H = 12\sqrt{3}$ cm Obliczamy wysokość z tangensa kąta.

$V = \frac{1}{2}\cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 288 \cdot 3 = 864$ cm^3 Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa wynosi 864 cm^3.

ZADANIE 13

Podstawą graniastosłupa jest równoległobok, w którym dłuższa krawędź ma długość 8 cm, a wysokości mają długość 3 cm i 4 cm. Oblicz objętość graniastosłupa, gdy jego pole powierzchni całkowitej wynosi 328 cm^2.



Dane:
$a = 8$ cm $h_1 = 3$ cm $h_2 = 4$ cm
$P = 324$ cm^2 $b = ?, H = ?, V = ?$

Wzory:
$P_p = ah_1 = bh_2$ $V = P_pH$
$P = 2P_p + P_b = 2P_p + 2aH + 2bH$

ROZWIĄZANIE

$P_p = ah_1 = 8 \cdot 3 = 24$ cm^2 Obliczamy pole podstawy.

$bh_2 = P_p$ Obliczamy krawędź b ze wzoru na pole.

$b \cdot 4 = 24 \quad /:4$ $b = 6$ cm

$2P_p + 2aH + 2bH = P$ Obliczamy wysokość z pola graniastosłupa.

$2 \cdot 24 + 2 \cdot 8H + 2 \cdot 6H = 328$

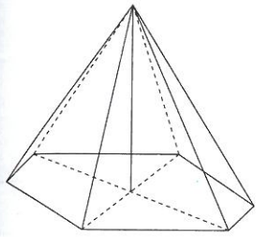
$28H = 280 \quad /:28$ $H = 10$ cm

$V = P_p \cdot H = 24 \cdot 10 = 240$ cm^3 Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa wynosi 240 cm^3.

OSTROSŁUPY

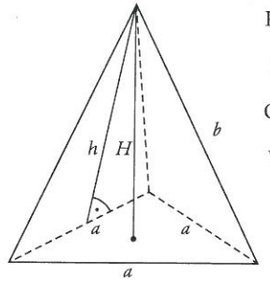
UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE



$V = \frac{1}{3}P_pH$

$P = P_p + P_b$

Ostrosłup prawidłowy trójkątny

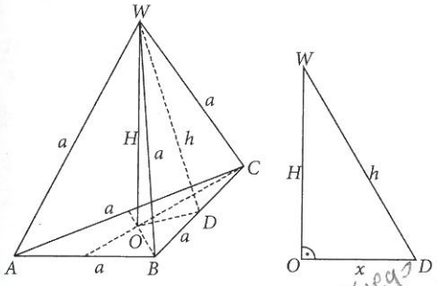


Pole całkowite:
$P_c = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Objętość:
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$

ZADANIE 1

Oblicz pole i objętość czworościanu foremnego, gdy wysokość ściany wynosi $4\sqrt{3}$ cm.



Czworościan foremny jest zbudowany z czterech trójkątów równobocznych.

Dane:
$h = 4\sqrt{3}$
$a = ?, V = ?, P = ?$

Wzory: $\frac{a\sqrt{3}}{2} = h$ $x = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $H^2 + x^2 = h^2$ $P = P_p + P_b = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$

ROZWIĄZANIE

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad /\cdot 2$ $a\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3}$ $a = 8$ cm Obliczamy a.

$x = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ Obliczamy x.

$H^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (4\sqrt{3})^2$ $H^2 + \frac{16 \cdot 3}{9} = 16 \cdot 3$ Obliczamy H.

$H^2 = 48 - \frac{16}{3} = 48 - 5\frac{1}{3} = 47\frac{3}{3} - 5\frac{1}{3} = 42\frac{2}{3} = \frac{128}{3}$

$H = \sqrt{\frac{128}{3}} = \frac{\sqrt{64 \cdot 2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{64} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm Obliczamy objętość.

$P = a^2\sqrt{3} = 8^2\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ Obliczamy pole.

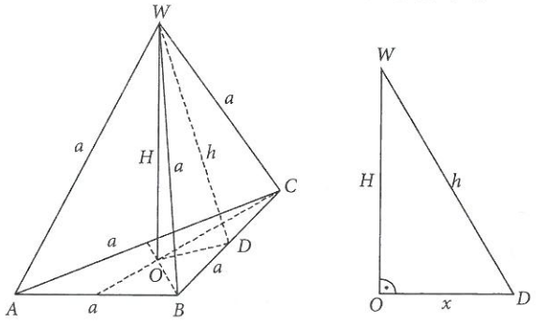
$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$ Obliczamy objętość.

$V = \frac{64\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{128\sqrt{18}}{9} = \frac{128\sqrt{9\cdot 2}}{9} = \frac{128\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{9} = \frac{128\cdot 3\sqrt{2}}{9} = \frac{128\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

Odpowiedź: Pole czworościanu wynosi $64\sqrt{3}$ cm², a objętość $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ cm³.

ZADANIE 2

Oblicz objętość czworościanu foremnego, gdy jego pole wynosi $100\sqrt{3}$ cm².



Dane:
$P = 100\sqrt{3}$ cm²
$a = ?, H = ?\ V = ?$

Wzory: $P = P_p + P_b = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{1}{3}h$ $H^2 + x^2 = h^2$

$V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$

ROZWIĄZANIE

$a^2\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\ /:\sqrt{3}$ $a^2 = 100$ $a = 10$ cm Obliczamy a ze wzoru na pole.

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ $x = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{1} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$H^2 + x^2 = h^2$ $H^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (5\sqrt{3})^2$ Obliczamy H.

$H^2 = 25\cdot 3 - \frac{25\cdot 3}{9} = 75 - \frac{25}{3} = 75 - 8\frac{1}{3} = 74\frac{3}{3} - 8\frac{1}{3} = 66\frac{2}{3} = \frac{200}{3}$

$H = \sqrt{\frac{200}{3}} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{100\cdot 2}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm

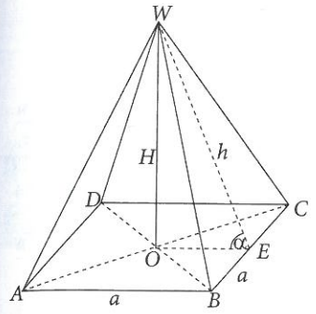
$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot H = \frac{10^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{500\sqrt{18}}{18} =$ Obliczamy objętość.

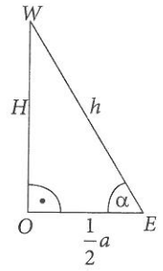
$= \frac{250\sqrt{9\cdot 2}}{9} = \frac{250\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{9} = \frac{250\cdot 3\sqrt{2}}{9} = \frac{250\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

Odpowiedź: Objętość czworościanu wynosi $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm³.

ZADANIE 3

Oblicz pole i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy wysokość ściany bocznej nachylonej do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° ma długość 8 cm.





Dane:
$h = 8$ cm $\alpha = 60°$
$a = ?, H = ?, V = ?, P = ?$

Wzory: $\frac{H}{h} = \sin\alpha$ $\frac{\frac{1}{2}a}{h} = \cos\alpha$ $V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}a^2H$ $P = P_p + P_b = a^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ah = a^2 + 2ah$

ROZWIĄZANIE

$\frac{H}{8} = \sin 60°$ $\frac{H}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Obliczamy H z sinusa kąta.

$2H = 8\sqrt{3}\ /:2$ $H = 4\sqrt{3}$ cm

$\frac{\frac{1}{2}a}{8} = \cos 60°\ /\cdot 8$ $\frac{1}{2}a = 8\cdot\frac{1}{2}\ /:\frac{1}{2}$ $a = 8$ cm Obliczamy a z cosinusa kąta.

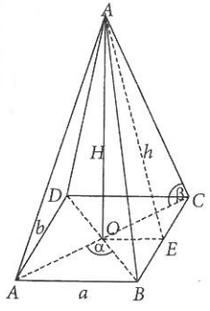
$V = \frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 4\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot 64\cdot 4\sqrt{3} = \frac{256\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$ Obliczamy objętość.

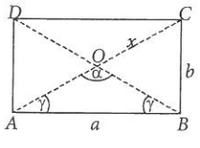
$P = 8^2 + 2\cdot 8\cdot 8 = 64 + 2\cdot 64 = 64 + 128 = 192\ \text{cm}^2$ Obliczamy pole.

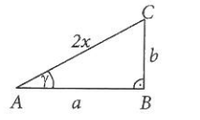
Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{256\sqrt{3}}{3}$ cm³, a pole 192 cm².

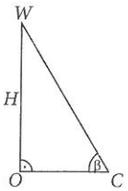
ZADANIE 4

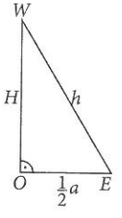
Oblicz pole i objętość ostrosłupa czworokątnego, w którym podstawa jest prostokątem o dłuższej krawędzi długości 6 cm i kącie między przekątnymi 120° oraz kącie nachylenia krawędzi wszystkich ścian bocznych do płaszczyzny podstawy o mierze 60°.











Dane: $a = 6$ cm $\quad \alpha = 120°$ $\quad \beta = 60°$ $\quad b = ?, x = ?, H = ?, h = ?, P = ?, V = ?$

Wzory: $\gamma = (180° - \alpha) : 2$ $\quad \frac{b}{a} = \text{tg}\gamma$ $\quad \cos\gamma = \frac{a}{2x}$ $\quad \frac{H}{x} = \text{tg}\beta$ $\quad h^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}abH$ $\qquad P = P_p + P_b = ab + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot ah + 2\cdot\frac{1}{2}bh = ab + ah + bh$

ROZWIĄZANIE

$\gamma = (180° - 120°) : 2 = 30°$

$\frac{b}{6} = \text{tg}30° \quad / \cdot 6$ $\qquad b = 6\text{tg}30° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2$ cm — Obliczamy bok b z tangensa kąta.

$\cos\gamma = \frac{a}{2x} \quad / \cdot 2x$ $\qquad 2x\cos 30° = 6$ — Obliczamy x z cosinusa kąta.

$2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$

$\sqrt{3}x = 6 \quad / \cdot\sqrt{3}$ $\qquad 3x = 6\sqrt{3} \quad / : 3$ $\qquad x = 2\sqrt{3}$ cm

$\frac{H}{x} = \text{tg}\beta$ — Obliczamy wysokość ostrosłupa z tangensa kąta.

$\frac{H}{2\sqrt{3}} = \text{tg}60° \quad / \cdot 2\sqrt{3}$ $\qquad H = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot 3 = 6$ cm

$h^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$ — Obliczamy wysokość ściany bocznej z tw. Pitagorasa.

$h = \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ cm

$V = \frac{1}{3}abH = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6 = 24\sqrt{3}$ cm^3 — Obliczamy objętość.

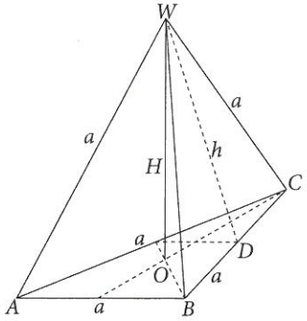
$P = ab + ah + bh = 6\cdot 2\sqrt{3} + 6\cdot 3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{5} =$ — Obliczamy pole.

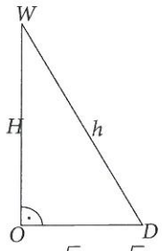
$= 12\sqrt{3} + 18\sqrt{5} + 6\sqrt{15} = 6(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + \sqrt{15})$ cm^2

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $24\sqrt{3}$ cm^3, a pole $6(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + \sqrt{15})$ cm^2.

ZADANIE 5

Pole ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $10\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość ostrosłupa z dokładnością do 1 cm^3, gdy cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{1}{9}$.





$\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Dane: $P = 10\sqrt{3}$ cm^2 $\qquad \cos\alpha = \frac{1}{9}$

$a = ?, h = ?, H = ?, V = ?$

h_1 – wysokość w podstawie

$|OD| = \frac{1}{3}h_1$

Wzory: $P = P_p + P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{1}{2}ah$ $\qquad \cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{h} = \frac{a\sqrt{3}}{6h}$

$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = h^2$ $\qquad V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$

ROZWIĄZANIE

$\frac{a\sqrt{3}}{6h} = \cos\alpha$ $\qquad \frac{a\sqrt{3}}{6h} = \frac{1}{9}$ — Wyznaczamy h z cosinusa kąta.

$6h = 9a\sqrt{3} \quad / : 3$ $\qquad 2h = 3\sqrt{3}a \quad / : 2$ $\qquad h = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a = 10\sqrt{3} \quad / \cdot 4 \quad / : \sqrt{3}$ — Podstawiamy wyznaczoną wartość h do wzoru na pole.

$a^2 + 9a^2 = 40$ $\qquad 10a^2 = 40 \quad / : 10$ $\qquad a^2 = 4$ $\qquad a = 2$ cm

$h = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = 3\sqrt{3}$ cm — Obliczamy h.

$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = h^2$ $\qquad H^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (3\sqrt{3})^2$ — Obliczamy H z tw. Pitagorasa.

$H^2 + \frac{3}{9} = 27$ $\qquad H^2 = 27 - \frac{1}{3} = 26\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}$

$H = \sqrt{\frac{80}{3}} = \frac{\sqrt{16\cdot 5}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

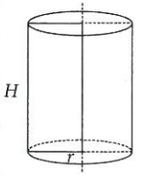
$V = \frac{2^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{5}}{12} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \approx 2{,}98 = 3$ cm^3 — Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi 3 cm^3.

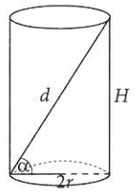
BRYŁY OBROTOWE

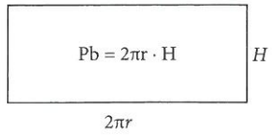
■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

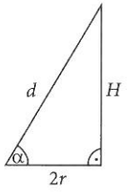
Walec – bryła obrotowa powstała przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.



Jeden z boków tego prostokąta jest wysokością walca – H, a drugi bok to promień walca – r.

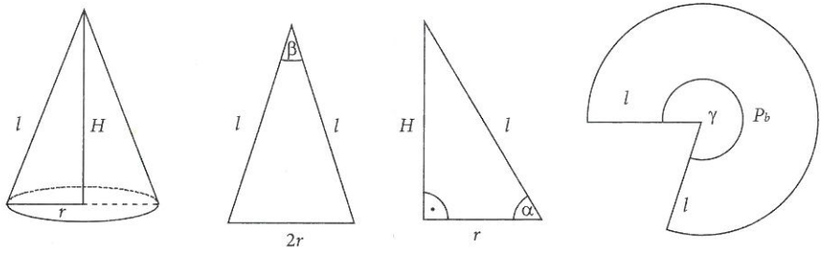






$P = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rH = 2\pi r(r + H)$ $\qquad V = P_pH = \pi r^2H$

Stożek – bryła obrotowa powstała przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



r – promień stożka H – wysokość stożka l – tworząca stożka
β – kąt rozwarcia stożka α – kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy

Podstawą stożka jest koło o promieniu r, a powierzchnia boczna jest wycinkiem koła o promieniu równym tworzącej stożka l.

Długość łuku wycinka koła o promieniu l obliczamy ze wzoru: $2\pi l \cdot \frac{\gamma}{360}$, a pole tego wycinka jest równe $P_w = \pi l^2 \cdot \frac{\gamma}{360}$.

Długość łuku wycinka koła jest równa obwodowi podstawy.

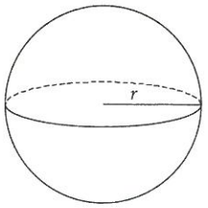
$2\pi l \cdot \frac{\gamma}{360^\circ} = 2\pi r \quad /:2\pi$

$l \cdot \frac{\gamma}{360^\circ} = r$ – z zależności tej korzystamy, gdy mamy podany kąt środkowy wycinka koła.

$V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{1}{3}\pi r^2 H \qquad P_p = \pi r^2 \qquad P_b = \pi r l$

$r^2 + H^2 = l^2 \qquad P = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l$

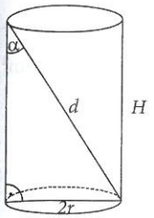
Kula – bryła obrotowa powstała przez obrót półkola dookoła prostej, w której zawarta jest średnica tego półkola.



Wzory: $P = 4\pi r^2 \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ZADANIE 1

Oblicz pole powierzchni bocznej walca o objętości $54\sqrt{3}\pi$ cm^3 i kącie nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do jego wysokości 30°.



Dane:
$V = 54\sqrt{3}\pi$ cm^3 $\alpha = 30^\circ$ $r = ?, H = ?$ $P_b = ?$

Wzory:
$V = P_p H = \pi r^2 H$ $tg\alpha = \frac{2r}{H}$ $P_b = 2\pi r H$

ROZWIĄZANIE

$tg30^\circ = \frac{2r}{H} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r}{H}$ Wyznaczamy H z tangensa kąta.

$\sqrt{3}H = 6r \quad /\cdot\sqrt{3} \qquad 3H = 6\sqrt{3}r \quad /:3 \qquad H = 2\sqrt{3}r$

$\pi r^2 H = 54\sqrt{3}\pi \quad /:\pi$

$r^2 H = 54\sqrt{3} \qquad r^2 \cdot 2\sqrt{3}r = 54\sqrt{3} \quad /:2\sqrt{3}$ Podstawiamy H do wzoru na objętość i obliczamy r.

$r^3 = 27 \qquad r = 3$ cm

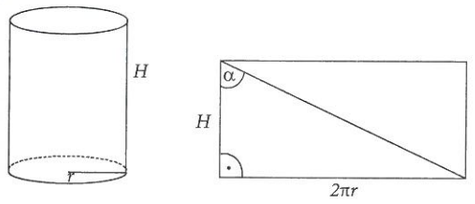
$H = 2\sqrt{3}\cdot 3 = 6\sqrt{3}$ cm^3 Obliczamy H.

$P_b = 2\pi r H = 2\pi \cdot 3 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ cm^2 Obliczamy pole powierzchni bocznej.

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej walca wynosi $36\sqrt{3}\pi$ cm^2.

ZADANIE 2

Oblicz objętość walca i kąt nachylenia przekątnej prostokąta będącego powierzchnią boczną walca do wysokości walca, gdy jego wysokość wynosi 5 dm, a pole powierzchni całkowitej 12π dm^2.



Dane:
$H = 5$ dm $P = 12\pi$ dm^2 $r = ?, V = ?, \alpha = ?$

Wzory:
$P = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r H$
$tg\alpha = \frac{2\pi r}{H} \qquad V = P_p H = \pi r^2 H$

ROZWIĄZANIE

$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 5 = 12\pi \quad /:2 \qquad r^2 + 5r = 6$ Obliczamy r z pola walca.

$r^2 + 5r - 6 = 0 \qquad \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$r_1 = \frac{-5-7}{2\cdot 1}$ – promień nie może być ujemny $\qquad r_2 = \frac{-5+7}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \qquad r = 1$ dm

$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi$ dm^3 Obliczamy objętość.

$tg\alpha = \frac{2\pi r}{H} \approx \frac{2\cdot 3{,}14 \cdot 1}{5} = \frac{6{,}28}{5} = 1{,}2560$ Obliczamy kąt α.

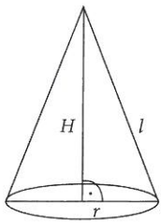
tg 51° = 1,2349 tg 52° = 1,2799

1,2560 – 1,2349 = 0,0211 1,2799 – 1,2560 = 0,0239 $\alpha = 51^\circ$

Odpowiedź: Objętość walca wynosi 5π dm^3, a kąt nachylenia przekątnej prostokąta, będącego powierzchnią boczną walca, do jego wysokości ma miarę 51°.

ZADANIE 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, gdy pole powierzchni bocznej wynosi 12π cm^2, a promień 2 cm.



Dane:
$P_b = 12\pi$ cm^2 $r = 2$ cm $l = ?$ $H = ?$ $V = ?$ $P = ?$

Wzory:
$P_b = \pi rl$ $H^2 + r^2 = l^2$ $V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}\pi r^2 H$
$P = P_p + P_b = \pi r^2 + P_b$

ROZWIĄZANIE

$\pi \cdot 2l = 12\pi \quad /:\pi \qquad 2l = 12 \quad /:2 \qquad l = 6$ cm — Obliczamy tworzącą z pola powierzchni bocznej.

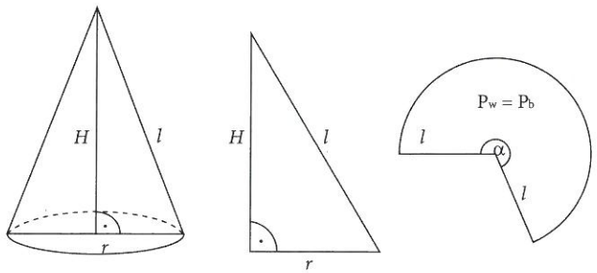
$H^2 + 2^2 = 6^2$
$H^2 = 36 - 4 = 32$
$H = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm — Obliczamy wysokość z tw. Pitagorasa.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 16\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3
$P = \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot 6 = 4\pi + 12\pi = 16\pi$ cm^2 — Obliczamy objętość i pole.

Odpowiedź: Objętość stożka wynosi $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3, a pole 16π cm^2.

ZADANIE 4

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, gdy długość łuku wycinka kołowego tworzącego powierzchnię boczną stożka wynosi 18π cm, a kąt środkowy wycinka 210°.



Dane:
$L = 18\pi$ cm $\alpha = 210°$
$l = ?$ $r = ?$
$V = ?$ $P = ?$

Wzory:
$L = 2\pi l \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $H^2 + r^2 = l^2$ $V = \frac{1}{3}P_b \cdot H = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$

$2\pi r = 2\pi l \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad /:2\pi$ $P = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi rl$ $r = l \cdot \frac{\alpha}{360°}$

ROZWIĄZANIE

$2\pi l \cdot \frac{210°}{360°} = 18\pi \quad /:2\pi \qquad l \cdot \frac{21}{36} = 9 \quad /:\frac{7}{12}$ — Obliczamy tworzącą ze wzoru na długość łuku wycinka kołowego.

$l = \frac{9}{1} \cdot \frac{12}{7} = \frac{108}{7}$ cm $\qquad r = \frac{108}{7} \cdot \frac{210°}{360°} = 9$ cm — Obliczamy promień z zależności między obwodem podstawy i długością łuku wycinka.

$H^2 + 9^2 = \left(\frac{108}{7}\right)^2 \qquad H^2 + 81 = \frac{11664}{49}$ — Obliczamy wysokość z tw. Pitagorasa.

$H^2 = 238\frac{2}{49} - 81 = 157\frac{2}{49} = \frac{7695}{49}$

$H = \sqrt{\frac{7695}{49}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 855}}{7} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9 \cdot 95}}{7} = \frac{3\sqrt{9} \cdot \sqrt{95}}{7} = \frac{9\sqrt{95}}{7}$ cm

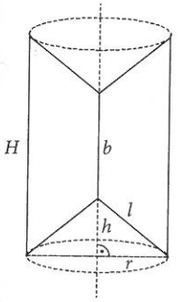
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot \frac{9\sqrt{95}}{7} = \frac{243\sqrt{95}}{7}$ cm^3 — Obliczamy objętość i pole.

$P = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot \frac{108}{7} = 81\pi + \frac{972}{7}\pi = \frac{567}{7}\pi + \frac{972}{7}\pi = \frac{1539}{7}\pi$ cm^2

Odpowiedź: Objętość stożka wynosi $\frac{243\sqrt{95}}{7}\pi$ cm^3, a pole $\frac{1539}{7}\pi$ cm^2.

ZADANIE 5

Trapez równoramienny o podstawach długości 22 cm i 10 cm oraz wysokości 8 cm obraca się dookoła krótszej podstawy. Oblicz objętość i pole powstałej bryły.



Dane:
$H = 22$ cm $r = 8$ cm $h = ?$ $l = ?$ $P_f = ?$ $V_f = ?$

Wzory:
$h = \frac{H - b}{2}$, $l^2 = h^2 + r^2$
$V_f = V_w - 2V_s = \pi r^2 H - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r^2\left(H - \frac{2}{3}h\right)$
$P_f = P_{bw} + 2P_{bs} = 2\pi rH + 2\pi rl = 2\pi r(H + l)$

Gdy obracamy trapez wokół krótszej podstawy, otrzymujemy walec i dwa stożki. Stożki te są puste, więc przy objętości figury musimy od objętości dużego walca odjąć objętość dwóch stożków. Pole figury jest sumą pola bocznego walca i dwóch pól bocznych stożka.

ROZWIĄZANIE

$h = \frac{22 - 10}{2} = \frac{12}{2} = 6$ [cm] — Obliczamy wysokość stożka.

$l^2 = h^2 + r^2 \qquad l^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \qquad l = 10$ cm — Obliczamy tworzącą stożka.

$V_f = \pi r^2\left(H - \frac{2}{3}h\right) = \pi \cdot 8^2\left(22 - \frac{2}{3} \cdot 6\right) =$ — Obliczamy objętość figury.

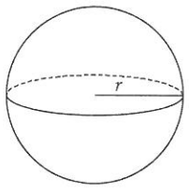
$= \pi \cdot 64(22 - 4) = 64\pi \cdot 18 = 1152\pi$ cm^3

$Pf = 2\pi \cdot 8(22 + 10) = 16\pi \cdot 32 = 512\pi$ cm^2 — Obliczamy pole figury.

Odpowiedź: Objętość figury wynosi 1152π cm^3, a pole 512π cm^2.

ZADANIE 6

Oblicz pole powierzchni kuli, gdy jej objętość wynosi 36π cm^3.



Dane: $V = 36\pi$ cm^3 $r = ?$ $P = ?$

Wzory: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $P = 4\pi r^2$

ROZWIĄZANIE

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad /:\pi$ $\quad \frac{4r^3}{3} = 36 \quad /\cdot 3$ — Obliczamy r z objętości.

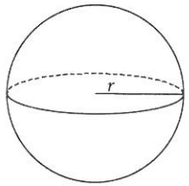
$4r^3 = 36 \cdot 3 \quad /:4$ $\quad r^3 = 9 \cdot 3 = 27$ $\quad r = \sqrt[3]{27} = 3$ cm — Obliczamy pole.

$P = 4\pi \cdot 3^2 = 49\pi \cdot 9 = 36\pi$ cm^2

Odpowiedź: Pole powierzchni kuli wynosi 36π cm^2.

ZADANIE 7

Oblicz objętość kuli, gdy pole kuli wynosi 30π cm^2.



Dane:
$P = 30$ cm^2 $\quad r = ?, V = ?$

Wzory:
$P = 4\pi r^2$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^2$

ROZWIĄZANIE

$4\pi r^2 = 30\pi \quad /:2\pi$ $\quad 2r^2 = 15 \quad /:2$ — Obliczamy r ze wzoru na pole.

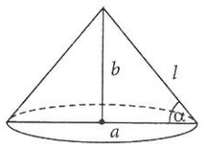
$r^2 = \frac{15}{2}$ $\quad r = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ cm

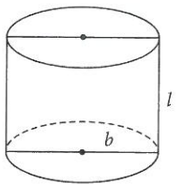
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{30\sqrt{30}}{8} = \frac{10\sqrt{30}}{2}\pi = 5\sqrt{30}\pi$ cm^3 — Obliczamy objętość.

Odpowiedź: Objętość wynosi $5\sqrt{30}\pi$ cm^3.

ZADANIE 8

Wysokość walca i tworząca stożka są tej samej długości, mają również równe pola powierzchni bocznej i równe objętości. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.





Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym α oznacza poszukiwany kąt.

ROZWIĄZANIE

Niech a oznacza promień podstawy stożka, h wysokość stożka, zaś l tworzącą stożka (a zarazem, zgodnie z warunkami zadania, wysokość walca). Niech także b oznacza promień podstawy walca. Napiszmy równania wynikające z równości wskazanych w temacie.

$\pi al = 2\pi bl$

$a = 2b$

$\frac{1}{3}\pi a^2 h = \pi b^2 l$

$\frac{1}{3}\pi \cdot 4b^2 h = \pi b$

$\frac{h}{l} = \frac{3}{4}$, więc $\sin\alpha = \frac{3}{4}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ — Obliczamy $\cos\alpha$, biorąc pod uwagę, że α jest kątem ostrym.

Odpowiedź: Cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

PODSTAWOWE PARAMETRY STATYSTYCZNE I ICH INTERPRETACJA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa: $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa: $\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$.

Obliczając średnią ważoną, w liczniku ułamka zapisujemy iloczyny wag i przypisanej jej wartości, a w mianowniku dodajemy wszystkie wagi. Nie ma symbolu określającego średnią ważoną, możemy ją oznaczać w dowolny sposób, np.: $śr_w = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + ... + w_n a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$.

Moda (dominanta) danych – wartość, która występuje najczęściej. Tych wartości może być kilka.

Mediana uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$:

- dla n nieparzystych $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu),
- dla n parzystych $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu).

Wariancja n danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ to liczba:

$$\delta^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + ... + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe δ – pierwiastek kwadratowy z wariancji.

ZADANIE 1

Trzydziestu studentów pierwszego roku matematyki uzyskało następujące wyniki z testu z algebry (na teście można było uzyskać od 0 do 100 punktów):

67	72	51	87	90	76	61	48	57	32
97	63	18	58	65	74	99	30	49	0
50	100	69	70	53	63	75	88	81	60

a) Uporządkuj wyniki rosnąco.
b) Znajdź średnią arytmetyczną próbki.
c) Wyznacz medianę.
d) Przedstaw wyniki testu w postaci grafu słupkowego.
e) Skonstruuj dla danej próbki szereg rozdzielczy.
f) Oblicz średnią ważoną próbki.
g) Skonstruuj diagram kołowy.
h) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe.

ROZWIĄZANIE

Ad a)
Aby sobie ułatwić badanie własności tej próbki, porządkujemy liczby rosnąco:

0	18	30	32	48	49	50	51	53	57
58	60	61	63	63	65	67	69	70	72
74	75	76	81	87	88	90	97	99	100

Ad b)
Aby obliczyć wartość jednego z najprostszych parametrów próbki, średnią arytmetyczną, należy dodać do siebie wszystkie liczby z tabeli i ich sumę podzielić przez liczbę wyników. Otrzymujemy działanie:

$$s_a = \frac{1903}{30} \approx 63{,}43$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna próbki wynosi 63,43.

Ad c)
Nasza próbka ma 30 elementów, zatem mediana jest średnią arytmetyczną liczb stojących w uporządkowanej tabeli na miejscach piętnastym i szesnastym. Mediana wynosi:

$$M_e = \frac{63 + 65}{2} = 64$$

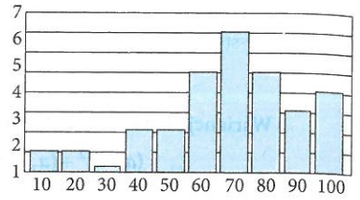
Odpowiedź: Mediana wynosi 64.

Ad d)

Aby szybciej i łatwiej dostrzec pewne jakościowe własności próbki, dokonuje się klasyfikacji danych. W tym przypadku można je zgrupować w przedziałach postaci

$\langle 10n, 10\cdot(n+1))$, $n=0,1,2,3,4,5,6,7,8$ *i* $\langle 90,100\rangle$.

Zamiast dokładnych wartości danych zaznaczamy jedynie liczbę danych w poszczególnych grupach, przedstawiając wyniki w postaci histogramu liczebności. Ten sposób organizacji danych (rys.) nazywa się grafem słupkowym.



Ad e)

Zamiast w postaci histogramu można rezultat klasyfikacji danych zapisać jako tzw. szereg rozdzielczy. Jest to dwukolumnowa tabela. W pierwszej kolumnie wpisujemy kolejne klasy, tj. przedziały, na jakie podzieliliśmy najmniejszy przedział mieszczący wszystkie dane w próbce. W drugiej kolumnie zapisujemy dane mieszczące się w każdej klasie. Można dodać jeszcze jedną kolumnę, a w niej umieścić liczby wskazujące, ile danych mieści się w każdej klasie.

Klasa	Dane	Liczebność
⟨0, 10)	0	1
⟨10, 20)	18	1
⟨20, 30)		0
⟨30, 40)	30, 32	2
⟨40, 50)	48, 49	2
⟨50, 60)	50, 51, 53, 57, 58	5
⟨60, 70)	60, 61, 63, 63, 65, 67, 69	7
⟨70, 80)	70, 72, 74, 75, 76	5
⟨80, 90)	81, 87, 88	3
⟨90, 100⟩	90, 97, 99, 100	4

Ad f)

Po zgrupowaniu danych można obliczyć przybliżoną średnią próbki. W tym celu każdą liczbę zaliczoną do danej klasy zastępujemy środkową liczbą tej klasy.

Klasa	Liczba środkowa	Liczebność
⟨0, 10)	5	1
⟨10, 20)	15	1
⟨20, 30)	25	0
⟨30, 40)	35	2
⟨40, 50)	45	2
⟨50, 60)	55	5
⟨60, 70)	65	7
⟨70, 80)	75	5
⟨80, 90)	85	3
⟨90, 100⟩	95	4

$$\text{Średnia ważona} = \frac{1\cdot 5+1\cdot 15+0\cdot 25+2\cdot 35+2\cdot 45+5\cdot 55+7\cdot 65+5\cdot 75+3\cdot 85+4\cdot 95}{30} = \frac{1920}{30} = 64$$

Odpowiedź: Średnia ważona wynosi 64.

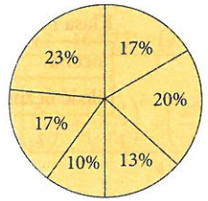
Ad g)

Diagramu kołowego używamy wtedy, gdy chcemy zilustrować względne częstości pojawiania się różnych wartości cechy. na diagramie kołowym kąty środkowe odpowiadające poszczególnym wartościom cechy są wprost proporcjonalne do liczebności tych wartości.

Zilustrujemy częstości występowania poszczególnych ocen w omawianym przykładzie:

Liczba punktów	Ocena	Liczebność	Częstość	Częstość w %
⟨0, 50)	2,0	6	$\frac{6}{30}$	20,0
⟨50, 60)	3,0	5	$\frac{5}{30}$	16,7
⟨60, 70)	3,5	7	$\frac{7}{30}$	23,3
⟨70, 80)	4,0	5	$\frac{5}{30}$	16,7
⟨80, 90)	4,5	3	$\frac{3}{30}$	10,0
⟨90, 100⟩	5,0	4	$\frac{4}{30}$	13,3

A oto diagram kołowy: (dane procentowe zostały zaokrąglone do liczb całkowitych)



Ad h)

Wariancja służy do pomiaru odchylenia liczb próbki od jej średniej.

$$s^2 = \frac{(0-64)^2+(18-64)^2+\ldots+(99-64)^2+(100-64)^2}{30} \approx 521{,}7$$

Średnie odchylenie standardowe to pierwiastek kwadratowy z wariancji i wynosi ok. 22,84.

Odpowiedź: Wariancja wynosi 521,7, a odchylenie standardowe 22,84.

ZADANIE 2

Nauczyciele matematyki jednej ze szkół wspólnie ustalili, że w każdym semestrze będą oceniali: 1) pracę klasową, która obejmie materiał całego półrocza, 2) sprawdziany z działu lub większej partii materiału, 3) kartkówki obejmujące niewielką ilość materiału, 4) odpowiedzi obejmujące rozwiązywanie krótkich przykładów przy tablicy, 5) zadania domowe, 6) aktywność obejmującą udział w konkursach, wykonanie zadań dodatkowych lub inne szczególne zasługi. Nie doszli do porozumienia, jakie przypisać im wagi, i postanowili, że każdy dokona własnego przydziału. Numerami są oznaczone oceny uzyskane za wskazane wcześniej umiejętności ucznia.

Przydział wag

Pan Jacek: 1) waga 6 2) waga 5 3) waga 4 4) waga 3 5) waga 2 6) waga 1
Pani Jola: 1) waga 6 2) waga 5 3) waga 3 4) waga 1 5) waga 2 6) waga 4
Pani Kasia: 1) waga 12 2) waga 9 3) waga 6 4) waga 3 5) waga 1 6) waga 4

Jaką średnią otrzyma uczeń, zdobywając następujące oceny: 1) 1, 2) 2, 3) 3, 4) 4, 5) 5, 6) 6?

ROZWIĄZANIE

Pan Jacek:

$$śr_w = \frac{6\cdot1+5\cdot2+4\cdot3+3\cdot4+2\cdot5+1\cdot6}{6+5+4+3+2+1} = \frac{6+10+12+12+10+6}{21} = \frac{56}{21} \approx 2{,}7$$

Pani Jola:

$$śr_w = \frac{6\cdot1+5\cdot2+3\cdot3+1\cdot4+2\cdot5+4\cdot6}{6+5+3+1+2+4} = \frac{6+10+9+4+10+24}{21} = \frac{63}{21} = 3{,}0$$

Pani Kasia:

$$śr_w = \frac{12\cdot1+9\cdot2+6\cdot3+3\cdot4+1\cdot5+4\cdot6}{12+9+6+3+1+4} = \frac{12+18+18+12+5+24}{35} = \frac{89}{35} \approx 2{,}5$$

Odpowiedź: Wydaje się, że średnia ważona jest dużo sprawiedliwsza od średniej arytmetycznej. Różnice w średniej ważonej wynikają z przypisania wag poszczególnym ocenom.

ZADANIE 3

W dwóch 24-osobowych klasach przeprowadzono test diagnostyczny z matematyki. W klasie A było 14 ocen dopuszczających, 5 dostatecznych i 5 niedostatecznych, a w klasie B: 2 bardzo dobre, 3 dobre, 2 dostateczne, 3 dopuszczające i 14 niedostatecznych. Dokonaj analizy wyników obu klas.

ROZWIĄZANIE

Klasa A:

ocena	3	2	1
ilość uczniów	5	14	5

Klasa B:

ocena	4	4	3	2	1
ilość uczniów	2	3	2	3	14

Średnia arytmetyczna:

$$\text{A: } \bar{a} = \frac{3\cdot5+2\cdot14+1\cdot5}{24} = \frac{15+28+5}{24} = \frac{48}{24} = 2{,}0$$

$$\text{B: } \bar{a} = \frac{5\cdot2+4\cdot3+3\cdot2+2\cdot3+1\cdot14}{24} = \frac{10+12+6+6+14}{24} = \frac{48}{24} = 2{,}0$$

Moda: A: $M_o = 2$ B: $M_o = 1$ Mediana: A: $M_e = 2$ B: $M_e = 1$

Wariancja i odchylenie standardowe:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+\ldots+(a_n-\bar{a})^2}{n} \quad \text{lub} \quad \sigma^2 = \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n}{n} - (\bar{a})^2, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\text{A: } \sigma^2 = \frac{5\cdot(3-2)^2+14\cdot(2-2)^2+5\cdot(1-2)^2}{24} = \frac{5\cdot1^2+14\cdot0^2+5\cdot(-1)^2}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0{,}65$$

$$\text{B: } \sigma^2 = \frac{2\cdot5^2+3\cdot4^2+2\cdot3^2+3\cdot2^2+14\cdot1^2}{24} - 2^2 = \frac{2\cdot25+3\cdot16+2\cdot9+3\cdot4+14\cdot1}{24} - 4 =$$

$$= \frac{50+48+18+12+14}{24} - 4 = \frac{142}{24} - 4 = \frac{71}{12} - 4 = 5\frac{11}{12} - 4 = 1\frac{11}{12} = \frac{23}{12} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{23}{12}} \approx 1{,}38$$

Odpowiedź: Klasy liczą tyle samo uczniów. Średnie ocen z testu są takie same, ale dużo trudniejsza będzie praca w klasie B, o czym świadczy dużo większe odchylenie standardowe, czyli zróżnicowanie ocen. W tej klasie wielu uczniów uzyskało oceny niedostateczne, ale kilku uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą lub dobrą. W klasie A zróżnicowanie ocen jest małe, wszyscy prezentują podobny poziom.

ZADANIE 4

Pomóż trenerowi Łukaszowi Kruczkowi wybrać czwartego zawodnika do reprezentacji skoczków narciarskich w konkursie drużynowym. Wybierz jednego z dwóch kandydatów, pamiętając, że w turnieju drużynowym najważniejsze jest wykonanie dwóch dobrych skoków.

Cztery skoki decydujące o wyborze do reprezentacji.

I skoczek	106	102,5	112	98,5
II skoczek	103	106,5	104,5	105

ROZWIĄZANIE

I skoczek:

$$\bar{a} = \frac{106+102{,}5+112+98{,}5}{4} = \frac{218+201}{4} = \frac{419}{4} = 104{,}75 \text{ m}$$

II skoczek:

$$\bar{a} = \frac{103+106{,}5+104{,}5+105}{4} = \frac{208+211}{4} = \frac{419}{4} = 104{,}75 \text{ m}$$ – średnia taka sama.

Odchylenia standardowe $\bar{a} = 104{,}75$ m

I skoczek: 106; 102,5; 112; 98,5

$$\sigma^2 = \frac{(106-104{,}75)^2+(102{,}5-104{,}75)^2+(112-104{,}75)+(98{,}5-104{,}75)}{4} =$$

$$= \frac{(1{,}25)^2+(-2{,}25)^2+(7{,}25)^2+(-6{,}25)^2}{4} = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{29}{4}\right)^2+\left(\frac{25}{4}\right)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{25}{16}+\frac{81}{16}+\frac{841}{16}+\frac{625}{16}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1572}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1572}{64} = 24{,}5625$$

$$\sigma = \sqrt{24{,}5625} \approx 4{,}96 \text{ m}$$

II skoczek: 103; 106,5; 104,5; 105

$$\sigma^2 = \frac{(103-104{,}75)^2+(106{,}5-104{,}75)^2+(104{,}5-104{,}75)^2+(105-104{,}75)^2}{4} =$$

$$= \frac{(-1{,}75)^2+(1{,}75)^2+(-0{,}25)^2+(0{,}25)^2}{4} = \frac{\left(-\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{49}{16}+\frac{49}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{100}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{100}{64} = 1{,}5625$$

$$\sigma = \sqrt{1{,}5625} \approx 1{,}25 \text{ m}$$

Odpowiedź: Jeżeli trener preferuje równe i dobre skoki, powinien wybrać drugiego skoczka, bo jego skoki były podobne, niewiele odbiegające od średniej. Jednak jeśli lubi ryzyko i liczy na niespodziankę, to powinien wybrać pierwszego zawodnika, który może skoczyć bardzo daleko, ale może też skok zepsuć.

ZADANIE 5

Mleczarnia dostarcza do sklepów serie stu półlitrowych butelek mleka. Przedstawiciel konkurencyjnej firmy zauważył, że w jednej z nich mleka jest mniej. Wybrana seria butelek została poddana kontroli. Oto jej wyniki. Co mówią o rzetelności firmy?

Zawartość mleka w butelce	0,41	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52
Liczba butelek	1	2	12	25	44	14	2

$$\bar{a} = \frac{1\cdot 0{,}41+2\cdot 0{,}47+12\cdot 0{,}48+25\cdot 0{,}49+44\cdot 0{,}50+14\cdot 0{,}51+2\cdot 0{,}52}{100} =$$

$$= \frac{0{,}41+0{,}49+5{,}76+12{,}25+22+7{,}14+1{,}04}{100} = \frac{49{,}54}{100} \approx 0{,}501$$

$$\sigma^2 = \frac{(0{,}41-0{,}50)^2+2(0{,}47-0{,}50)^2+12(0{,}48-0{,}50)^2+25(0{,}49-0{,}50)^2+44(0{,}50-0{,}50)^2+14(0{,}51-0.50)^2+2(0{,}52-0{,}50)^2}{100} =$$

$$= \frac{(-0{,}09)^2+2(-0{,}03)^2+12(-0{,}02)^2+25(-0{,}01)^2+44\cdot 0^2+14(0{,}01)^2+20{,}02)^2}{100} =$$

$$= \frac{81+2\cdot 9+12\cdot 4+25\cdot 1+14\cdot 1+2\cdot 4}{10000}\cdot\frac{1}{100} = \frac{194}{1000000} = 0{,}000194$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}000194} \approx 0{,}014$$

Odchylenie: $(\bar{a}-\sigma;\ \bar{a}+\sigma)$ $(0{,}5-0{,}014;\ 0{,}5+0{,}014)$ $(0{,}484;\ 0{,}514)$

0,49	0,50	0,51
25	44	14

$25 + 44 + 14 = 83$

Odpowiedź: 83% butelek mieści się w odchyleniu standardowym, co potwierdza rzetelność firmy. Minimalne odchylenie standardowe firmy świadczy o jej wybitnej rzetelności, a jedna butelka o mniejszej zawartości mleka jest wyjątkiem i nie ma wpływu na jakość usług firmy.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZDARZEŃ – KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA, ZASADA MNOŻENIA I DODAWANIA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Własności podobieństwa

$0 \le P(A) \le 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(A) = 1$ A – zdarzenie pewne

$P(A) = 0$ A – zdarzenie niemożliwe

$P(A) \le P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. **Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe** $P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$, gdzie symbol $\bar{\Omega}$ **oznacza liczbę elementów zbioru** Ω, zaś $\bar{A}$ **– liczbę elementów sprzyjających danemu zdarzeniu.**

ZADANIE 1

Z grupy składającej się z 4 kobiet i 6 mężczyzn wybieramy na przemian po jednej osobie różnej płci, tak długo jak to możliwe, i ustawiamy je jedna za drugą. Na ile sposobów można to uczynić, jeżeli wiadomo, że na początku stoi: **a)** kobieta, **b)** mężczyzna?

ROZWIĄZANIE

a) $k_1\ m_1\ k_2\ m_2\ k_3\ m_3\ k_4\ m_4$
$4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = 8640$

b) $m_1\ k_1\ m_2\ k_2\ m_3\ k_3\ m_4\ k_4\ m_5$
$6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 17280$

Odpowiedź: Kobiety i mężczyzn można ustawić naprzemiennie odpowiednio na 8640 oraz 17280 sposobów.

ZADANIE 2

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można ułożyć z cyfr ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5}? Ile jest wśród nich liczb parzystych, a ile nieparzystych?

ROZWIĄZANIE

Pierwszą cyfrę wybieramy na 5 sposobów (bo nie wybieramy cyfry 0). Drugą już bez ograniczeń z pozostałych 5 cyfr, zatem także na pięć sposobów. Trzecią cyfrę wybieramy na 4 sposoby, a czwartą na trzy.
$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Teraz spróbujemy ustalić, ile jest liczb parzystych wśród wszystkich dających się ułożyć liczb czterocyfrowych. Najpierw będziemy wybierać cyfrę stojącą na miejscu jedności (tj. na ostatnim miejscu), bo od niej żądamy, aby spełniała dodatkowy warunek (była parzysta). Osobno liczymy liczby mające na końcu 0, ze względu na to, że 0 nie może się pojawić na początku liczby.

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Obliczamy, ile wśród rozważanych liczb czterocyfrowych jest liczb kończących się cyfrą 0.

Na ostatnim miejscu możemy wybrać którąś z różnych od zera cyfr parzystych; są 2 takie cyfry (2 i 4).
Na pierwszym miejscu możemy wybrać jedną z 4 pozostałych cyfr różnych od 0.
Na drugim – jedną z pozostałych 4 cyfr (bo z 6 danych już wybraliśmy dwie, a 0 też można teraz wybrać).
Na trzecim miejscu – jedną z pozostałych 3 cyfr.

Teraz ustalamy, ile jest liczb parzystych niekończących się zerem.

$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$

Obliczamy, ile wśród rozważanych liczb czterocyfrowych jest liczb parzystych niekończących się cyfrą 0.

$60 + 96 = 156$

Aby ustalić, ile jest wszystkich liczb parzystych, dodajemy obie obliczone wartości.

$300 - 156 = 144$

Wszystkie pozostałe liczby są nieparzyste. Skoro wiemy, ile wszystkich liczb czterocyfrowych można ułożyć i ile jest wśród nich liczb parzystych, to odejmujemy te liczby, aby ustalić, ile jest nieparzystych.

Odpowiedź: Z podanych cyfr można ułożyć 300 liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach. Wśród nich jest 156 liczb parzystych i 144 nieparzyste.

ZADANIE 3

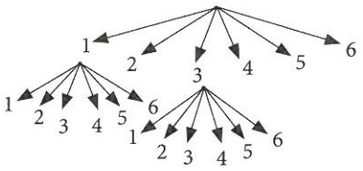
Czterokrotnie rzucamy kością do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej 3 razy wypadła liczba oczek nie większa od 2.

ROZWIĄZANIE

W jednym rzucie kością jest 6 możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Dwa z nich, a mianowicie 1 i 2, spełniają warunek „liczba oczek nie większa od 2". Dlatego w pojedynczym rzucie prawdopodobieństwo uzyskania interesującego nas (sprzyjającego) wyniku wynosi $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Spróbujemy rozwiązać to zadanie za pomocą drzewa. W tym celu przeanalizujemy najpierw pojedynczy rzut kością z punktu widzenia warunku występującego w treści zadania.

Prawdopodobieństwo wyniku niesprzyjającego („liczba oczek większa od 2") jest zatem równe $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.



Oznaczamy sprzyjający wynik T (od słowa „tak"), a niesprzyjający N (od słowa „nie") i rysujemy drzewo. Drzewo ma 4 „piętra" (tyle, ile jest rzutów).
Na drzewie zaznaczamy te końcowe sytuacje, w których są spełnione warunki zadania (co najmniej 3 symbole T). Nazwijmy te sytuacje sprzyjającymi.

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3^4}(1+4\cdot 2)=\frac{9}{3^4}=\frac{3^2}{3^4}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

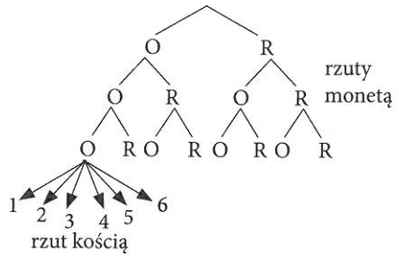
Mnożymy liczby wzdłuż ścieżki prowadzącej od początku drzewa (jego najwyższego punktu) do sytuacji sprzyjającej. Taki iloczyn obliczamy dla każdej sytuacji sprzyjającej, a otrzymane iloczyny dodajemy, uzyskując odpowiedź.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{9}$.

ZADANIE 4

Rzucamy trzykrotnie monetą i notujemy liczbę x wyrzuconych orłów. Następnie rzucamy kością i notujemy y – część całkowitą połowy liczby wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że $x > y$.

ROZWIĄZANIE



Także to zadanie spróbujemy rozwiązać za pomocą drzewa. Trzy najwyższe piętra odpowiadają trzem rzutom monetą, których wyniki oznaczamy O (orzeł) lub R (reszka). Każdy z tych wyników otrzymujemy w pojedynczym rzucie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

$y = 0$, gdy liczba oczek wynosi 1;
$y = 1$, gdy liczba oczek wynosi 2 lub 3;
$y = 2$, gdy liczba oczek wynosi 4 lub 5;
$y = 3$, gdy liczba oczek wynosi 6.

$y = 0$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$
$y = 1$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$
$y = 2$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$
$y = 3$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{17}{48}$$

Obliczamy, z jakim prawdopodobieństwem uzyskujemy poszczególne wartości y.

Na dolnym piętrze notujemy na końcu ścieżki drzewa parę (x, y). Zaznaczamy sytuacje sprzyjające i obliczamy poszukiwane prawdopodobieństwo tak, jak w poprzednim zadaniu. Zamiast $\frac{1}{3}$ piszemy $\frac{2}{6}$, żeby mieć od razu wspólny mianownik. Zauważamy też, że wzdłuż każdej „sprzyjającej" ścieżki iloczyn trzech pierwszych liczb wynosi $\frac{1}{8}$.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{17}{48}$.

ZADANIE 5

Trzykrotnie losujemy ze zwracaniem liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Za pierwszym razem notujemy resztę z dzielenia wylosowanej liczby przez 2, za drugim – resztę z dzielenia przez 3, za trzecim – z dzielenia przez 4. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma zanotowanych reszt jest równa co najwyżej 3.

ROZWIĄZANIE

I losowanie
- reszta 0 dla liczb 2, 4, 6, 8 i 10;
  z prawdopodobieństwem $\frac{5}{10}$
- reszta 1 dla liczb 1, 3, 5, 7 i 9;
  z prawdopodobieństwem $\frac{5}{10}$

II losowanie
- reszta 0 dla liczb 3, 6 i 9;
  z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$
- reszta 1 dla liczb 1, 4, 7 i 10;
  z prawdopodobieństwem $\frac{4}{10}$
- reszta 2 dla liczb 2, 5 i 8;
  z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$

III losowanie
- reszta 0 dla liczb 4 i 8;
  z prawdopodobieństwem $\frac{2}{10}$
- reszta 1 dla liczb 1, 5 i 9;
  z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$
- reszta 2 dla liczb 2, 6 i 10;
  z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$
- reszta 3 dla liczb 3 i 7;
  z prawdopodobieństwem $\frac{2}{10}$

Jednak najpierw obliczymy, jakie są prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych reszt w kolejnych losowaniach. W I losowaniu:

$$10^{-3}\cdot(5\cdot 3\cdot 2+5\cdot 3\cdot 3+5\cdot 3\cdot 3+5\cdot 3\cdot 2+$$
$$+5\cdot 4\cdot 2+5\cdot 4\cdot 3+5\cdot 4\cdot 3+5\cdot 3\cdot 2+$$
$$+5\cdot 3\cdot 3+5\cdot 3\cdot 2+5\cdot 3\cdot 3+$$
$$+5\cdot 3\cdot 3+5\cdot 4\cdot 2+5\cdot 4\cdot 3+5\cdot 3\cdot 2)=$$
$$=10^{-3}\cdot 635=0{,}635$$

Obliczamy prawdopodobieństwo. Ponieważ wszystkie ułamki mają ten sam mianownik 10, to wystarczy wykonać działania na licznikach, a sumę podzielić przez 1000 (tj. 10^3, bo mnożymy trzy ułamki).

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi 0,635.

ZADANIE 6

Przy okrągłym stole siada w sposób losowy 10 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) dwie ustalone osoby usiądą obok siebie,
b) ustalone dwie osoby zawsze będzie rozdzielać jedna osoba?

ROZWIĄZANIE

Na pustyni, gdzie dookoła nie widać żadnych punktów orientacyjnych, stoi 10-osobowy okrągły stół. Siada przy nim pierwsza osoba. Nie jesteśmy w stanie określić jej położenia, poza tym, że siedzi przy stole. Przy okrągłym stole możemy określić miejsce osoby przez odniesienie do innej siedzącej osoby, przykładowo, „po lewej stronie" albo „dwa miejsca w prawo".

Druga osoba ma do wyboru 9 miejsc,
trzecia osoba ma do wyboru 8 miejsc,
...
dziesiąta osoba ma do wyboru 1 miejsce

W związku z podanym opisem liczbę sposobów rozmieszczenia osób przy okrągłym stole zaczynamy obliczać od drugiej osoby.

$|\Omega| = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1$

Obliczamy, ile jest wszystkich sposobów.

Ad a)

Jeżeli dwie ustalone osoby mają siedzieć obok siebie, to tak, jakby tworzyły jedną osobę zajmującą dwa miejsca. Zatem zdarzenie sprzyjające zdarzeniu A – „dwie ustalone osoby usiądą obok siebie" to sposób rozsadzenia 9 osób przy 9-osobowym okrągłym stole. Musimy jednak uwzględnić jeszcze to, że dane dwie osoby X i Y mogą usiąść obok siebie na dwa różne sposoby: X na lewo od Y lub X na prawo od Y.

$|A| = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{2}{9}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że dwie ustalone osoby usiądą koło siebie, wynosi $\frac{2}{9}$.

Ad b)

$|B| = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1$

Niech B oznacza zdarzenie „ustalone dwie osoby zawsze będzie rozdzielać jedna osoba". Rozumujemy podobnie, jak poprzednio. Najpierw usadzamy ustalone dwie osoby X i Y. Można to uczynić na dwa sposoby: X dwa miejsca w prawo od Y lub X dwa miejsca w lewo od Y. Następnie wybieramy jedną z pozostałych ośmiu osób, by usiadła między nimi. Pozostałe 7 miejsc zajmuje 7 pozostałych osób, na $(7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1)$ sposobów.

Zatem $|B| = |A|$, więc także $P(B) = P(A)$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że ustalone dwie osoby zawsze będzie rozdzielać jedna osoba, wynosi $\frac{2}{9}$.

ZADANIE 7

Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy kolejno bez zwracania cztery cyfry i układamy z nich, w kolejności losowania, liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że tak wylosowana liczba jest:
a) parzysta, **b)** nieparzysta.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

Ω to zbiór wszystkich czterowyrazowych ciągów cyfr.

W opisanym losowaniu kolejność występujących elementów ma znaczenie. Należy ten fakt uwzględnić przy opisywaniu „omegi".

$|\Omega| = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Jest to zbiór wszystkich ciągów czterowyrazowych, których ostatni wyraz jest równy 2 lub 4 lub 6.

Opisujemy zdarzenie losowe A.

$|A| = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$

Obliczamy ilość zdarzeń A.

$P(A) = \frac{360}{840} = \frac{3}{7}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{3}{7}$.

Ad b)

Jest to zbiór wszystkich ciągów czterowyrazowych, których ostatni wyraz jest równy 1 lub 3 lub 5 lub 7.

Opisujemy zdarzenie losowe B.

$|B| = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{480}{840} = \frac{4}{7}$

Obliczamy moc zdarzenia B.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{4}{7}$.

ZADANIE 8

Sześciu pasażerów wsiada do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu?

ROZWIĄZANIE

Każdy z sześciu pasażerów ma do wyboru trzy wagony, czyli pierwszy trzy, drugi trzy itd.
$|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$
Jeżeli wszyscy mają być w jednym wagonie, to wybór ma tylko pierwszy pasażer, a reszta musi wejść do tego samego wagonu.
$|A| = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{729} = \frac{1}{243}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że każdy z sześciu pasażerów wsiądzie do tego samego wagonu, wynosi $\frac{1}{243}$.

ZADANIE 9

Każdy z pięciu pasażerów windy wybiera losowo jedno z 8 pięter i wysiada na nim. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?

ROZWIĄZANIE

$|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5 = 32768$ $\quad |A| = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6720}{32768} \approx 0{,}205$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze, wynosi 0,205.

ZADANIE 10

Dziesięć różnych książek ustawiamy losowo na półce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ustalone dwie książki *A* i *B* będą stały obok siebie w dowolnym porządku?

ROZWIĄZANIE

$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1$ $\quad |A| = 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1$

Gdy dwie książki mają stać obok siebie, to możemy je razem ustawić na 9 sposobów, a one mogą zamienić się miejscami. Pozostałe 8 książek zajmuje kolejne wolne miejsca.

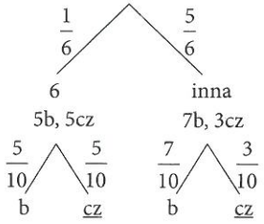
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{1}{5}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że dwie książki spośród dziesięciu będą stały obok siebie, wynosi $\frac{1}{5}$.

ZADANIE 11

Aby wylosować kulę, rzucamy kostką do gry. Gdy wypadnie szóstka, losujemy kulę z pierwszego pudełka, w którym jest pięć kul białych i pięć czarnych, a w pozostałych przypadkach z drugiego, gdzie jest siedem kul białych i trzy czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę czarną?

ROZWIĄZANIE



$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} =$

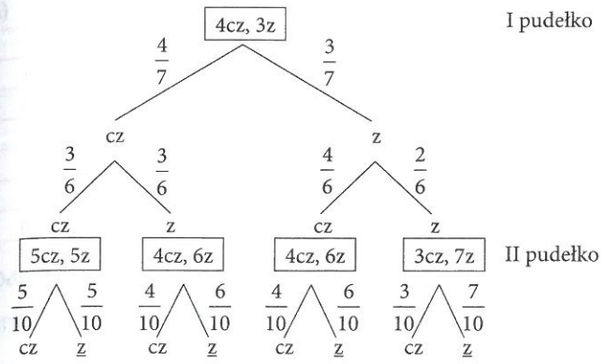
$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej wynosi $\frac{1}{3}$.

ZADANIE 12

Z pierwszego pudełka, w którym znajdują się cztery kule czerwone i trzy zielone, losujemy dwie kule i wrzucamy do drugiego pudełka, w którym są trzy kule czerwone i pięć zielonych. Losujemy z niego jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula zielona?

ROZWIĄZANIE



$P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 7}{70} = \frac{10 + 12 + 12 + 7}{70} = \frac{41}{70}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wyciągniemy z drugiego pudełka kulę zieloną, wynosi $\frac{41}{70}$.

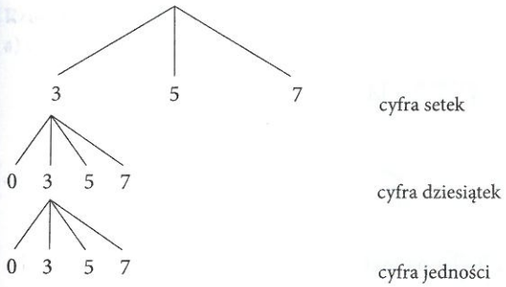
ZADANIE 13

Ze zbioru liczb {0, 3, 5, 7} tworzymy liczbę trzycyfrową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba parzysta, a jakie, że będzie ona większa od 350, gdy cyfry: a) mogą się powtarzać, b) nie mogą się powtarzać?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

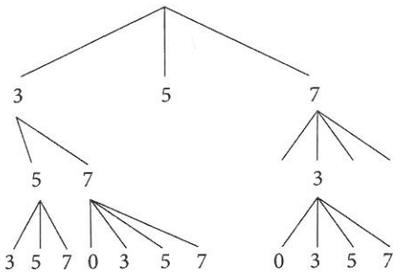
{0, 3, 5, 7} – mogą się powtarzać



$|\Omega| = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ $\quad A$ – otrzymana liczba jest parzysta $\quad |A| = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ $\quad P(A) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że będzie to liczba parzysta, gdy cyfry się powtarzają, wynosi 0,25.

B – liczba jest większa od 350

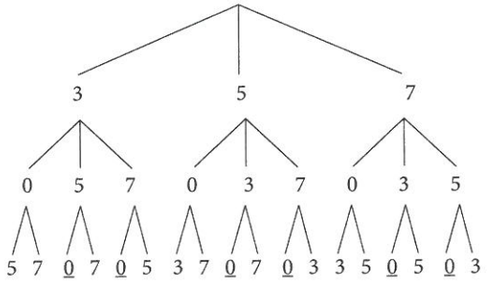


$|\Omega| = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ $|B| = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = 32 + 4 + 3 = 39$ $P(B) = \frac{39}{48}$

Odpowiedź: Gdy cyfry mogą się powtarzać, prawdopodobieństwo, że będzie to liczba parzysta, wynosi 0,25, a że liczba jest większa od 350, ma wartość $\frac{39}{48}$.

Ad b)

{0, 3, 5, 7} – cyfry nie mogą się powtarzać



B

$|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ A – otrzymamy liczbę parzystą $|A| = 6$ $P(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

B – otrzymamy liczbę większą od 350,

$|B| = 15$ $P(B) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej ma wartość $\frac{1}{3}$, a że będzie to liczba większa od 350, wynosi $\frac{5}{6}$.

ZADANIE 14

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) iloczynu oczek równego 6,
b) wartości bezwzględnej różnicy liczb oczek równej 1.

ROZWIĄZANIE

a)

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	**1, 6**
2	2, 1	2, 2	**2, 3**	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	**3, 2**	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	**6, 1**	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

$|\Omega| = 36$ $|A| = 4$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie kostką otrzymamy iloczyn oczek równy 6, wynosi $\frac{1}{9}$.

b)

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	**1, 2**	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	**2, 1**	2, 2	**2, 3**	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	**3, 2**	3, 3	**3, 4**	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	**4, 3**	4, 4	**4, 5**	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	**5, 4**	5, 5	**5, 6**
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	**6, 5**	6, 6

$|\Omega| = 36$ $|B| = 10$

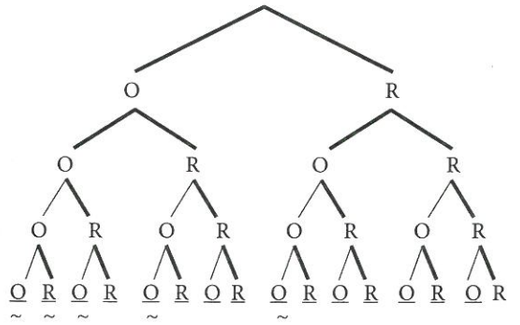
$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że przy dwukrotnym rzucie kostką otrzymamy wartość bezwzględną różnicy oczek równą 1, wynosi $\frac{5}{18}$.

ZADANIE 15

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) co najmniej jednego orła, **b)** liczby orłów większej od liczby reszek.

ROZWIĄZANIE



$|\Omega| = 16$ A – otrzymujemy co najmniej jednego orła $|A| = 15$

B – liczba orłów jest większa od liczby reszek $|B| = 5$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{16}$ $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}$

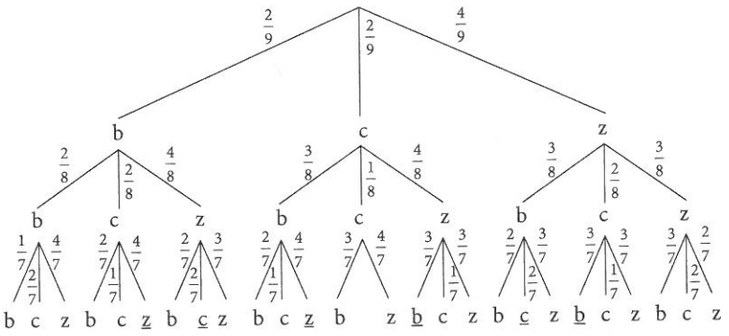
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła wynosi $\frac{15}{16}$, a liczby orłów większej od liczby reszek $\frac{15}{16}$.

ZADANIE 16

Z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule białe, dwie czarne i cztery zielone, losujemy trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) kul trzech kolorów, **b)** kul jednego koloru, **c)** co najmniej jednej kuli białej.

ROZWIĄZANIE



a) A – otrzymamy kule trzech kolorów

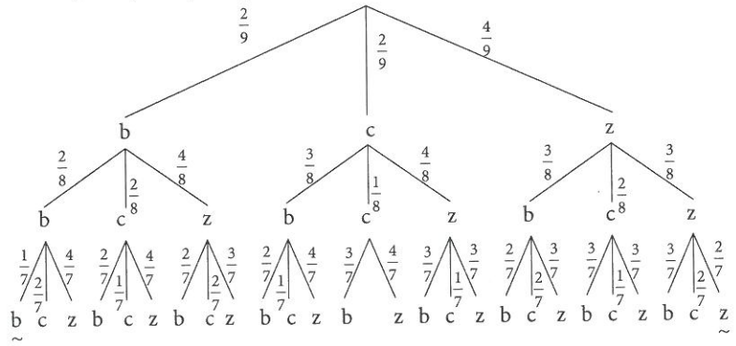
$$P(A)=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{7}\qquad P(A)=\frac{2}{7}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kul trzech kolorów wynosi $\frac{2}{7}$.

Ad b)

B – otrzymamy kule jednego koloru

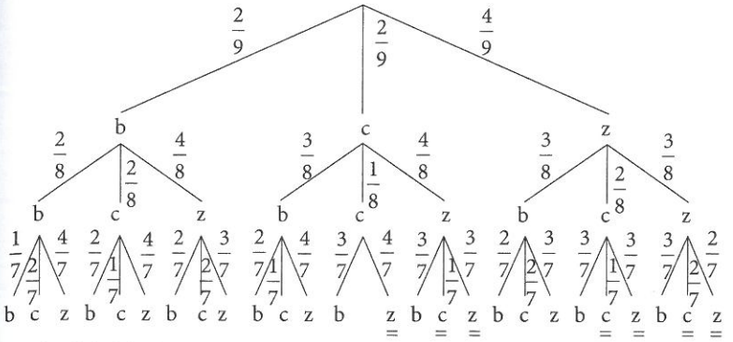


$$P(B)=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{84}\qquad P(B)=\frac{5}{84}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania kul jednego koloru wynosi $\frac{5}{84}$.

Ad c)

C – otrzymanie co najmniej jednej kuli białej



C' – brak kuli białej

$$P(C)=1-P(C')=1-\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)=1-\left(3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)=$$

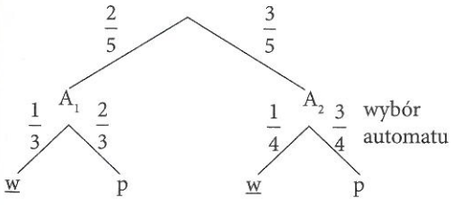
$$=1-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)=1-5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}\qquad P(C)=\frac{16}{21}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej białej kuli wynosi $\frac{16}{21}$.

ZADANIE 17

W salonie gier stoi pięć automatów do gry. W dwóch z nich można wygrać z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a w trzech pozostałych z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania.

ROZWIĄZANIE



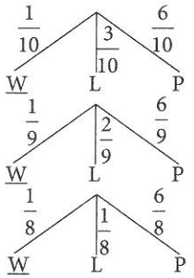
$$P(W)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{15}+\frac{3}{20}=\frac{8}{60}+\frac{9}{60}=\frac{17}{60}\approx 0{,}28$$

$P(W) = 0{,}28$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wygrania w losowo wybranym automacie wynosi 0,28.

ZADANIE 18

Wśród dziesięciu losów jeden wygrywa, a trzy pozwalają na ponowne losowanie. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania przy jednokrotnym losowaniu?



ROZWIĄZANIE

$$P(W)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{120}=\frac{12}{120}+\frac{4}{120}+\frac{1}{120}=\frac{17}{120}\approx 0{,}14$$

$$P(W)=0{,}14$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wygrania na loterii wynosi 0,14.

ZADANIE 19

Wiedząc, że $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ i $P(A \cup B) = 0{,}6$, oblicz $P(A \cap B)$.

ROZWIĄZANIE

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Wyliczamy $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}3$

Podstawiamy dane i znajdujemy poszukiwany wynik.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = 0{,}3$.

ZADANIE 20

Wiedząc, że $P(A') = 0{,}7$, $P(B') = 0{,}6$ i zdarzenia A oraz B wykluczają się, oblicz $P(A \cup B)$.

ROZWIĄZANIE

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Korzystamy ze wzorów na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń wykluczających się (rozłącznych) i na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

Podstawiamy dane i obliczone wartości do wzoru.

Odpowiedź: $P(A \cup B) = 0{,}7$.

POZIOM ROZSZERZONY

LICZBY RZECZYWISTE I WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2)$$

ZADANIE 1

Zastosuj wzory skróconego mnożenia:

a) $(2y-3)^3$ **b)** $(3x+1)^3$ **c)** $27y^3+8$ **d)** $\frac{1}{8}x^3 - \frac{27}{64}$

e) $(2x+5)(4x^2-10x+25)$ **f)** $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(2y-3)^3 = (2y)^3 - 3\cdot(2y)^2\cdot 3 + 3\cdot 2y\cdot 3^2 - 3^3 = 8y^3 - 9\cdot 4y^2 + 6y\cdot 9 - 27 =$

$= 8y^3 + 36y^2 + 54y - 27$

Ad b) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(3x+1)^3 = (3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2+1^3 = 27x^3+3\cdot 9x^2+9x\cdot 1+1=$

$=27x^3+27x^2+9x+1$

Ad c) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$27y^3+8=(3y)^3+2^3=(3y+2)((3y)^2-3y\cdot 2+2^2)=(3y+2)(9y^2-6y+4)$

Ad d) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\frac{1}{8}x^3-\frac{27}{64}=\left(\frac{1}{2}x\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)=$

$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{9}{16}\right)$

Ad e) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(2x+5)(4x^2-10x+25)=(2x+5)((2x)^2-2x\cdot 5+5^2)=(2x)^3+5^3=8x^3+125$

Ad f) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)=(3x-2y)((3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2)=$

$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3$

ZADANIE 2

Uprość podane wyrażenia, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $(x-2y)^3-(x+2y)^3+(x+2y)^2-(x-2y)^2=$ **b)** $(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)=$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\left[x^3-3x^2\cdot 2y+3x\cdot(2y)^2-(2y)^3\right]-\left[x^3+3x^2\cdot 2y+3x\cdot 2y+(2y)^3\right]+\left[x^2+2x\cdot 2y+(2y)^2\right]-$

$-\left[x^2-2x\cdot 2y+(2y)^2\right]=(x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)-(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+(x^2+4xy+4y^2)-$

$-(x^2-4xy+4y^2)=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3-x^3-6x^2y-12xy^2-8y^3+x^2+4xy+4y^2-x^2+4xy-4y^2=$

$=-12x^2y-16y^3+8xy$

Ad b)

$(x^3+1^3)-(x^3-1^3)=x^3+1-x^3+1=\mathbf{2}$

ZADANIE 3

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość:

$(-k-m)^3-(m-k)^3$ dla $k=-2$ i $m=-3$

ROZWIĄZANIE

$(-k-m)^3-(m-k)^3=[-(k+m)]^3-(m-k)^3=-(k+m)^3-(m-k)^3=$

$=-(k^3+3k^2m+3km^2+m^3)-(m^3-3m^2k+3mk^2-k^3)=-k^3-3k^2m-3km^2-m^3-m^3+3m^2k-3mk^2+k^3=$

$=-3k^2m-3km^2-2m^3+3km^2-3k^2m=-6k^2m-2m^3$

Dla $k=-2$ i $m=-3$:

$-6k^2m-2m^3=-6\cdot(-2)^2\cdot(-3)-2(-3)^3=-6\cdot 4\cdot(-3)-2\cdot(-27)=72+54=126$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi 126.

ZADANIE 4

Rozłóż na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $1+15x+75x^2+125x^3$ **b)** $(x-1)^3-1$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$1 + 15x + 75x^2 + 125x^3 = (1 + 5x)^3$

Zauważamy wzór na sześcian sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ad b)

$(x - 1)^3 - 1 = [(x - 1) - 1][(x - 1)^2 + (x - 1) + 1] =$

$= (x - 2)(x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1) =$

$= (x - 2)(x^2 - x + 1)$

Stosujemy wzór na różnicę sześcianów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

ZADANIE 5

Stosując odpowiednie wzory skróconego mnożenia, uzasadnij, że liczba $5^{12}-1$ jest podzielna przez 31.

ROZWIĄZANIE

$5^{12} - 1 = (5^6 - 1) \cdot (5^6 + 1) =$

$= (5^3 - 1) \cdot (5^3 + 1) \cdot (5^6 + 1) =$

$= (5 - 1) \cdot (5^2 + 5 + 1) \cdot (5^3 + 1) \cdot (5^6 + 1) =$

$= 4 \cdot 31 \cdot (5^3 + 1) \cdot (5^6 + 1)$

Stosujemy najpierw wzór na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Do pierwszego czynnika stosujemy najpierw wzór na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, a następnie wzór na różnicę sześcianów: $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

Odpowiedź: W otrzymanym iloczynie jednym z czynników jest liczba 31, zatem liczba jest podzielna przez 31.

ZADANIE 6

Usuń niewymierność z mianownika następujących ułamków:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ **b)** $\frac{-2}{1+\sqrt[3]{5}}$ **c)** $\frac{25(\sqrt[3]{2}+3)}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9}$

ROZWIĄZANIE

Przy usuwaniu niewymierności korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Jeśli w mianowniku występuje iloczyn liczby i pierwiastka z danej liczby, to licznik i mianownik ułamka wystarczy pomnożyć przez ten pierwiastek.

Ad a)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)\cdot((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}=(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

Ad b)

$$\frac{-2}{1+\sqrt[3]{5}}=\frac{-2\cdot(1-\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2)}{(1+\sqrt[3]{5})\cdot(1-\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2)}=\frac{-2\cdot(1-\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2)}{1+5}=\frac{-(1-\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2)}{3}=\frac{-1+\sqrt[3]{5}-(\sqrt[3]{5})^2}{3}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}}{3}$$

Ad c)

$$\frac{25(\sqrt[3]{2}+3)}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9}=\frac{25(\sqrt[3]{2}+3)(\sqrt[3]{2}-3)}{(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9)(\sqrt[3]{2}-3)}=\frac{25(\sqrt[3]{4}-9)}{(\sqrt[3]{2})^3-3}=\frac{25(\sqrt[3]{4}-9)}{-25}=-(\sqrt[3]{4}-9)=9-\sqrt[3]{4}$$

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z BEZWZGLĘDNĄ WARTOŚCIĄ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ dla } x\geq 0 \\ -x \text{ dla } x<0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$|x|\geq 0$ $\quad |-x|=|x|$ $\quad \sqrt{x^2}=|x|$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$|x+y|\leq |x|+|y|$ $\quad |x-y|\leq |x|+|y|$ $\quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

Ponadto jeśli $y\neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz r ≥ 0 mamy warunki równoważne:

$|x-a|\leq r$ oraz $a-r\leq x\leq a+r$

$|x-a|\geq r$ oraz $x\leq a-r$ lub $x\geq a+r$

ZADANIE 1

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, uprość wyrażenia i zapisz w postaci $a+b\sqrt{c}$:

a) $2\cdot|2+\sqrt{2}|-3\cdot|1-\sqrt{2}|$ **b)** $|\sqrt{5}-7|\cdot|3+\sqrt{5}|$ **c)** $\frac{|2\sqrt{5}-7|}{|1+\sqrt{5}|}$ **d)** $\left|\frac{3-\sqrt{11}}{4-\sqrt{11}}\right|$

ROZWIĄZANIE

Uproszczenie powyższych wyrażeń polega na opuszczeniu wartości bezwzględnej i w dalszej kolejności redukcji wyrazów podobnych oraz uwolnieniu od niewymierności mianownika.

Opuszczanie wartości bezwzględnej zawsze rozpoczynamy od zbadania znaku wyrażenia znajdującego się pod wartością bezwzględną.
Jeżeli wyrażenie to jest ujemne, to symbol wartości bezwzględnej zamieniamy na nawias i przed tym nawiasem zmieniamy znak.

Ad a)

$$2\cdot|2+\sqrt{2}|-3\cdot|1-\sqrt{2}|=2\cdot(2+\sqrt{2})+3\cdot(1-\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}=7-\sqrt{2}$$

Ad b)

$$|\sqrt{5}-7|\cdot|3+\sqrt{5}|=-(\sqrt{5}-7)\cdot(3+\sqrt{5})=(7-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})=21+7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5=16+4\sqrt{5}$$

Ad c)

$$\frac{|2\sqrt{5}-7|}{|1+\sqrt{5}|}=\frac{-(2\sqrt{5}-7)}{1+\sqrt{5}}=\frac{7-2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(7-2\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})}=\frac{7-7\sqrt{5}-2\sqrt{5}+10}{1-5}=\frac{17-9\sqrt{5}}{-4}=-\frac{17}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{5}$$

Ad d)

$$\left|\frac{3-\sqrt{11}}{4-\sqrt{11}}\right|=\frac{|3-\sqrt{11}|}{|4-\sqrt{11}|}=\frac{-(3-\sqrt{11})}{4-\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}-3}{4-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{11}-3)\cdot(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})\cdot(4+\sqrt{11})}=\frac{4\sqrt{11}+11-12-3\sqrt{11}}{16-11}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{11}}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{11}$$

ZADANIE 2

Rozwiąż równania i nierówności:

a) $|x|=5$, $|x|<0$, $|x|=-2$, $|x|\geq 0$, $|x|>0$, $|x|\leq 0$

b) $|x-2|=4$, $|x+1|=0$, $|x-3|=-2$

c) $|x-1|\leq 2$, $|x+3|>-3$, $|x+4|>3$, $|x-2|\leq -1$, $|3-x|\geq 4$

d) $|1-3x|=5$, $|-5x-2|\leq 8$

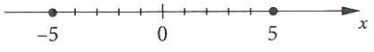
e) $\sqrt{4x^2+4x+1}=2$, $\sqrt{1-6x+9x^2}\geq 3$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$|x|=5$

$x_1=-5$ lub $x_2=5$



Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby –5 oraz 5.

$|x|<0$ – bezwzględna wartość jest zawsze nieujemna, więc ta nierówność jest sprzeczna

$|x|=-2$ – analogicznie – równanie jest sprzeczne

$|x|\geq 0$ – bezwzględna wartość jest nieujemna, więc ta nierówność jest zawsze prawdziwa, $x\in\mathbb{R}$

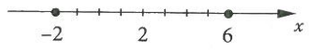
$|x|>0$ – ta nierówność jest zawsze prawdziwa, z wyjątkiem $x=0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$|x|\leq 0$ – bezwzględna wartość nie może być ujemna, ale może mieć wartość zero, czyli jedynym rozwiązaniem tej nierówności jest $x=0$.

Ad b)

$|x-2|=4$

$x_1=-2$ lub $x_2=6$



Zaznaczamy na osi liczbę 2 – liczbę, która podstawiona w miejsce x powoduje, że wartość wyrażenia pod bezwzględną wartością wynosi 0. Szukamy liczb, które są oddalone od liczby 2 o 4 jednostki. Odległość od 2 do –2 oraz od 2 do 6 wynosi 4.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby –2 oraz 6.

$|x+1|=0$

$x=-1$

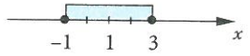
Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba –1.

$|x-3|=-2$

Odpowiedź: Równanie sprzeczne, bezwzględna wartość nie może być ujemna.

Ad c)

$|x-1|\le 2$



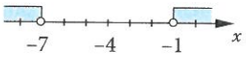
Postępujemy podobnie jak w równaniach i dodatkowo zaznaczamy obszar, w którym odległość od liczby 1 jest większa niż 2.

Odpowiedź: $x\in\langle -1,3\rangle$

$|x+3|>-3$ Bezwzględna wartość jest nieujemna, więc zawsze jest większa od –3.

Odpowiedź: Nierówność jest zawsze prawdziwa, $x\in\mathbb{R}$.

$|x+4|>3$

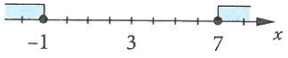


Odpowiedź: $x\in\{(-\infty,-7)\cup(-1,\infty)\}$

$|x-2|\le -1$ Bezwzględna wartość jest nieujemna.

Odpowiedź: Nierówność sprzeczna.

$|3-x|\ge 4$ $\quad |x-3|\ge 4$



Ponieważ bezwzględna wartość z liczby dodatniej i ujemnej jest taka sama: $|5|=5$ oraz $|-5|=5$, więc nie ma znaczenia, czy obliczamy bezwzględną watrość z różnicy $3-x$, czy $x-3$, więc $|3-x|=|x-3|$.

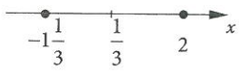
Odpowiedź: $x\in\{(-\infty,-1\rangle\cup\langle 7,\infty)\}$

Ad d)

$|1-3x|=5$ $\quad |3x-1|=5$

$3\left|x-\frac{1}{3}\right|=5\ /:3$ $\quad \left|x-\frac{1}{3}\right|=\frac{5}{3}$

$\left|x-\frac{1}{3}\right|=1\frac{2}{3}$



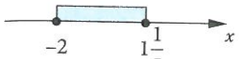
$x_1=-1\frac{1}{3}$ lub $x_2=2$

Aby rozwiązać równanie graficzne, pod bezwzględną wartością może być tylko wyrażenie $x-l$ lub $x+l$, gdzie l jest dowolną liczbą. Przed bezwzględną wartość możemy wyłączyć liczbę tak samo, jak przed nawias.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $-1\frac{1}{3}$ lub 2.

$|-5x-2|\le 8$ $\quad |5x+2|\le 8$

$5\left|x+\frac{2}{5}\right|\le 8\ /:5$ $\quad \left|x+\frac{2}{5}\right|\le\frac{8}{5}$



Odpowiedź: $x\in\left\langle -2;1\frac{1}{5}\right\rangle$

Ad e)

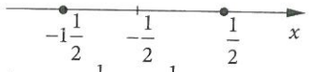
$\sqrt{4x^2+4x+1}=2$

$\sqrt{(2x+1)^2}=2$ $\quad |2x+1|=2$

$2\left|x+\frac{1}{2}\right|=2\ /:2$ $\quad \left|x+\frac{1}{2}\right|=1$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$\sqrt{a^2}=|a|$

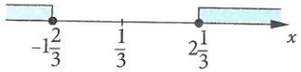


Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba $-1\frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{2}$.

$\sqrt{1-6x+9x^2}\ge 6$ $\quad \sqrt{9x^2-6x+1}\ge 6$

$\sqrt{(3x-1)^2}\ge 6$ $\quad |3x-1|\ge 6$

$3\left|x-\frac{1}{3}\right|\ge 6\ /:3$ $\quad \left|x-\frac{1}{3}\right|\ge 2$



Odpowiedź: $x\in\left\{-\infty;-1\frac{2}{3}\rangle\cup\langle 2\frac{1}{3};\infty\right\}$.

ZADANIE 3

Sprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci:

a) $|5-x|+|x-3|-|x+1|$, $\quad x\in\langle 7,10\rangle$

b) $-|x+3|-|x+2|-|x+1|-7$, $\quad x\in(-5,-3)$

ROZWIĄZANIE

Dla liczb z zaproponowanego przedziału należy sprawdzić znak wyrażeń występujących pod wartością bezwzględną.

Ad a)

Zauważmy najpierw, że $|5-x|=|x-5|$. Zatem wyrażenie można zapisać w postaci $|x-5|+|x-3|-|x+1|$. Lewy koniec przedziału jest równy 7 i jest to liczba większa od każdej liczby występującej pod wartością bezwzględną. Dla wszystkich liczb z danego przedziału wyrażenia pod wartością bezwzględną są dodatnie.

$|x-5|+|x-3|-|x+1|=(x-5)+(x-3)-(x+1)=x-5+x-3-x-1=x-9$

Odpowiedź: Najprostsza postać wyrażenia to $x-9$.

Ad b)

Postępujemy analogicznie i zauważamy, że tym razem wszystkie wyrażenia pod wartością bezwzględną są ujemne.

$-|x+3|-|x+2|-|x+1|-7=(x+3)+(x+2)+(x+1)-7=x+3+x+2+x+1-7=3x-1$

Odpowiedź: Najprostsza postać wyrażenia to $3x-1$.

ZADANIE 4

Rozwiąż równania:

a) $|4-2x|+|-x+3|=5$

b) $\sqrt{(x^2-6x+9)}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x$

c) $|5-|x||=3$

d) $|2|x-1|-3|=7$

ROZWIĄZANIE

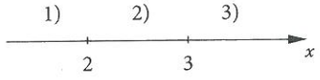
Ad a)

$|4-2x|+|-x+3|=5$

$|2x-4|+|x-3|=5$

$2|x-2|+|x-3|=5$

$x=2 \quad x=3$



Aby skorzystać z definicji wartości bezwzględnej, trzeba ustalić znak wyrażenia pod bezwzględną wartością.
Rozpatrujemy trzy przypadki.
Jeżeli wyrażenie pod bezwzględną wartością jest ujemne, opuszczając bezwzględną wartość, zmieniamy przed nią znak na przeciwny.

1) $x\in(-\infty;2)$ np. $x=0$

$-2(x-2)-(x-3)=5$

$-2x+4-x+3=5$

$-3x=-2 \quad /:(-3)$

$x=\frac{2}{3}$ Rozwiązanie należy do przedziału.

2) $x\in\langle 2;3)$ np. $x=2{,}5$

$2(x-2)-(x-3)=5$

$2x-4-x+3=5$

$x=6$ Rozwiązanie nie należy do przedziału.

3) $x\in\langle 3;\infty)$ np. $x=4$

$2(x-2)+(x-3)=5$

$2x-4+x-3=5$

$3x=12 \quad /:3$

$x=4$ Rozwiązanie należy do przedziału.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $\frac{2}{3}$ lub 4.

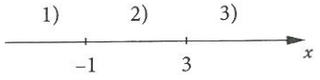
Ad b)

$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x$

$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=6-x$

$|x-3|+|x+1|=6-x$

$x=3 \quad x=-1$



1) $x\in(-\infty;-1)$ np. $x=-2$

$-(x-3)-(x+1)=6-x$

$-x+3-x-1=6-x$

$-x=4 \quad /\cdot(-1)$

$x=-4$

2) $x\in\langle -1;3)$ np. $x=0$

$-(x-3)+(x+1)=6-x$

$-x+3+x+1=6-x$

$x=2$

3) $x\in\langle 3;\infty)$ np. $x=4$

$(x-3)+(x+1)=6-x$

$x-3+x+1=6-x$

$3x=8 \quad /:3$

$x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ Rozwiązanie nie należy do przedziału.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby −4 lub 2.

Ad c)

$|5-|x||=3$ Korzystamy z definicji bezwzględnej wartości.

$5-|x|=3$ lub $5-|x|=-3$

$-|x|=-2 \quad |\cdot(-1)$ $-|x|=-8 \quad |\cdot(-1)$

$|x|=2$ $|x|=8$

$x=2$ lub $x=-2$ $x=8$ lub $x=-8$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby −8, −2, 2 lub 8.

Ad d)

$|2|x-1|-3|=7$

$2|x-1|-3=7$ lub $2|x-1|-3=-7$

$2|x-1|=10 \quad /:2$ $2|x-1|=-4 \quad /:2$

$|x-1|=5$ $|x-1|=-2$ Brak rozwiązania, bezwzględna wartość nie może być ujemna.

$x-1=5$ lub $x-1=-5$

$x=6$ $x=-4$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby −4 lub 6.

ZADANIE 5

Rozwiąż nierówności:

a) $|x-1|+|2x-5|<9$

b) $|2-x|-2\geq 2x+|6+3x|$

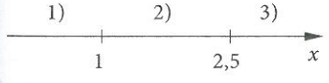
c) $||x-3|-3|<2$

d) $||x-1|+2|\geq 1$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $|x-1|+2\left|x-\frac{5}{2}\right|<9$

$x=1 \quad x=2{,}5$



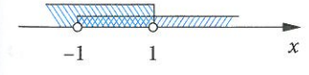
1) $x\in(-\infty;1)$ np. $x=0$

$-(x-1)-2(x-2{,}5)<9$

$-x+1-2x+5<9$

$-3x<3 \quad /:(-3)$

$x>-1$



$x\in(-1;1)$ Wspólna część założenia i rozwiązania.

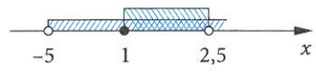
2) $x\in\langle 1;2{,}5)$ np. $x=2$

$(x-1)-2(x-2{,}5)<9$

$x-1-2x+5<9$

$-x<5 \quad /\cdot(-1)$

$x>-5$



$x\in\langle 1;2{,}5)$

3) $x \in \langle 2\frac{1}{2};\infty)$ np. $x=3$

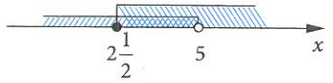
$(x-1)+2(x-2{,}5)<9$

$x-1+2x-5<9$

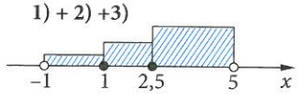
$3x<15 \quad /:3$

$x<5$

$x \in \langle 2\frac{1}{2};5)$



1) + 2) +3)



Odpowiedź: $x \in (-1;5)$

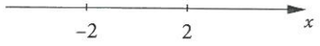
Ostatecznym rozwiązaniem jest suma rozwiązań wszystkich trzech przypadków.

Ad b) $|2-x|-2 \geq 2x+|6+3x|$

$|x-2|-3|x+2| \geq 2x+2$

$x=2 \qquad x=-2$

1) 2) 3)



1) $x \in (-\infty;-2)$ np. $x=-3$

$-(x-2)+3(x+2) \geq 2x+2$

$-x+2+3x+6 \geq 2x+2$

$0 \geq -6 \quad x \in \mathbb{R}$

$x \in (-\infty;-2)$

Rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste, ale jest ona prawdziwa tylko dla przedziału określonego w założeniu.

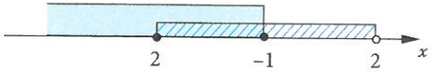
2) $x \in \langle -2;2)$ np. $x=0$

$-(x-2)-3(x+2) \geq 2x+2$

$-x+2-3x-6 \geq 2x+2$

$-6x \geq 6 \quad /:(-6)$

$x \leq -1$



$x \in \langle -2;-1\rangle$

3) $x \in \langle 2;\infty)$ np. $x=3$

$(x-2)-3(x+2) \geq 2x+2$

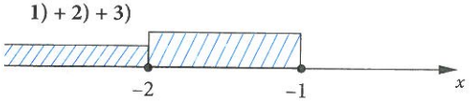
$x-2-3x-6 \geq 2x+2$

$-4x \geq 10 \quad /:(-4)$

$x \leq -2{,}5$

brak rozwiązania

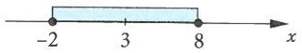
1) + 2) + 3)



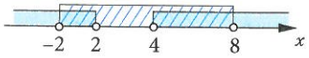
Odpowiedź: $x \in (-\infty;-1\rangle$

Ad c)

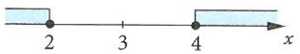
$||x-3|-3|<2 \qquad |x-3|-3<2$ i $|x-3|-3>-2$



$x \in (-2;8)$



$|x-3|<5 \qquad |x-3|>1$



$x \in \{(-\infty;2) \cup (4;\infty)\}$

Odpowiedź: $x \in \{(-2;2) \cup (4;8)\}$

Ad d)

$||x-1|+2| \geq 1$

$|x-1|+2 \geq 1$ lub $|x-1|+2 \leq -1$

$|x-1| \geq -1$ $|x-1| \leq -3$

$x \in \mathbb{R}$ brak rozwiązania

Odpowiedź: Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste.

OBLICZENIA LOGARYTMICZNE

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Zmiana podstawy logarytmu:
Jeśli $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $b \neq 1$ oraz $c>0$, to $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

ZADANIE 1

Oblicz:

a) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$ **b)** $2\log_{\frac{1}{4}} 3 - 3\log_2 5$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{6}} \cdot \log_3 6^2 = \frac{2\log_3 6}{\log_3 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\log_3 6}{\frac{1}{2}\log_3 6} = 4$$

Ad b)

$$2\log_{\frac{1}{4}} 3 - 3\log_2 5 = 2 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{1}{4}} - \log_2 5^3 = \frac{2\log_2 3}{\log_2 2^{-2}} - \log_2 125 = \frac{2\log_2 3}{-2\log_2 2} - \log_2 125 =$$

$$= -\log_2 3 - \log_2 125 = \log_2 3^{-1} + \log_2 125^{-1} = \log_2\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{125}\right) = \log_2 \frac{1}{375}$$

ZADANIE 2

Wykaż, że: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ jest liczbą naturalną.

ROZWIĄZANIE

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \log_4 5 \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 5} \cdot \log_6 7 \cdot \frac{\log_6 8}{\log_6 7} =$$

$$= \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 4 \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 4} \cdot \log_6 8 = \log_2 6 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 6} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$$

Odpowiedź: Iloczyn logarytmów wynosi 3 i jest liczbą naturalną.

ZADANIE 3

Oblicz:

a) $\log_2 9+\log_4 81+\log_2 135-\log_2 5$, gdy $\log_2 3=a$; **b)** $\log_6 16$, gdy $\log_{12} 27=b$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\log_2 9+\log_4 81+\log_2 135-\log_2 5=\log_2 3^2+\frac{\log_2 81}{\log_2 4}+\log_2\frac{135}{5}=2\log_2 3+\frac{\log_2 3^4}{\log_2 2^2}+\log_2 27=$$

$$=2\log_2 3+\frac{4\log_2 3}{2\log_2 2}+\log_2 3^3=2\log_2 3+2\log_2 3+3\log_2 3=7\log_2 3=7a$$

Ad b)

$\log_{12} 27=a$

Przekształcamy oba logarytmy tak, by pozostał $\log_3 2$.

$$\frac{\log_3 27}{\log_3(4\cdot 3)}=a \qquad \frac{\log_3 3^3}{\log_3 4+\log_3 3}=a$$

$$\frac{3\log_3 3}{\log_3 2^2+1}=a \qquad \frac{3}{2\log_3 2+1}=a$$

$$a(2\log_3 2+1)=3 \qquad 2a\log_3 2+a=3$$

$$2a\log_3 2=3-a \quad /:2a$$

$$\log_3 2=\frac{3-a}{2a}$$

$$\log_6 16=\frac{\log_3 16}{\log_3 6}=\frac{\log_3 2^4}{\log_3(2\cdot 3)}=\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+\log_3 3}=\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}=\frac{4\cdot\frac{3-a}{2a}}{\frac{3-a}{2a}}=\frac{\frac{2(3-a)}{a}}{\frac{3-a}{2a}+\frac{2a}{2a}}=\frac{\frac{2(3-a)}{a}}{\frac{3-a+2a}{2a}}=$$

$$=\frac{2(3-a)}{a}\cdot\frac{2a}{3+a}=\frac{4(3-a)}{3+a}$$

ZADANIE 4

Która liczba jest większa, $\sqrt[3]{18}$ czy $x=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$?

ROZWIĄZANIE

$$x=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$$

$$\log_6 x=\log_6\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$$

Logarytmujemy obie strony równania. ($x>0$)

$$\log_6 x=\left(\log_6 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_6 5}{\log_6\sqrt{6}}\right)\log_6 6^{-1}$$

$$\log_6 x=-\left(\log_6 2-\frac{\log_6 5}{2\log_6 6^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\log_6 x=\frac{\log_6 5}{\frac{1}{2}\cdot 2\log_6 6}-\log_6 2$$

$$\log_6 x=\log_6 5-\log_6 2 \qquad \log_6 x=\log_6\frac{5}{2}$$

Jeżeli po obu stronach równania jest logarytm o tej samej podstawie, to logarytmowane wielkości muszą być równe.

$$x=\frac{5}{2} \qquad x^3=\frac{125}{8}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$$

$$\sqrt[3]{18}>\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$$

$$\sqrt[3]{18}>x$$

Odpowiedź: $\sqrt[3]{18}$ ma większą wartość niż x.

FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESU FUNKCJI

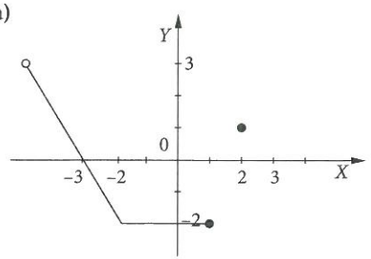
■ UŻYTECZNE WZORY I ICH INFORMACJE

Gdy mamy wykres funkcji $y = f(x)$, rysujemy wykres funkcji $y = |f(x)|$, pamiętając, że wykres w I i II ćwiartce, czyli tam, gdzie wartości są dodatnie, pozostaje bez zmian, a część wykresu z ćwiartki III i IV jest odbita symetrycznie względem osi odciętych.
Funkcja $y = |f(x)|$ przyjmuje tylko wartości nieujemne.

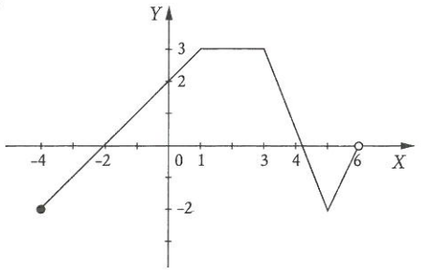
ZADANIE 1

Mając dany wykres funkcji $y = f(x)$, wykonaj wykres funkcji $y = |f(x)|$ i odczytaj jej własności:

a)

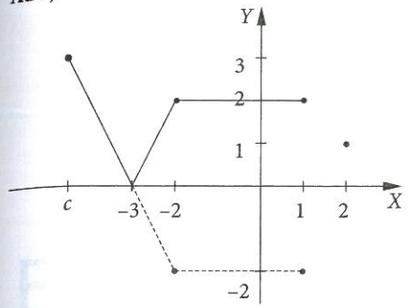


b)



ROZWIĄZANIE

Ad a)



Punkt $(c; 3)$ należy do prostej, do której należą punkty $(-3; 0)$ oraz $(-2; -2)$.

$ax + b = y$

$$\begin{cases} -3a + b = 0 \quad / \cdot(-1) \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ -2a + b = -2 \end{cases}$$

$a = -2 \qquad b = 3a = 3 \cdot (-2) = -6$

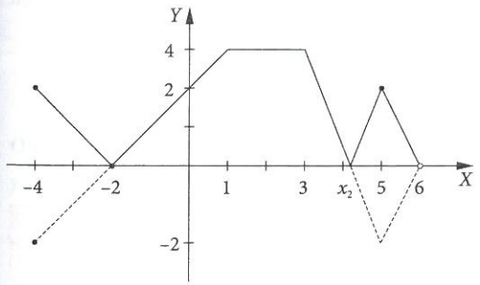
Punkt $(c; 3)$ należy do prostej $y = -2x - 6$

$3 = -2c - 6 \qquad 2c = -6 - 3 \qquad 2c = -9 \quad /:2 \qquad c = -4\frac{1}{2}$

Własności:

1) dziedzina: $x \in (-4\frac{1}{2}; 1\rangle \cup \{2\}$
2) zbiór wartości: $y \in \langle 0; 3)$
3) miejsce zerowe: $x_1 = -3$
4) punkt przecięcia z osią y: $(0; 2)$
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -3; -2\rangle$, jest malejąca dla $x \in (-4\frac{1}{2}; -3\rangle$, a jest stała dla $x \in \langle -2; 1\rangle$.

Ad b)



Własności:

1) dziedzina: $x \in \langle -4; 6\rangle$
2) zbiór wartości: $y \in \langle 0; 3\rangle$
3) miejsca zerowe: $x_1 = -2$

x_2 obliczam: (3; 3) i (5; –2)

$$\begin{cases} 3a+b=3 \quad /\cdot(-1) \\ 5a+b=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a-b=-3 \\ 5a+b=-2 \end{cases}$$

$2a = -5 \quad /:2$

$a=-\frac{5}{2} \qquad b=3-3a=3+\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{2}=3+\frac{15}{2}=3+7\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}$

Punkt $(x_2; 0)$ należy do prostej $y=-\frac{5}{2}x+10\frac{1}{2}$.

$0=-\frac{5}{2}x_2+\frac{21}{2} \qquad \frac{5}{2}x_2=\frac{21}{2}$

$5x_2 = 21 \quad /:5$

$x_2=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$

$x_2=4\frac{1}{5}$ – drugie miejsce zerowe

4) punkt przecięcia z osią rzędnych: (0; 2)
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -2; 1\rangle$ oraz dla $x \in \langle 4\frac{1}{5}; 5\rangle$,

malejąca dla $x \in \langle -4; -2\rangle$, dla $x \in (3; 4\frac{1}{5}\rangle$ oraz dla $x \in \langle 5; 6)$, a stała dla $x \in \langle 1; 3\rangle$.

FUNKCJA LINIOWA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ, NIERÓWNOŚCI I UKŁADÓW RÓWNAŃ

ZADANIE 1

Naszkicuj wykres funkcji *h* i określ jej własności:

$$h(x)=\begin{cases} -x-3, & x\in(-\infty,2\rangle \\ -5, & x\in(2,5) \\ \frac{1}{2}x, & x\in\langle 5,+\infty) \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE

Obliczenia do wykresu:

$y = -x - 3$, $x\in(-\infty, 2\rangle$

x	0	–3	2
y	–3	0	–5

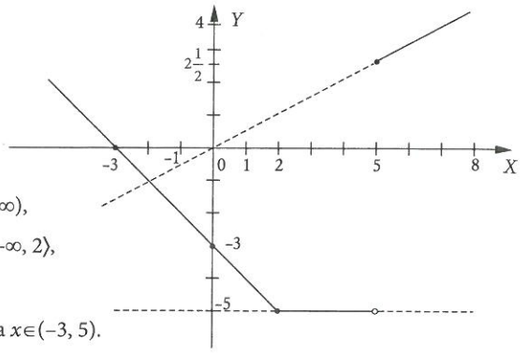
1) $x = 0$: $y = -3$
2) $y = 0$: $0 = -x - 3$ $x = -3$
3) $x = 2$: $y = -2 - 3 = -5$

$y=\frac{1}{2}x, \quad x\in\langle 5,\infty)$

x	0	5	8
y	0	$2\frac{1}{2}$	4

Własności:

1) dziedzina: $x \in \mathbb{R}$,
2) zbiór wartości: $y \in \mathbb{R}$,
3) miejsce zerowe: $x = -3$,
4) punkt przecięcia z osią OY: $(0, -3)$,
5) monotoniczność:
   - funkcja rosnąca – $a = \frac{1}{2}$, dla $x \in \langle 5, \infty)$,
   - funkcja malejąca – $a = -1$, dla $x \in (-\infty, 2\rangle$,
   - funkcja stała, $a = 0$, dla $x \in (2, 5)$,
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 5, \infty)$, a ujemne dla $x \in (-3, 5)$.



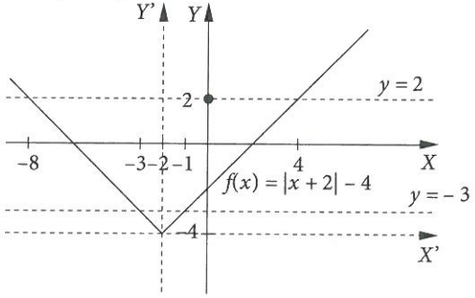
ZADANIE 2

Wykonaj wykresy funkcji f i korzystając z wykresów, rozwiąż nierówności $f(x) \geq -3$ oraz $f(x) < 2$, gdy:

a) $f(x) = |x + 2| - 4$ **b)** $f(x) = -|x - 3| + 1$.

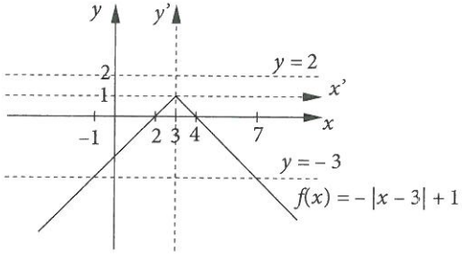
ROZWIĄZANIE

Ad a) $f(x) = |x + 2| - 4$



$f(x) \geq -3$ dla $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; \infty)$
$f(x) < 2$ dla $x \in (-8; 4)$

Ad b)



$f(x) \geq -3$ dla $x \in \langle -1; 7\rangle$
$f(x) < 2$ dla $x \in (-\infty; \infty)$

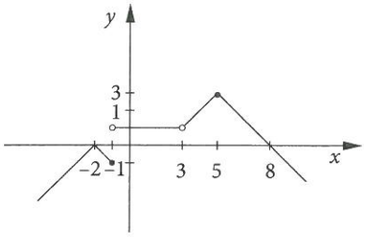
ZADANIE 3

Wykonaj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ 1 & \text{dla } x \in (-1; 3) \\ -|x-5|+3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$.

ROZWIĄZANIE

Własności:

1) dziedzina: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$
2) zbiór wartości: $y \in (-\infty; 3\rangle$
3) miejsca zerowe: $x_1 = -2$, $x_2 = 8$
4) punkt przecięcia z osią rzędnych: $(0; 1)$
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty; -2\rangle$ oraz $x \in (3; 5\rangle$, jest malejąca dla $x \in \langle -2; -1\rangle$ oraz $x \in \langle 5; \infty)$, a jest stała dla $x \in \langle -1; 3)$, dla $x = 5$ funkcja przyjmuje wartość największą, która wynosi 3, $y_{max} = f(5) = 3$, wartości najmniejszej nie można określić



6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \{(-1; 3) \cup (3; \infty)\}$, a wartości ujemne dla $x \in \{(-\infty; -1) \cup \cup (8; \infty)\}$.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

W zadaniu 1 i 2 korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ZADANIE 1

Rozwiąż równanie i sprawdź $2(1-2x)^3 - (3x+4) = -2(1+2x)^3 + 12(1+4x^2)$

ROZWIĄZANIE

$2(1 - 2x)^3 + 2(1 + 2x)^3 = 12(1 + 4x^2) + (3x + 4)$
$2(1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot (2x)^2 - (2x)^3) + 2(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot (2x)^2 + (2x)^3) = 12 + 48x^2 + 3x + 4$
$2(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) + 2(1 + 6x + 12x^2 + 8x^3) = 12 + 48x^2 + 3x + 4$
$2 - 12 + 24x^2 - 16x^3 + 2 + 12x + 24x^2 + 8x^3 = 16 + 48x^2 + 3x$
$-3x = 12 \quad / : (-3)$
$x = -4$

Sprawdzenie:

$L = 2(1-2\cdot(-4))^3 - (3\cdot(-4)+4) = 2(1+8)^3 - (-8) = 2\cdot 9^3 + 8 = 2\cdot 729 + 8 = 1458 + 8 = 1466$

$P = -2(1+2\cdot(-4))^3 + 12(1+4\cdot(-4)^2) = -2(1-8)^3 + 12(1+4\cdot 16) = -2(-7)^3 + 12(1+64) =$

$= -2\cdot(-343) + 12\cdot 65 = 686 + 780 = 1466$

$L = P$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba -4.

ZADANIE 2

Rozwiąż równania i nierówności:

a) $3(x+1)^2-(x-3)^3=101-(x-4)^3$ **b)** $(x-2)^3-(x-3)(x^2+3x+9)\geq 7-3x^2-3x(x-1)$

c) $1-\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{2}<\frac{(2-x)(x^2+2x+4)}{2}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$3(x+1)^2+(x-4)^3=(x-3)^3+101$

$3(x^2+2x+1)+x^3-3x^2\cdot 4+3x\cdot 4^2-4^3=x^3-3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2-3^3+101$

$3x^2+6x+3-12x^2+48x-64=-9x^2+27x-27+101$

$54x-27x=61+74$

$27x=135 \quad /:27$

$x=5$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Ad b)

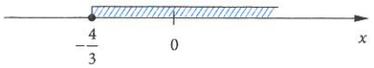
$(x-2)^3+3x^2+3x(x-1)\geq 7+(x-3)(x^2+3x+9)$

$x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3+3x^2+3x^2-3x\geq 7+x^3-27$

$-6x^2+12x-8+6x^2-3x\geq -20$

$9x\geq -12 \quad /:9$

$x\geq -\frac{4}{3}$



Odpowiedź: $x\in\langle -\frac{4}{3};\infty)$

Ad c)

$1<\frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{2}+\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{2} \quad /\cdot 2$

$2<2^3-x^3+x^3+2^3 \qquad 0<14$ – nierówność jest zawsze prawdziwa

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste, $x\in R$.

ZADANIE 3

Rozwiąż równania o niewiadomej x i przedyskutuj ilość rozwiązań w zależności od parametrów a, b, c oraz m:

a) $a(x-1)-b=x-a$ **b)** $m^2x-m+1=x$ **c)** $\frac{a-bx}{c}=\frac{cx-b}{c}-x$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$ax-a-b=x-a$

$ax-x=b$

$x(a-1)=b \quad /:(a-1)$

$x=\frac{b}{a-1}$

Gdy $a=1$ i $b\neq 0$, równanie nie ma rozwiązania, gdy $a=1$ i $b=0$, równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, a gdy $a\neq 1$, równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{b}{a-1}$.

Ad b)

$m^2x-x=m-1$

$x(m^2-1)=m-1 \quad /:(m^2-1)$

$x=\frac{m-1}{(m+1)(m-1)}$

Gdy $m=1$, równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m=-1$, równanie nie ma rozwiązania, a gdy $m\neq -1$ i $m\neq 1$, równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{1}{m+1}$.

Ad c)

$\frac{a-bx}{c}+x=\frac{cx-b}{c} \quad /\cdot c$

$a-bx+cx=cx-b$

$-bx=-a-b \quad /\cdot(-1)$

$bx=a+b \quad /:b$

$x=\frac{a+b}{b}$

Gdy $c=0$ lub gdy $b=0$, i $a\neq 0$ równanie nie ma rozwiązania, gdy $b=0$ i $a=0$, równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, a gdy $b\neq 0$, równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{a+b}{b}$.

FUNKCJA KWADRATOWA, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

FUNKCJA KWADRATOWA, JEJ WYKRES I WŁASNOŚCI

ZADANIE 1

Wykonaj wykres funkcji *f*, określ jej własności oraz podaj liczbę rozwiązań $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru *m*. Przedstaw na wykresie zależność między ilością rozwiązań a wartością parametru *m*.

a) $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$ **b)** $f(x) = x^2 - |5x + 6|$ **c)** $f(x) = |x^2 - 5x| - 6$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$y = x^2 - 5x - 6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

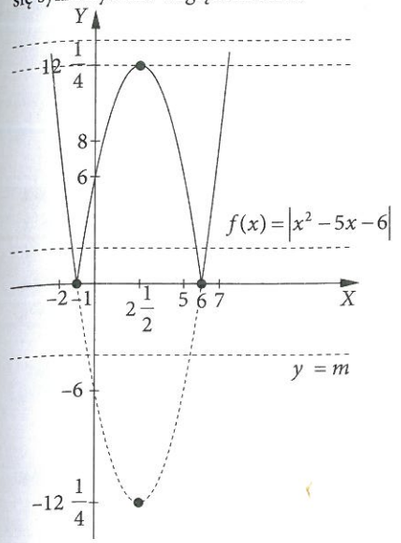
$W = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$W = \left(\frac{5}{2 \cdot 1}; \frac{-49}{4 \cdot 1}\right)$

$W = \left(2\frac{1}{2}; -12\frac{1}{4}\right)$ $x_1 = \frac{5-7}{2 \cdot 1} = -1$ $x_2 = \frac{5+7}{2 \cdot 1} = 6$ z *OY*: (0; −6)

Wykonujemy wykres funkcji bez bezwzględnej wartości, obliczając charakterystyczne punkty: wierzchołek, miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią *y*.

Wykonując wykres bezwzględnej wartości, pamiętamy, że ta część wykresu, która jest pod osią *x*, odbija się symetrycznie względem osi *x*.



Własności:

1) dziedzina: $x \in R$
2) zbiór wartości: $y \in \langle 0; \infty)$
3) miejsca zerowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$
4) z *OY*: (0; 6)
5) funkcja jest rosnąca

dla $x \in \langle -1; 2\frac{1}{2}\rangle$ oraz $x \in \langle 6; \infty)$

a malejąca dla $x \in (-\infty; -1\rangle$

oraz $x \in \langle 2\frac{1}{2}; 6\rangle$, największej wartości

nie można określić, a najmniejsza wynosi 0, $y_{min} = f(-1) = f(6) = 0$

6) funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne

7) prosta o równaniu $x = 2\frac{1}{2}$ jest osią

symetrii.

Aby określić ilość rozwiązań równania $f(x) = m$, przecinamy wykres funkcji prostymi $y = m$ i obserwujemy, ile jest punktów przecięcia tej prostej z wykresem funkcji.

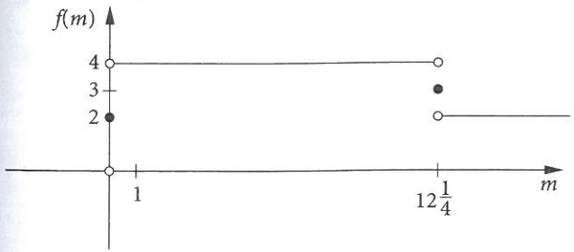
Dla: $m \in (-\infty; 0)$ – 0 rozwiązań

$m = 0$ – 2 rozwiązania

$m \in \left(0; 12\frac{1}{4}\right)$ – 4 rozwiązania

$m = 12\frac{1}{4}$ – 3 rozwiązania

$m \in \left(12\frac{1}{4}; \infty\right)$ – 2 rozwiązania



Ad b)

$f(x) = x^2 - |5x + 6|$ – wzór funkcji zależy od znaku wyrażenia pod bezwzględną wartością.

Gdy $5x + 6 \geq 0$, czyli $x \geq -\frac{6}{5}$ $f(x) = x^2 - (5x + 6) = x^2 - 5x - 6$,

a gdy $x < -\frac{6}{5}$ $f(x) = x^2 + (5x + 6) = x^2 + 5x + 6$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \text{ dla } x \in \langle -\frac{6}{5}; \infty) \\ x^2 + 5x + 6 \text{ dla } x \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \end{cases}$$

1) $f(x) = x^2 - 5x - 6$ dla $x \in \langle -\frac{6}{5}; \infty)$ Korzystamy z wcześniejszych obliczeń.

$\Delta = 49$ $\sqrt{\Delta} = 7$ $W = \left(2\frac{1}{2}; -12\frac{1}{4}\right)$ $x_1 = -1$ $x_2 = 6$ z OY: $(0; -6)$

2) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ dla $x \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right)$

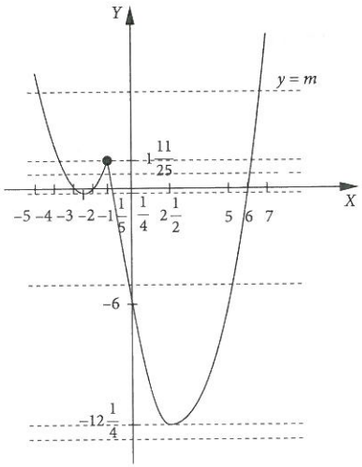
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ $\sqrt{\Delta} = 1$ $W = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-5}{2}; \frac{-1}{4}\right) = \left(-2\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ $x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$

Dodatkowo obliczamy wartość funkcji dla $x = -\frac{6}{5}$:

1) $f\left(-\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) - 6 = \frac{36}{25} + 6 - 6 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

2) $f\left(-\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) + 6 = 1\frac{11}{25}$



Własności:

1) dziedzina: $x \in R$
2) zbiór wartości: $y \in \langle -12\frac{1}{4}; \infty)$
3) miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 6$
4) punkt przecięcia z osią y: $(0; -6)$
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -2\frac{1}{2}; -1\frac{1}{5}\rangle$ oraz $x \in \langle 2\frac{1}{2}; \infty)$

   funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty; -2\frac{1}{2}\rangle$ oraz $x \in \langle -1\frac{1}{5}; 2\frac{1}{2}\rangle$

   najmniejsza wartość wynosi $-12\frac{1}{4}$: $y_{min} = f\left(2\frac{1}{2}\right) = -12\frac{1}{4}$
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; \infty)$, a ujemne dla $x \in (-3; -2) \cup (-1; 6)$.

Ilość rozwiązań równania $f(x) = m$:

dla $m \in \left(-\infty; -12\frac{1}{4}\right)$ → 0

$m = -12\frac{1}{4}$ → 1

$m \in \left(-12\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ → 2

$m = -\frac{1}{4}$ – 3

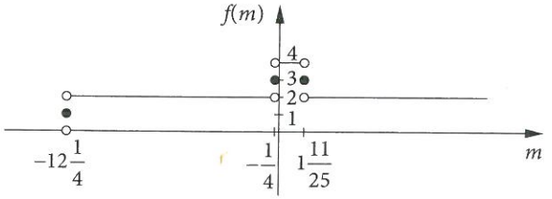
$m = \left(-\frac{1}{4}; 1\frac{11}{25}\right)$ → 4

$m \in = 1\frac{11}{25}$ → 3

$m \in \left(1\frac{11}{25}; \infty\right)$ → 2

Ostatecznie otrzymujemy:

$$f(m) = \begin{cases} 0 \text{ dla } m \in \left(-\infty; -12\frac{1}{4}\right) \\ 1 \text{ dla } m = -12\frac{1}{4} \\ 2 \text{ dla } m \in \left(-12\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{11}{25}; \infty\right) \\ 3 \text{ dla } m = \left\{-\frac{1}{4}, 1\frac{11}{25}\right\} \\ 4 \text{ dla } m \in \left(-\frac{1}{4}; 1\frac{11}{25}\right) \end{cases}$$



Ad c) $f(x) = |x^2 - 5x| - 6$

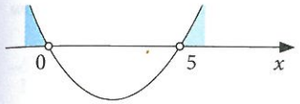
Wzór funkcji zależy od znaku wyrażenia $x^2 - 5x$.

$x^2 - 5x \geq 0$

$x(x - 5) \geq 0$

$x = 0$ lub $x - 5 = 0$

$x = 5$



$x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 5; \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \text{ dla } x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 5; \infty) \\ -x^2 + 5x - 6 \text{ dla } x \in (0; 5) \end{cases}$$

1) $f(x) = x^2 - 5x - 6$ dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup (5; \infty)$. Korzystamy z wcześniejszych obliczeń.

$W = \left(2\frac{1}{2}; -12\frac{1}{4}\right)$ – nie należy do dziedziny, $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, x_1 i $x_2 \in \{(-\infty; 0) \cup \langle 5; \infty)\}$.

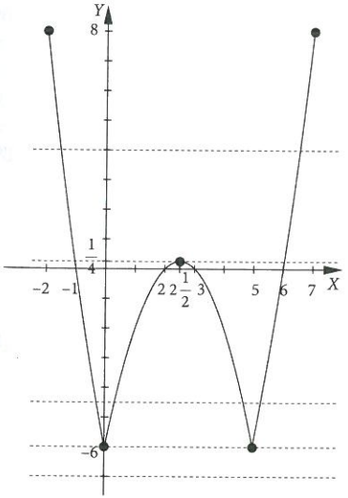
$f(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 - 6 = 25 - 25 - 6 = -6$ Wartość funkcji na końcach przedziału.

2) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ dla $x \in (0; 5)$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1$ $\sqrt{\Delta} = 1$

$W = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-5}{-2}; \frac{-1}{-4}\right) = \left(2\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ $x_1 = \frac{-5-1}{-2} = 3$ $x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2$ x_1 i $x_2 \in (0; 5)$

$(0; -6)$, $f(5) = -5^2 + 5 \cdot 5 - 6 = -6$



Własności:

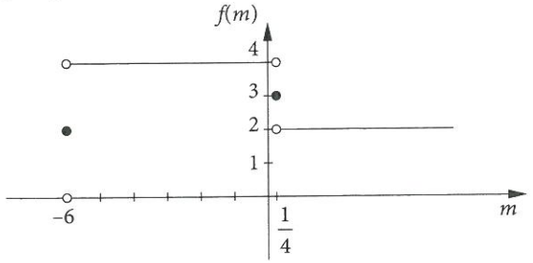
1) dziedzina: $x \in R$
2) zbiór wartości: $y \in \langle -6: \infty)$
3) miejsca zerowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$
4) z osią y: $(0; -6)$
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle 0; 2\frac{1}{2}\rangle$ oraz $x \in \langle 5; \infty)$,

   a malejąca dla $x \in (-\infty; 0\rangle$ oraz $x \in \langle 2\frac{1}{2}; 5\rangle$,

   najmniejsza wartość wynosi -6, $y_{min} = f(0) = f(5) = -6$
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \{(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; \infty)\}$, a ujemne dla $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$
7) osią symetrii jest prosta $x = 2\frac{1}{2}$.

Ilość rozwiązań równania $f(x) = m$:

$$f(m)=\begin{cases}0 \text{ dla } m\in(-\infty;-6)\\ 2 \text{ dla } m\in\left(\frac{1}{4};\infty\right)\cup(-6)\\ 3 \text{ dla } m=\frac{1}{4}\\ 4 \text{ dla } m\in\left(-6;\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$



RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE Z PARAMETREM

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Rozwiązując równania lub nierówności kwadratowe z parametrem, zapisujemy je w sposób uporządkowany, wypisujemy wartości współczynników a, b i c, zapisujemy wszystkie warunki zadania, często korzystając ze **wzorów Viete'a** $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Rozwiązujemy każdy warunek oddzielnie, a ostatecznym rozwiązaniem jest część wspólna wszystkich warunków.

ZADANIE 1

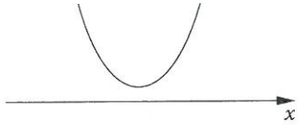
Wyznacz wartość parametru m, dla których nierówność $(m-1)x^2+mx+2>0$ jest prawdziwa dla $x\in R$.

ROZWIĄZANIE

$(m-1)^2+mx+2>0$

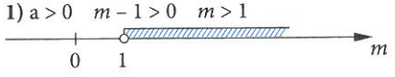
$a=m-1 \quad b=m \quad c=2$

Aby nierówność kwadratowa była zawsze prawdziwa, ramiona paraboli muszą być skierowane do góry i leży ona nad osią odciętych:



Oznacza to, że
1) $a>0$ i
2) $\Delta<0$.

1) $a>0 \quad m-1>0 \quad m>1$



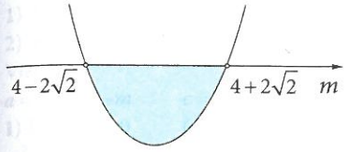
$m\in(1;\infty)$

2) $\Delta<0 \quad b^2-4ac<0 \quad m^2-4(m-1)\cdot 2<0$

$m^2-8m+8<0$

$\Delta_m=(-8)^2-4\cdot1\cdot8=64-32=32 \quad \sqrt{\Delta_m}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$m_1=\frac{8-4\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(4-2\sqrt{2}\right)}{2}=4-2\sqrt{2} \qquad m_2=\frac{8+4\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(4+2\sqrt{2}\right)}{2}=4+2\sqrt{2}$$



$m\in(4-2\sqrt{2}\,;4+2\sqrt{2})$

warunek 1) i 2) są spełnione, gdy $m\in\left(4-2\sqrt{2}\,;4+2\sqrt{2}\right)$

Sprawdzamy, czy nierówność będzie również prawdziwa, gdy $a=0$, czyli gdy nierówność nie będzie kwadratowa, tylko liniowa.

$a=0, \ m=1 \qquad (m-1)x^2+mx+2>0$

$x+2>0, \ x>-2$ – nie jest zawsze prawdziwa.

Odpowiedź: Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy $m\in(4-2\sqrt{2};4+2\sqrt{2})$.

ZADANIE 2

Wyznacz wartości m, dla których równanie $2mx^2+3mx+m-5=0$ ma dwa różne pierwiastki.

ROZWIĄZANIE

Jeśli dwa pierwiastki, to $a\neq0$, a skoro różne, to $\Delta>0$.

$a=2m \quad b=3m \quad c=m-5$ **1)** $a\neq0$ **2)** $\Delta>0$

1) $2m\neq0 \quad \underline{m\neq0}$

2) $b^2-4ac>0$

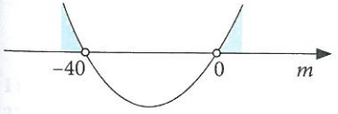
$(3m)^2-4\cdot2m(m-5)>0$

$9m^2-8m^2+40m>0$

$m^2+40m>0$

$m(m+40)>0$

$m=0 \quad m=-40$



$m\in(-\infty;-40)\cup(0;\infty)$ **1)** i **2)** – ten sam przedział

Odpowiedź: Równanie ma dwa różne pierwiastki dla $m\in(-\infty;-40)\cup(0;\infty)$.

ZADANIE 3

Dla jakiej wartości m równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku?

ROZWIĄZANIE

1) $a \neq 0$ – dwa **2)** $\Delta > 0$ – różne **3)** $x_1x_2 > 0$ – tego samego znaku

$a = m + 1 \quad b = -4m \quad c = 2m + 3$

1) $m + 1 \neq 0 \quad \underline{m \neq -1}$

2) $b^2 - 4ac > 0$

$(-4m)^2 - 4(m+1)(2m+3) > 0$

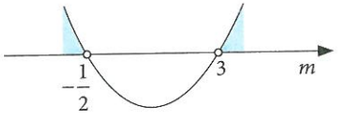
$16m^2 - 4(2m^2 + 3m + 2m + 3) > 0 \quad /:4$

$4m^2 - (2m^2 + 5m + 3) > 0$

$4m^2 - 2m^2 - 5m - 3 > 0$

$\mathbf{2m^2 - 5m - 3 > 0}$

$\Delta_m = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7 \quad m_1 = \frac{5-7}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \quad m_2 = \frac{5+7}{2 \cdot 2} = 3$



$m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$

3) $x_1x_2 > 0$

$\frac{c}{a} > 0$

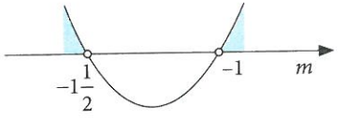
$ac > 0$

$(m+1)(2m+3) > 0$

$2\left(m+1\right)\left(m+\frac{3}{2}\right) > 0 \quad /:2$

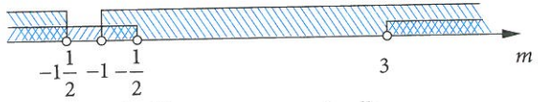
$\left(m+1\right)\left(m+1\frac{1}{2}\right) > 0$

$m = -1 \quad m = -1\frac{1}{2}$



$m \in \left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right) \cup (-1; \infty)$

1) i 2) i 3)



Odpowiedź: Równanie ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku dla $m \in \left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$.

Korzystamy ze wzoru Vieta'a $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Znak dzielenia i mnożenia dwóch wyrażeń jest taki sam.

ZADANIE 4

Wyznacz wartość parametru m, dla których równanie $2x^2 - mx - m + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

ROZWIĄZANIE

1) $\Delta > 0$ – dwa różne pierwiastki

2) $x_1x_2 < 0$ – jeśli różnych znaków, to ich iloczyn musi być mniejszy od zera, korzystamy ze wzoru Vieta'a.

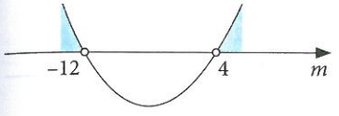
$a = 2 \quad b = -m \quad c = -m + 6$

1) $b^2 - 4ac > 0 \quad (-m)^2 - 4 \cdot 2(-m+6) > 0$

$\mathbf{m^2 + 8m - 48 > 0}$

$\Delta_m = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 64 + 192 = 256 \quad \sqrt{\Delta_m} = 16$

$m_1 = \frac{-8-16}{2 \cdot 1} = -12 \quad m_2 = \frac{-8+16}{2} = 4$



$\underline{m \in (-\infty; -12) \cup (4; \infty)}$

2) $\frac{c}{a} < 0$

$ac < 0$

$2(-m+6) < 0 \quad /:2$

$-m < -6 \quad /\cdot(-1)$

$m > 6$

$\underline{m \in (6; \infty)}$

1) i 2)

Odpowiedź: Równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach, gdy $m \in (6; \infty)$.

ZADANIE 5

Dla jakich wartości m równanie $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

ROZWIĄZANIE

1) $a \neq 0$ – dwa pierwiastki **2)** $\Delta > 0$ – różne

3) $x_1x_2 > 0$ – jednakowe znaki **4)** $x_1 + x_2 > 0$ – dodatnie

$a = m - 2 \quad b = -2(m+3) \quad c = m - 1$

1) $m - 2 \neq 0 \quad \underline{m \neq 2}$

2) $b^2 - 4ac > 0$

$[-2(m+3)]^2 - 4(m-2)(m-1) > 0$

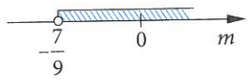
$4(m+3)^2 - 4(m-2)(m-1) > 0 \quad /:4$

$m^2 + 6m + 9 - (m^2 - m - 2m + 2) > 0$

$m^2 + 6m + 9 - m^2 + 3m - 2 > 0$

$9m > -7 \quad /:9$

$m < -\frac{7}{9}$



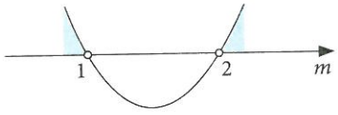
$m \in \left(-\frac{7}{9};\infty\right)$

3) $\frac{c}{a} > 0$

$ac > 0$

$(m-2)(m-1) > 0$

$m = 2 \quad m = 1$



$m \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$

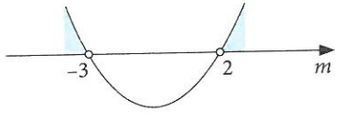
4) $\frac{-b}{a} > 0$

$-ba > 0$

$2(m+3)(m-2) > 0 \quad /:2$

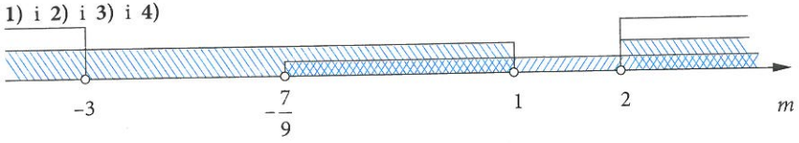
$(m+3)(m-2) > 0$

$m = -3 \quad m = 2$



$m \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$

1) i 2) i 3) i 4)



Odpowiedź: Równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie dla $m \in (2;\infty)$.

ZADANIE 6

Dla jakich wartości m równanie $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

ROZWIĄZANIE

1) $a \neq 0$ – równanie kwadratowe
2) $\Delta > 0$ – różne
3) $x_1 x_2 > 0$ – te same znaki
4) $x_1 + x_2 < 0$ – dwa ujemne

$a = m - 1 \qquad b = -2(m+1) \qquad c = m - 2$

1) $m - 1 \neq 0 \quad \underline{m \neq 1}$

2) $b^2 - 4ac > 0$

$[-2(m+1)]^2 - 4(m-1)(m-2) > 0$

$4(m^2 + 2m + 1) - 4(m^2 - m - 2m + 2) > 0 \quad /:4$

$m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3m - 2 > 0$

$5m > 1 \qquad m > \frac{1}{5}$

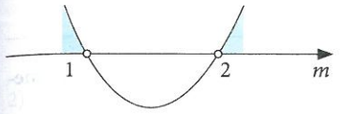
$m \in \left(\frac{1}{5};\infty\right)$

3) $\frac{c}{a} > 0$

$ac > 0$

$(m-1)(m-2) > 0$

$m = 1 \quad m = 2$



$m \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$

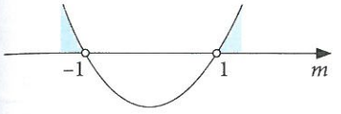
4) $\frac{-b}{a} < 0$

$-ba < 0$

$2(m+1)(m-1) < 0 \quad /:2$

$(m+1)(m-1) < 0$

$m = -1 \quad m = 1$



$m \in (-1; 1)$

Razem: **1)** i **2)** i **3)** i **4)**

Odpowiedź: Równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne dla $m \in \left(\frac{1}{5};1\right)$.

ZADANIE 7

Dla jakiej wartości parametru m równanie $mx^2 + 3mx - m + 4 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

ROZWIĄZANIE

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma jedno rozwiązanie, gdy jest równaniem kwadratowym: $a \neq 0$ i $\Delta = 0$ lub gdy jest to równanie liniowe: $a = 0$ i $bx + c = 0$ jest równaniem mającym rozwiązanie.

1) $a \neq 0$ i **2)** $\Delta = 0$ lub $a = 0$

$a = m \quad b = 3m \quad c = -m + 4$

1) $a \neq 0 \quad \underline{m \neq 0}$

2) $b^2 - 4ac = 0 \qquad (3m)^2 - 4m(-m+4) = 0$

$9m^2 + 4m^2 - 16m = 0 \qquad 13m^2 - 16m = 0$

$13m\left(m - \frac{16}{13}\right) = 0 \quad /:13$

$m\left(m - \frac{16}{13}\right) = 0$

$m = 0 \quad \text{lub} \quad m = \frac{16}{13}$ zgodnie z założeniem $m \neq 0$

Sprawdzam rozwiązanie równania liniowego, gdy $m = 0$:
$0x^2 + 3 \cdot 0 \cdot x - 0 + 4 = 0$
$4 = 0$ – równanie sprzeczne, nie ma rozwiązania

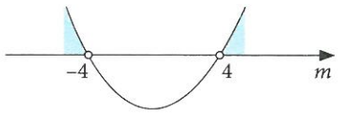
Odpowiedź: Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $m = \frac{16}{13}$.

ZADANIE 8

Podaj liczbę różnych pierwiastków równania $(m-5)x^2 + (m-2)x - 1 = 0$ w zależności od parametru m.

ROZWIĄZANIE

$a = m - 5 \quad b = m - 2 \quad c = -1$
1) Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy $a \neq 0$ i $\Delta > 0$.
$m - 5 \neq 0 \quad \underline{m \neq 5}$
$b^2 - 4ac > 0 \qquad (m-2)^2 - 4(m-5) \cdot (-1) > 0$
$m^2 - 4m + 4 + 4m - 20 > 0 \qquad m^2 - 16 > 0$
$(m+4)(m-4) > 0$
$m = -4 \quad m = 4$



$\underline{m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)}$

Razem:

$\underline{m \in (-\infty; -4) \cup (4; 5) \cup (5; \infty)}$

2) Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 0$ i $\Delta = 0$ lub gdy jest to równanie liniowe:
$a = 0$ – do sprawdzenia.
$m \neq 5 \quad \underline{m_1 = -4} \quad \underline{m_2 = 4}$ Korzystamy z wcześniejszych obliczeń.
dla $m = 5$
$(5-2)x - 1 = 0 \quad 3x - 1 = 0$ – jedno rozwiązanie
$\underline{m = 5}$

3) Równanie nie ma rozwiązania, gdy: $a \neq 0$ i $\Delta < 0$.
Korzystając z wcześniejszych obliczeń: $\underline{m \in (-4; 4)}$

Odpowiedź: Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy $m \in (-\infty; -4) \cup (4; 5) \cup (5; \infty)$, jedno rozwiązanie dla $m_1 = -4$, $m_2 = 4$ i $m_3 = 5$ oraz nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-4; 4)$.

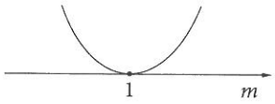
ZADANIE 9

Dla jakiej wartości m suma odwrotności pierwiastków równania $x^2 - (m-5)x + 2(3-m) = 0$ jest ujemna.

ROZWIĄZANIE

$a = 1 \quad b = -(m-5) \quad c = 2(3-m)$
1) $\Delta \geq 0$ – dwa pierwiastki – różne lub równe **2)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0$ – suma odwrotności ujemna

1) $b^2 - 4ac \geq 0$
$[-(m-5)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2(3-m) \geq 0$
$m^2 - 10m + 25 - 24 + 8m \geq 0$
$m^2 - 2m + 1 \geq 0$ Jest to wzór skróconego mnożenia.
$(m-1)^2 \geq 0$



$m = 1$
$m \in R$

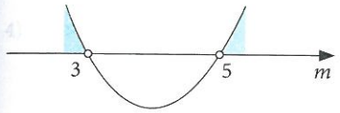
2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0$ Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

$\frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} < 0$ Dodajemy, zapisując ułamki na jednej kresce ułamkowej.

$\frac{x_2 + x_2}{x_1 x_2} < 0$ Stosujemy wzory Viete'a.

$\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} < 0$ Podstawiamy $a = 1$

$-\frac{b}{c} < 0$
$-bc < 0$
$(m-5) \cdot 2(3-m) < 0 \quad /:2$
$-(m-5)(m-3) < 0 \quad /\cdot(-1)$
$(m-5)(m-3) > 0$
$m = 5 \quad m = 3$



$\underline{m \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty)}$ – razem **1)** i **2)**

Odpowiedź: Suma odwrotności pierwiastków jest ujemna dla $m \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$.

ZADANIE 10

Wyznacz wartość parametru m, dla których suma kwadratów pierwiastków równania $mx^2 + 2(m+1)x + m = 0$ jest większa od ich sumy.

ROZWIĄZANIE

$a = m \quad b = 2(m+1) \quad c = m$
1) $a \neq 0$ – równanie kwadratowe
2) $\Delta \geq 0$ – dwa różne lub równe rozwiązania
3) $x_1^2 + x_2^2 > x_1 + x_2$
$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > x_1 + x_2$ Musimy skorzystać ze wzorów Viete'a. Po lewej stronie dodajemy i odejmujemy $2x_1x_2$, by otrzymać kwadrat sumy.
$(x_1 + x_2)^2 > (x_1 + x_2) + 2x_1x_2$

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^2 > -\frac{b}{a} + 2\cdot\frac{c}{a}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a} > \frac{2c}{a} \quad /\cdot a^2 \quad (a \neq 0)$$

$$\underline{b^2 + ab > 2ac}$$

1) $\underline{m \neq 0}$

2) $b^2 - 4ac \geq 0$

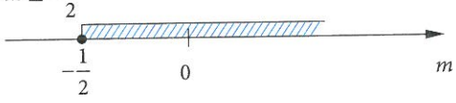
$[2(m+1)]^2 - 4m \cdot m \geq 0$

$4(m^2 + 2m + 1) - 4m^2 \geq 0 \quad /:4$

$m^2 + 2m + 1 - m^2 \geq 0$

$2m \geq -1 \quad /:2$

$m \geq -\frac{1}{2}$



$m \in \langle -\frac{1}{2}; \infty)$

3) $b^2 + ab > 2ac$

$[2(m+1)]^2 + m \cdot 2(m+1) > 2m \cdot m$

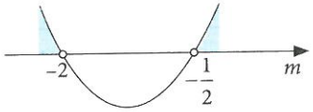
$4(m^2 + 2m + 1) + 2m^2 + 2m > 2m^2 \quad /:2$

$2(m^2 + 2m + 1) + m > 0$

$2m^2 + 4m + 2 + m > 0$

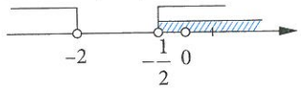
$\underline{2m^2 + 5m + 2 > 0}$

$\Delta_m = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 \qquad \sqrt{\Delta_m} = 3 \qquad m_1 = \frac{-5-3}{2\cdot 2} = -2 \qquad m_2 = \frac{-5+3}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$



$m \in (-\infty; 2) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$

Razem: **1)** i **2)** i **3)**



Odpowiedź: Suma kwadratów pierwiastków równania jest większa od ich sumy,

gdy $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; \infty)$.

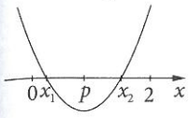
ZADANIE 11

Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki należące do przedziału (0; 2)?

ROZWIĄZANIE

Rozpatrzymy położenie paraboli, które spełnia warunki zadania.

I Ramiona paraboli skierowane do góry:



$a = m + 1 \quad b = -2 \quad c = m - 1 \quad p = -\frac{b}{2a}$

Ramiona skierowane do góry.
Różne pierwiastki.

Warunki:

1) $a > 0 \quad m + 1 > 0 \quad \underline{m > -1}$

2) $\Delta > 0 \quad b^2 - 4ac > 0$

$(-2)^2 - 4(m+1)(m-1) > 0 \qquad 4 - 4(m^2 - 1) > 0$

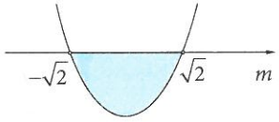
$4 - 4m^2 + 4 > 0 \qquad 8 - 4m^2 > 0 \quad /:(-4)$

$m^2 - 2 < 0$

$\left(m + \sqrt{2}\right)\left(m - \sqrt{2}\right) < 0$

$m_1 = -\sqrt{2} \quad m_2 = \sqrt{2}$

$m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$



3) dla $x = 0$

$(m+1) \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + m - 1 > 0$

$\underline{m > 1}$

Dla $x = 0$ oraz $x = 2$ wartość wyrażenia jest dodatnia.

dla $x = 2$:

$(m+1) \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + m - 1 > 0 \qquad 4m + 4 - 4 + m - 1 > 0$

$5m > 1 \quad /:5$

$m > \frac{1}{5}$

$\underline{\text{Razem:}}\ m > 1$ i $m > \frac{1}{5}$, czyli $\underline{m > 1}$

4) $\frac{-b}{2a} > 0$ i $-\frac{b}{2a} < 2$

Wierzchołek leży pomiędzy liczbami 0 i 2.

$\frac{2}{2(m+1)} > 0 \qquad \frac{1}{m+1} - \frac{2}{1} < 0$

$\frac{1}{m+1} > 0 \qquad \frac{1}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m+1} < 0$

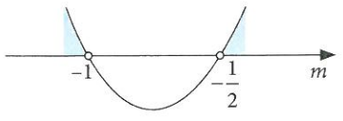
$m + 1 > 0 \qquad \frac{1-2(m+1)}{m+1} < 0$

$\underline{m > -1} \qquad \frac{1-2m-2}{m+1} < 0$

$(-2m - 1)(m + 1) < 0 \qquad -2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m+1) < 0 \ /:(-2)$

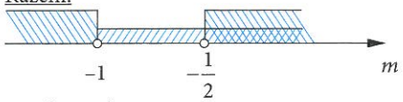
$\left(m + \frac{1}{2}\right)(m+1) > 0$

$m = -\frac{1}{2} \qquad m = -1$



$m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

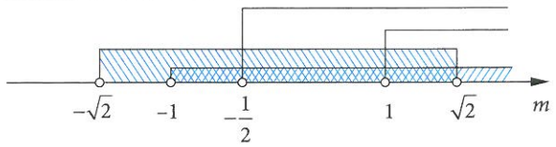
Razem:



$m \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Rozwiązaniem pierwszego przypadku, gdy ramiona paraboli są skierowane do góry, jest część wspólna wszystkich czterech warunków.

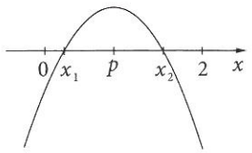
Razem: **1)** i **2)** i **3)** i **4)**



$m \in \left(1;\sqrt{2}\right)$

Określając warunki w drugim przypadku, korzystamy z wcześniejszych obliczeń.

II Ramiona paraboli skierowane do dołu



Warunki:

1) $a < 0$ $m < -1$

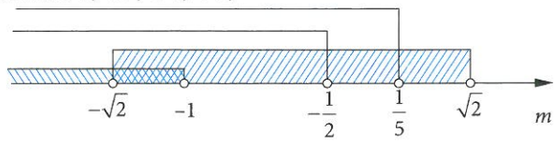
2) $\Delta > 0$ $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

3) dla $x = 0$: $m < 1$ dla $x = 2$ $m < \frac{1}{5}$ Razem $m < \frac{1}{5}$

4) $-\frac{b}{2a} > 0$ i $-\frac{b}{2a} < 2$ razem: $m \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Rozwiązaniem drugiego przypadku, gdy ramiona są skierowane do dołu, jest wspólna część czterech warunków.

Razem: **1)** i **2)** i **3)** i **4)**



$m \in (-\sqrt{2};-1)$

Ostatecznym rozwiązaniem zadania jest suma obu przypadków: I i II.

Odpowiedź: Równanie ma dwa różne pierwiastki należące do przedziału (0; 2) dla $m \in \left(-\sqrt{2};-1\right) \cup \left(1;\sqrt{2}\right)$.

WIELOMIANY

DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH, STOPIEŃ I RÓWNOŚĆ WIELOMIANU

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wielomianem stopnia n zmiennej x jest funkcja określana wzorem
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,
gdzie n jest liczbą naturalną i oznacza stopień wielomianu, a liczby a_0, a_1, … a_n są współczynnikami wielomianu i $a_n \neq 0$.

Stopień wielomianu $W(x)$ – najwyższy wykładnik potęgi zmiennej x.

Równość wielomianu – dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia i współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej mają taką samą wartość.

Dodając lub odejmując wielomiany, możemy wykonać działania tylko między wyrazami o tym samym wykładniku potęgi. Przy mnożeniu wielomianów pamiętamy, że mnożąc potęgi o tych samych podstawach, wykładniki dodajemy.
Aby obliczyć **wyraz wolny wielomianu,** obliczamy $W(0)$, a gdy chcemy wyznaczyć **sumę współczynników wielomianu,** to $W(1)$.

Dzielenie wielomianów
Dla każdych dwóch wielomianów W oraz V ($V \neq 0$) istnieje wielomian Q, który jest wynikiem dzielenia i R będący resztą z dzielenia.
$\frac{W}{V} = Q + \frac{R}{V}$, $W(x) = Q(x) \cdot V(x) + R(x)$ dla $x \in \mathrm{R}$.
Stopień wielomianu R jest mniejszy od stopnia wielomianu V. Wielomian W jest podzielny przez wielomian V, gdy R jest wielomianem zerowym.

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$, gdzie $a \in R$.

Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W, gdy $W(a) = 0$ czyli, gdy wielomian W jest podzielny przez $x - a$.

ZADANIE 1

Dane są wielomiany:
$H(x) = -22x^4 + 2x^3 - 4x$, $W(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 7$, $G(x) = 11x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 10$
Wykonaj działanie $G(x) - 3W(x) + \frac{1}{2}H(x)$ **i określ stopień otrzymanego wielomianu.**

ROZWIĄZANIE

$11x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 10 - 3 \cdot (-x^3 + 2x^2 - 5x + 7) +$

$+ \frac{1}{2} \cdot (-22x^4 + 2x^3 - 4x) = 11x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 10 +$

$+ 3x^3 - 6x^2 + 15x - 21 - 11x^4 + x^3 - 2x = 6x^3 - 7x^2 + 8x - 11$

Podstawiamy dane wielomiany. Wykonujemy zaznaczone działania i redukujemy wyrazy podobne.

Odpowiedź: Otrzymany wielomian jest stopnia trzeciego.

ZADANIE 2

Dane są wielomiany: $W(x) = -2x^3 + 3x - 4$ *i* $R(x) = x^4 - 2x^3 - 2x$ **. Oblicz sumę, różnicę i iloczyn wielomianów.**

ROZWIĄZANIE

Obliczamy sumę:

$W(x) + R(x) = (-2x^3 + 3x - 4) + (x^4 - 2x^3 - 2x) = -2x^3 + 3x - 4 + x^4 - 2x^3 - 2x = x^4 - 4x^3 + x - 4$

Obliczamy obie różnice:

$W(x) - R(x) = (-2x^3 + 3x - 4) - (x^4 - 2x^3 - 2x) = -2x^3 + 3x - 4 - x^4 + 2x^3 + 2x = -x^4 + 5x - 4$

$R(x) - W(x) = (x^4 - 2x^3 - 2x) - (-2x^3 + 3x - 4) = x^4 - 2x^3 - 2x + 2x^3 - 3x + 4 = x^4 - 5x + 4$

Obliczamy iloczyn:

$W(x) \cdot R(x) = (-2x^3 + 3x - 4)(x^4 - 2x^3 - 2x) = -2x^3 \cdot x^4 - 2x^3(-2x^3) - 2x^3(-2x) + 3x \cdot x^4 +$

$+ 3x(-2x^3) + 3x(-2x) - 4x^4 + 8x^3 + 8x = -2x^7 + 4x^6 + 4x^4 + 3x^5 - 6x^4 - 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 + 8x =$

$= -2x^7 + 4x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 8x$

ZADANIE 3

Dobierz wartości liczb a **oraz** b **tak, aby dane wielomiany były równe:**
$W(x) = (2a - 3b)x^5 + 7x^4 + 1$
$G(x) = 55x^5 - (3a + b)x^3 + 7x^4 + 1$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\begin{cases} 2a - 3b = 55 \\ -3a - b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a - 3b = 55 \\ b = -3a \end{cases}$

$2a + 9a = 55$
$11a = 55$
$a = 5, b = -15$

Wielomiany są równe, jeśli są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Odpowiedź: Wielomiany są równe, gdy $a = 5$ i $b = -15$.

ZADANIE 4

Oblicz wyraz wolny oraz sumę współczynników wielomianu $W(x) = (x^2 - 1)(2x^2 + 11x + 13)(x^3 + 5)$.

ROZWIĄZANIE

$W(x) = (x^2 - 1)(2x^2 + 11x + 13)(x^3 + 5)$

$a_0 = W(0) = (0^2 - 1)(2 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 + 13)(0^3 + 5) =$

$= (-1) \cdot 13 \cdot 5 = -65$

$W(1) = (1^2 - 1)(2 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 13)(1^3 + 5) = 0$

Aby wyznaczyć wyraz wolny i sumę współczynników, nie trzeba wielomianu porządkować.

Odpowiedź: Wyraz wolny wynosi -65, a suma współczynników wielomianu 0.

ZADANIE 5

Dany jest wielomian $W(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$**. Oblicz wartość wielomianu dla** $x = -\sqrt{2}$ **oraz** $W(-1)$.

ROZWIĄZANIE

Aby obliczyć wartość wielomianu, należy w miejsce x podstawić wskazaną liczbę i wykonać obliczenia.

$x = -\sqrt{2}$, $W(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

$W(-\sqrt{2}) = -(-\sqrt{2})^4 + 5(-\sqrt{2})^3 - 4(-\sqrt{2}) - 10 = -(2^{\frac{1}{2}})^4 - 5 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^3 + 4\sqrt{2} - 10 = -2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1}} + 4\sqrt{2} - 10 =$

$= -2^2 - 5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{2} - 10 = -4 - 5 \cdot 2^{1+\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} - 10 = -14 - 5 \cdot 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} = -14 - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \mathbf{-14 - 6\sqrt{2}}$

$W(-1) = -(-1)^4 + 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) - 10 = -1 - 5 + 4 - 10 = \mathbf{-12}$

ZADANIE 6

Sprawdź, czy dana liczba a **jest pierwiastkiem danego wielomianu:**

a) $W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 9x - 1$, $a = -2$
b) $G(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x - 4$, $a = 1$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$W(-2)=2\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2-9\cdot(-2)-1=$

$=-16-8+18-1=-7$

Należy sprawdzić, czy wartość wielomianu dla zaznaczonej wartości jest równa zeru.

Odpowiedź: Liczba a nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Ad b)

$G(1)=1^{11}+1^{10}+1^6+1-4=0$

Tak jak w poprzednim przykładzie.

Odpowiedź: Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu.

ZADANIE 7

Podziel wielomian $W(x)=x^8+x^7-2x^5+x^4-x^3+1$ przez dwumian $D(x)=x-1$.

ROZWIĄZANIE

Przypomnijmy, że algorytm dzielenia wielomianów przypomina algorytm dzielenia liczb całkowitych, tj. „dzielenia pisemnego", z tą różnicą, że w wypadku dzielenia wielomianów dzielimy najpierw składnik najwyższego stopnia w dzielnej przez składnik najwyższego stopnia w dzielniku. Otrzymany „częściowy" iloraz wpisujemy nad tym składnikiem dzielnej, którego użyliśmy do dzielenia, i mnożymy go przez kolejne składniki dzielnika, a tak otrzymane iloczyny, ale z przeciwnym znakiem, wpisujemy pod składniki tego samego stopnia w dzielnej. Następnie dodajemy „podpisany" wielomian do dzielnej i do otrzymanej sumy „spisujemy" z góry kolejny składnik dzielnej. Teraz powtarzamy powyższe czynności, biorąc otrzymaną przed chwilą „uzupełnioną" sumę zamiast dzielnej. i tak aż do wyczerpania wszystkich składników dzielnej. Ostatnia otrzymana suma okazuje się wielomianem stopnia niższego niż dzielnik, a więc w tym wypadku stałą liczbą, resztą z dzielenia. Nad dzielną odczytujemy iloraz. Jeżeli ta reszta wynosi 0, to znaczy, że dzielna dzieli się przez dzielnik bez reszty.

Przygotowując dzielenie, musimy uwzględnić w dzielnej składniki wszystkich kolejnych stopni, od najwyższego aż do wyrazu stałego. Jeżeli składnik któregoś stopnia nie występuje w dzielnej, to znaczy, że współczynnik przy potędze tego stopnia jest równy 0 i należy to 0 wpisać w odpowiednim miejscu. W poniższym rozwiązaniu te dopisane 0 zostały wytłuszczone, podobnie, jak „spisywane" kolejne składniki dzielnej.

$$
\begin{array}{llllllllll}
x^7 & +2x^6 & +2x^5 & +0x^4 & +1x^3 & +0x^2 & +0x & 0 & & \\
\hline
(1x^8 & +1x^7 & \mathbf{+0x^6} & -2x^5 & +1x^4 & -1x^3 & \mathbf{+0x^2} & \mathbf{+0x} & +1) & : \quad (x-1) \\
-1x^8 & +1x^7 & & & & & & & & \\
\hline
= & 2x^7 & \mathbf{+0x^6} & & & & & & & \\
 & -2x^7 & +2x^6 & & & & & & & \\
\hline
 & = & +2x^6 & \mathbf{-2x^5} & & & & & & \\
 & & -2x^6 & +2x^5 & & & & & & \\
\hline
 & & = & +0x^5 & \mathbf{+1x^4} & & & & & \\
 & & & -0x^5 & +0x^4 & & & & & \\
\hline
 & & & = & +1x^4 & \mathbf{-1x^3} & & & & \\
 & & & & -1x^4 & +1x^3 & & & & \\
\hline
 & & & & = & +0x^3 & \mathbf{+0x^2} & & & \\
 & & & & & -0x^3 & +0x^2 & & & \\
\hline
 & & & & & = & +0x^2 & \mathbf{+0x} & & \\
 & & & & & & -0x^2 & +0x & & \\
\hline
 & & & & & & = & +0x & \mathbf{+1} & \\
 & & & & & & & -0x & +0 & \\
\hline
 & & & & & & & = & 1 &
\end{array}
$$

A zatem iloraz to wielomian $x^7+2x^6+2x^5+x^3$, a reszta wynosi 1.

ROZWIĄZANIE INNĄ METODĄ

Jeżeli dobrze przeanalizujemy powyższe rozwiązanie, to zauważymy, że do wykonania wszystkich występujących tam działań wystarczy znajomość współczynników dzielnej oraz liczby x_0 w dwumianie $x-x_0$ (dzielniku). Obserwację tę wykorzystano do opracowania tzw. algorytmu Hornera, służącego do dzielenia wielomianu przez dwumian pierwszego stopnia. Odbywa się to w tzw. tabeli Hornera. W pierwszym wierszu tabeli wypisujemy wszystkie kolejne stopnie niewiadomej, od najwyższego (tj. od stopnia wielomianu-dzielnej) do stopnia 0. W drugim wierszu wypisujemy, pod odpowiednim stopniem, współczynniki dzielnej. Jeżeli składnik danego stopnia nie występuje w dzielnej, to znaczy, że współczynnik przy nim wynosi 0 i to właśnie zero wpisujemy do odpowiedniego pola tabeli. na początku trzeciego wiersza, na lewo od kolumny odpowiadającej współczynnikowi kierunkowemu dzielnej, wpisujemy liczbę x_0 z dzielnika, tj. dwumianu $x-x_0$. W trzecim wierszu tabeli będziemy wpisywać kolejne współczynniki ilorazu. Ponieważ dzieląc wielomian stopnia n przez dwumian pierwszego stopnia, otrzymujemy wielomian stopnia $n-1$, w kolumnie stopnia wielomianu-dzielnej wpisujemy 0. A teraz rozpoczynamy stosowanie algorytmu. Mnożymy x_0 przez liczbę ostatnio wpisaną do trzeciego wiersza, do iloczynu dodajemy stojący nad tą liczbą współczynnik dzielnej, a tak otrzymaną sumę wpisujemy do kolejnego wolnego pola trzeciego wiersza itd. na prawo od kolumny wyrazu wolnego znajduje się kolumna reszty. W tej kolumnie wpisujemy w trzecim wierszu ostatnią z sum otrzymanych w procesie stosowania algorytmu Hornera. Jeżeli wpisana liczba jest równa 0, to znaczy, że mieliśmy do czynienia z dzieleniem bez reszty, a kolejne liczby trzeciego wiersza podają kolejne współczynniki ilorazu. Jeżeli wpisana liczba jest różna od zera, to jest ona resztą z wykonanego dzielenia. Prześledźmy to na przykładzie z zadania.

	8	7	6	5	4	3	2	1	0	R
x_0	1	1	0	−2	1	−1	0	0	1	
1	0	1	2	2	0	1	0	0	0	1

A zatem iloraz to wielomian $x^7+2x^6+2x^5+x^3$, a reszta wynosi 1.

ZADANIE 8

Wykonaj dzielenie:

a) $(x^3+10x^2+22x-15):(x+5)$ **b)** $(28x^3-41x^2+63x-36):(4x-3)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$
\begin{array}{l}
x^2+5x-3 \\
\hline
(x^3+10x^2+22x-15):(x+5) \\
-x^3-5x^2 \\
\hline
\quad =\ 5x^2+22x-15 \\
\quad -5x^2-25x \\
\hline
\qquad =\ -3x-15 \\
\qquad\ \ +3x+15 \\
\hline
\qquad\ \ =\ \ =
\end{array}
$$

Dzielimy x^3 przez x, zapisujemy wynik x^2 i sprawdzamy nasze dzielenie, mnożąc x^2 przez x oraz przez 5 i zapisujemy wyniki z przeciwnymi znakami. Wykonujemy odejmowanie i powtarzamy: $5x^2:x=5x$ $5x\cdot x=5x^2$, zmieniony znak $-5x^2$, $5x\cdot 5=25x$, zmieniamy znak $-25x$, odejmujemy itd.

Ad b)

$$
\begin{array}{l}
7x^2-5x+12 \\
\hline
(28x^3-41x^2+63x-36):(4x-3) \\
-28x^3+21x^2 \\
\hline
\quad =\ -20x^2+63x-36 \\
\quad\ \ 20x^2-15x \\
\hline
\qquad =\ 48x-36 \\
\qquad -48x+36 \\
\hline
\qquad\ \ =\ \ =
\end{array}
$$

ZADANIE 9

Nie wykonując dzielenia, sprawdź, czy dany wielomian jest podzielny przez podany obok dwumian:

a) $W(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 6$, $D(x) = x - 2$

b) $W(x) = 5x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 3x - 2$, $D(x) = x + 2$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$W(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 32 - 8 - 32 + 8 = 0$

Obliczamy wartość wielomianu w miejscu zerowym dwumianu.

Odpowiedź: Wielomian jest podzielny przez dany dwumian.

Ad b)

$W(-2) = 5 \cdot (-2)^6 + 3 \cdot (-2)^5 - 2 \cdot (-2)^4 + 5 \cdot (-2)^2 - 6 - 2 =$

$= 320 - 96 - 32 + 20 - 8 = 204$

Tak jak w poprzednim przykładzie.

Odpowiedź: Wielomian nie jest podzielny przez dany dwumian.

ZADANIE 10

Nie wykonując dzielenia, wykaż, że wielomian $W(x) = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 6x + 12$ jest podzielny przez dwumian $V(x) = x + 2$.

ROZWIĄZANIE

$W(x) = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 6x + 12$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x + 2$, gdy $W(-2) = 0$.

$V(x) = x + 2$

$W(-2) = (-2)^6 + 2(-2)^5 - 5 \cdot (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 12 =$

$= 64 - 2 \cdot 32 - 5 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 12 + 12 = -80 + 64 + 16 = \mathbf{0}$

Odpowiedź: Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $V(x)$.

ZADANIE 11

Znajdź wartość współczynnika b, wiedząc, że wielomian $W(x) = 2x^2 - x - 6$ jest podzielny przez dwumian $D(x) = x - b$.

ROZWIĄZANIE

$2 \cdot b^2 - b - 6 = 0$

Wartość wielomianu w miejscu zerowym dwumianu musi być równa zeru.

$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49, \sqrt{\Delta} = 7,$

$b_1 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}, \quad b_2 = \frac{8}{4} = 2$

Odpowiedź: $b \in \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$.

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Rozkładając wielomian na czynniki, korzystamy ze **wzorów skróconego mnożenia** oraz **wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias oraz wymiernych pierwiastków wielomianu o współczynnikach całkowitych.**

Każdy wielomian stopnia wyższego niż dwa można przedstawić w postaci iloczynu czynników, które są wielomianami stopnia co najmniej drugiego.

Powtarzający się czynnik zapisujemy za pomocą potęgi, na przykład zamiast $x \cdot x \cdot x$ piszemy x^3.

We wzorach skróconego mnożenia $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ oraz $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ czynniki $a^2 + ab + b^2$ i $a^2 - ab + b^2$ są zawsze dodatnie, więc nie można ich rozłożyć na czynniki liniowe.

Wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Jeżeli współczynniki wielomianu są całkowite, a metoda wyłączania czynnika przed nawias lub zastosowanie wzorów skróconego mnożenia jest niemożliwa, korzystamy z twierdzeń mówiących, że:

– jeśli liczba całkowita jest pierwiastkiem wielomianu, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego tego wielomianu,

lub

– jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q jest dzielnikiem a_n – współczynnika przy najwyższej potędze x.

ZADANIE 1

Rozłóż wielomiany na czynniki:

a) $W(x) = -8x^5 - 6x^4 - 2x^3$ **b)** $W(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

c) $W(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x + 16$ **d)** $W(x) = x^3 - 13x + 12$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $W(x) = -8x^5 - 6x^4 - 2x^3 = -2x^3(4x^2 + 3x - 1)$

$4x^2 + 3x - 1$ – trójmian kwadratowy

$a = 4, b = 3, c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 \qquad \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-3-5}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1 \qquad x_2 = \frac{-3+5}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Trójmian kwadratowy $4x^2 + 3x - 1$ zapisujemy w postaci iloczynowej

$a(x - x_1)(x - x_2)$: $\quad 4(x+1)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

$W(x) = -2x^3 \cdot 4(x+1)\left(x - \frac{1}{4}\right) = -8x^3(x+1)\left(x - \frac{1}{4}\right)$ – wielomian został rozłożony na czynniki.

Można przekształcić postać iloczynową tak, by w nawiasie nie było ułamka oraz znak minus nie występował przed wyrażeniem:

$$W(x)=-8x^3(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)=-2\cdot 4x^3(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)=-2x^3(x+1)\cdot 4\left(x-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=-2x^3(x+1)(4x-1)=2x^3(x+1)(-1)(4x-1)=2x^3(x+1)(-4x+1)=2x^3(x+1)(1-4x)$$

Odpowiedź: Każda z postaci $W(x)=-8x^3(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $W(x)=-2x^3(x+1)(4x-1)$ oraz $W(x)=2x^3(x+1)(1-4x)$ przedstawia prawidłowo rozłożony na czynniki wielomian.

Ad b) $W(x)=x^3-x^2-x+1$

$W(x)=x^2(x-1)-(x-1)$

$W(x)=(x-1)(x^2-1)$

Wielomian składa się z czterech wyrazów. Przy parzystej liczbie wyrazów z każdej pary wyłączamy wspólny czynnik. Otrzymaliśmy dwa składniki, w których wspólne jest wyrażenie $(x-1)$, wyrażenie to wyłączamy przed nawias. W drugim nawiasie zapisujemy wszystko po „zabraniu" $(x-1)$, pamiętając, że jeśli „zabieramy" wszystko, to pozostaje liczba 1. W drugim nawiasie stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$W(x)=(x-1)(x^2-1^2)=(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$$

Odpowiedź: Wielomian rozłożony na czynniki ma postać $W(x)=(x-1)^2(x+1)$.

Ad c)

$$W(x)=-x^4+2x^3-8x+16=-x^3(x-2)-8(x-2)=(x-2)(-x^3-8)=$$

$$=-(x-2)(x^3+8)=-(x-2)(x^3+2^3)=-(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)$$

Odpowiedź: Postać iloczynowa wielomianu to: $W(x)=-(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)$

Ad d) $W(x)=x^3-13x+12$

Jeżeli wielomian składa się z trzech wyrazów, w których jeden ze współczynników jest sumą (nie patrząc na znaki) dwóch pozostałych $(13=1+12)$, to możemy ten wyraz „rozbić" tak, by z każdej pary wyłączyć wspólny czynnik przed nawias.

$$W(x)=x^3-x-12x+12=x(x^2-1)-12(x-1)=x(x+1)(x-1)-12(x-1)=$$

$$=(x-1)\left[x(x+1)-12\right]=(x-1)(x^2+x-12)$$

x^2+x-12 – obliczamy „ deltę"

$a=1 \quad b=1 \quad c=-12$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot(-12)=1+48=49 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-1-7}{2\cdot 1}=-4 \qquad x_2=\frac{-1+7}{2\cdot 1}=3$$

$x^2+x-12=(x+4)(x-3)$

Odpowiedź: $W(x)=(x-1)(x+4)(x-3)$ – postać iloczynowa.

ZADANIE 2

Rozłóż dany wielomian na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $W(x)=28x^8-14x^6+7x^4$ **b)** $W(x)=x^5-x^3+8x^2-8$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$W(x)=7x^4\cdot(4x^4-2x^2+1)$ — Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$W(x)=7x^4\cdot(4x^4-2x^2+1+6x^2-6x^2)=$

$=7x^4\cdot\left[(4x^4+4x^2+1)-6x^2\right]=$ — Zauważmy, że wielomian w nawiasie można uzupełnić tak, aby otrzymać różnicę kwadratów.

$=7x^4\cdot\left[(2x^2+1)^2-6x^2\right]=$

$=7x^4\cdot(2x^2-\sqrt{6}x+1)\cdot(2x^2+\sqrt{6}x+1)$

Ad b)

$W(x)=x^3\cdot(x^2-1)+8(x^2-1)=$ — Grupujemy wyrazy podobne i rozkładamy wielomiany, które powstały w nawiasach, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$=(x^2-1)\cdot(x^3+8)=$

$=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$

ZADANIE 3

Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki $W(x)=4x^4-4x^3-23x^2-x-6$.

ROZWIĄZANIE

$W(x)=4x^4-4x^3-23x^2-x-6$ — Szukamy pierwiastka wśród dzielników liczby 6.

$W(1)=4-4-23-1-6\neq 0$

$W(-1)=4+4-23+1-6\neq 0$

$W(2)=4\cdot 2^4-4\cdot 2^3-23\cdot 2^2-2-6\neq 0$

$W(-2)=4\cdot(-2)^4-4\cdot(-2)^3-23\cdot(-2)^2+2-6=$ — Jeżeli jest oczywiste, że wartość wielomianu jest różna od zera, to nie musimy tej wartości obliczać.

$=4\cdot 16+4\cdot 8-23\cdot 4-4=64+32-92-4=96-96=\mathbf{0}$

$x=-2$ – pierwiastek wielomianu

Dzielimy wielomian przez $x+2$.

$$\begin{array}{l}
(4x^4-4x^3-23x^2-x-6):(x+2) \\
\underline{-4x^4-8x^3} \\
\quad -12x^3-23x^2 \\
\quad \underline{12x^3+24x^2} \\
\quad\quad x^2-x \\
\quad\quad \underline{-x^2-2x} \\
\quad\quad\quad -3x-6 \\
\quad\quad\quad \underline{3x+6} \\
\quad\quad\quad\quad = \quad =
\end{array}$$

$W(x)=(x+2)(4x^3-12x^2+x-3)=$ — Drugi z czynników możemy rozkładać, wyłączając wspólny czynnik przed nawias. Wyrażenie $4x^2+1$ jest zawsze dodatnie i nie można już go rozłożyć.

$=(x+2)[4x^2(x-3)+(x-3)]=$

$=(x+2)(x-3)(4x^2+1)$

Odpowiedź: Wielomian rozłożony na czynniki ma postać $W(x)=(x+2)(x-3)(4x^2+1)$.

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równania wielomianowe rozwiązujemy poprzez grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, stosowanie wzorów skróconego mnożenia lub szukanie rozwiązania całkowitego wśród dzielników wyrazu wolnego albo wymiernego $\frac{p}{q}$, gdzie p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze x.

ZADANIE 1

Rozwiąż równania:

a) $(2x^2-3x)(x^2+3)(x^2-6x+9)(x^2-3x+10)=0$ **b)** $x^3+21=7x^2+3x$
c) $x^5-5x^3+x^2-5=0$ **d)** $-4x^3+12x^2+x-3=0$ **e)** $x^3-7x+6=0$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(2x^2-3x)(x^2+3)(x^2-6x+9)(x^2-3x+10)=0$

$2x^2-3x=0 \quad /:2 \quad \text{lub} \quad x^2+3=0$

1) $x^2-\frac{3}{2}x=0$ 2) x^2+3 – wyrażenie zawsze dodatnie, równanie nie ma rozwiązania.

$x(x-\frac{3}{2})=0$

$x_1=0 \quad \text{lub} \quad x-\frac{3}{2}=0 \qquad x_2=\frac{3}{2}$

3) $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0 \qquad x_3=3$

4) $x^2-3x+10=0 \quad a=1 \quad b=-3 \quad c=10$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot1\cdot10=9-40=$ – równanie nie ma rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $0, \frac{3}{2}$ lub 3.

Ad b) $x^3+21=7x^2+3x$

$x^3-7x^2-3x+21=0$

$x^2(x-7)-3(x-7)=0$

$(x-7)(x^2-3)=0$

$x-7=0 \quad \text{lub} \quad x^2-3=0$

$x_3=7 \qquad x^2-(\sqrt{3})^2=0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x_1=-\sqrt{3} \; x_2=\sqrt{3}$

Równanie wielomianowe należy uporządkować. Równanie składa się z 4 składników. Z każdej pary wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Otrzymaliśmy dwa wyrażenia, w których powtarza się $(x-7)$, i ponownie wyłączamy wspólny czynnik, którym jest $(x-7)$. Piszemy go na początku, a w drugim nawiasie zapisujemy wszystko, co pozostało w równaniu po „zabraniu" $(x-7)$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ lub 7.

Ad c) $x^5-5x^3+x^2-5=0$

$x^3(x^2-5)+(x^2-5)=0$

$(x^2-5)(x^3+1)=0$

$x^2-5=0 \quad \text{lub} \quad x^3+1=0$

$x^2-(\sqrt{5})^2=0 \qquad x^3=-1$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0 \qquad x^3=(-1)^3$

$x+\sqrt{5}=0 \quad \text{lub} \quad x-\sqrt{5}=0 \qquad x_3=-1$

$x_1=-\sqrt{5} \qquad x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $-\sqrt{5}, -1$ lub $\sqrt{5}$.

Ad d) $-4x^3+12x^2+x-3=0 \quad /\cdot(-1)$

$4x^3-12x^2-x+3=0$

$4x^2(x-3)-(x-3)=0$

$(x-3)(4x^2-1)=0$

$(x-3)(2x+1)(2x-1)=0$

$x-3=0 \quad \text{lub} \quad 2x+1=0 \quad \text{lub} \quad 2x-1=0$

$x_1=3 \qquad 2x=-1 \quad /:2 \qquad 2x=1 \quad /:2$

$x_2=-\frac{1}{2} \qquad x_3=\frac{1}{2}$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ lub 3.

Ad e) $x^3-7x+6=0$

$x^3-x-6x+6=0 \qquad x(x^2-1)-6(x-1)=0$

$x(x+1)(x-1)-6(x-1)=0 \qquad (x-1)[x(x+1)-6]=0$

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

$x-1=0 \quad \text{lub} \quad x^2+x-6=0 \quad a=1 \quad b=1 \quad c=-6$

$x=1 \qquad \Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25 \qquad \sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-5}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+5}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby –3, 1 lub 2.

ZADANIE 2

Dany jest wielomian $W(x)=4x^4-49x^2-56x-16$.

a) Rozłóż wielomian na czynniki liniowe.
b) Rozwiąż równanie $W(x)=0$.
c) Wskaż niewymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$W(x)=4x^4-49x^2-56x-16=$

$=4x^4-(49x^2+56x+16)=4x^4-(7x+4)^2=$

$=\left[2x^2-(7x+4)\right]\cdot\left[2x^2+(7x+4)\right]$

Aby rozłożyć dany wielomian na czynniki liniowe, stosujemy grupowanie wyrazów i wzory skróconego mnożenia:

$2x^2-7x-4$: $a=2,\ b=-7,\ c=-4$ Rozwiązujemy dwa równania kwadratowe.

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-4)=49+32=81\quad\sqrt{\Delta}=9$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-9}{2\cdot2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+9}{2\cdot2}=\frac{16}{4}=4$

postać iloczynowa: $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)$

$2x^2+7x+4$: $a=2,\ b=7,\ c=4$

$\Delta=b^2-4ac=7^2-4\cdot2\cdot4=49-32=17\quad\sqrt{\Delta}=17$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-\sqrt{17}}{4}\qquad x_2=\frac{-7+\sqrt{17}}{4}$

postać iloczynowa: $2\left(x-\frac{-7-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-7+\sqrt{17}}{4}\right)$

$W(x)=4\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-4)\cdot\left(x-\frac{-7-\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{-7+\sqrt{17}}{4}\right)$

Ad b)

$-\frac{1}{2},\ 4,\ \frac{-7-\sqrt{17}}{4},\ \frac{-7+\sqrt{17}}{4}$ Rozwiązania równania.

Ad c)

$\frac{-7-\sqrt{17}}{4}$ i $\frac{-7+\sqrt{17}}{4}$ Niewymierne pierwiastki to:

ZADANIE 3

Rozwiąż równania:

a) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ **b)** $3x^4+6x^3-2x^2+14x-21=0$

c) $12x^4-26x^3+54x^2-91x+42=0$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$

$W(1)=1-3-5+15+4-12=20-20=0$

$x=1$ – rozwiązanie równania

$$\begin{array}{r}x^4-2x^3-7x^2+8x+12\\ \hline (x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12):(x-1)\\ -x^5+x^4\\ \hline -2x^4-5x^3\\ 2x^4-2x^3\\ \hline -7x^3+15x^2\\ 7x^3-7x^2\\ \hline 8x^2+4x\\ -8x^2+8\\ \hline 12x-12\\ -12x+12\\ \hline =\quad =\end{array}$$

Ponownie szukamy rozwiązań.

$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$

$W(1)=1-2-7+8+12\neq0$

$W(-1)=1+2-7-8+12=15-15=0$

$x=-1$ – kolejne rozwiązanie równania

$$\begin{array}{r}x^3-3x^2-4x+12\\ \hline (x^4-2x^3-7x^2+8x+12):(x+1)\\ -x^4-x^3\\ \hline -3x^3-7x^2\\ 3x^3+3x^2\\ \hline -4x^2+8x\\ 4x^2+4x\\ \hline 12x+12\\ -12x-12\\ \hline =\quad =\end{array}$$

$x^3-3x^2-4x+12=0$

$x^2(x-3)-4(x-3)=0$ Można ponownie szukać rozwiązań, ale szybciej jest wyłączyć czynnik przed nawias.

$(x-3)(x^2-4)=0$

$(x-3)(x+2)(x-2)=0$

$x=3\quad x=-2\quad x=2$ – dalsze rozwiązania równania.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby -2, -1, 1, 2 lub 3.

Ad b)

$3x^4+6x^3-2x^2+14x-21=0$

$W(1)=3+6-2+14-21=23-23=0$ $x=1$ – rozwiązanie równania

$$\begin{array}{r}3x^3+9x^2+7x+21\\ \hline (3x^4+6x^3-2x^2+14x-21):(x-1)\\ -3x^4+3x^3\\ \hline 9x^3-2x^2\\ -9x^3+9x^2\\ \hline 7x^2+14x\\ -7x^2+7x\\ \hline 21x-21\\ -21x+21\\ \hline =\quad =\end{array}$$

$3x^3+9x^2+7x+21=0$

$3x^2(x+3)+7(x+3)=0$

$(x+3)(3x^2+7)=0$

$x+3=0$ lub $3x^2+7=0$ – brak rozwiązania

$x=-3$ – rozwiązanie równania

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby -3 lub 1.

Ad c)

$12x^4-26x^3+54x^2-91x+42=0$ Żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania. Szukamy wśród ułamków.

$W(1)=12-26+54-91+42=108-117\neq0$

$W(-1)=12+26+54+91+42\neq0$

$W\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{1}\cdot\frac{1}{16}-\frac{26}{1}\cdot\frac{1}{8}+\frac{54}{1}\cdot\frac{1}{4}-\frac{91}{1}\cdot\frac{1}{2}+42=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}+\frac{27}{2}-\frac{91}{2}+42=-\frac{5}{2}-32+42\neq0$

$W\left(\frac{3}{2}\right)$ – 3 jest dzielnikiem 42, a 2 dzielnikiem 12

$$W\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{12}{1}\cdot\frac{81}{16}-\frac{26}{1}\cdot\frac{27}{8}+\frac{54}{1}\cdot\frac{9}{4}-\frac{91}{1}\cdot\frac{3}{2}+42=\frac{3\cdot 81}{4}-\frac{13\cdot 27}{4}+\frac{27\cdot 9}{2}-\frac{273}{2}+42=$$

$$=\frac{243}{4}-\frac{351}{4}+\frac{243}{2}-\frac{273}{2}+42=-\frac{108}{4}-15+42=-27-15+42=0$$

$x=\frac{3}{2}$ – rozwiązanie równania

$$\begin{array}{l}12x^3-8x^2+42x-28\\ \hline (12x^4-26x^3+54x^2-91x+42):\left(x-\frac{3}{2}\right)\\ \underline{-12x^4+18x^3}\\ -8x^3+54x^2\\ \underline{8x^3-12x^2}\\ 42x^2-91x\\ \underline{-42x^2+63x}\\ -28x+42\\ \underline{28x-42}\\ =\quad =\end{array}$$

$12x^3-8x^2+42x-28=0$

$4x^2(3x-2)+14(3x-2)=0$

$(3x-2)(4x^2+14)=0$

$3x-2=0$ lub $4x^2+14=0$ – brak rozwiązania

$3x=2 \quad /:3$

$x=\frac{2}{3}$ – rozwiązanie równania

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $\frac{2}{3}$ lub $\frac{3}{2}$.

ZADANIE 4

Wyznacz m i n oraz trzeci pierwiastek równania $2x^3+mx^2-13x+n=0$, gdy liczby 2 i 3 są pierwiastkami tego równania.

ROZWIĄZANIE

Jeśli liczby 2 i 3 są pierwiastkami równania, to: $W(2)=0$ i $W(3)=0$

$W(2)=2\cdot 2^3+m\cdot 2^2-13\cdot 2+n=0$

$16+4m-26+n=0 \qquad 4m+n=10$

$W(3)=2\cdot 3^3+m\cdot 3^2-13\cdot 3+n=0$

$54+9m-39+n=0 \qquad 9m+n=-15$

$$\begin{cases}9m+n=-15\\ 4m+n=10 \quad /\cdot(-1)\end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy m i n.

$$\begin{cases}9m+n=-15\\ -4m-n=-10\end{cases}$$

$5m=-25 \quad /:5 \qquad \underline{m=-5}$

$4\cdot(-5)+n=10 \qquad -20+n=10 \qquad \underline{n=30}$

Równanie ma postać: $2x^3-5x^2-13x+30=0$

$$\begin{array}{l}2x^2-x-15\\ \hline (2x^3-5x^2-13x+30):(x-2)\\ \underline{-2x^3+4x^2}\\ -x^2-13x\\ \underline{x^2-2x}\\ -15x+30\\ \underline{15x-30}\\ =\quad =\end{array}$$

Ponieważ liczby 2 i 3 są pierwiastkami, więc możemy wielomian podzielić przez $x-2$ lub $x-3$.

$2x^2-x-15=0$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-15)=1+120=121 \qquad \sqrt{\Delta}=11$

$x_1=\frac{1-11}{2\cdot 2}=-\frac{5}{2} \qquad x_2=\frac{1+11}{2\cdot 2}=\frac{12}{4}=3$

Odpowiedź: Trzeci pierwiastek równania wynosi $-\frac{5}{2}$, $m=-5$, a $n=30$.

NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Nierówności wielomianowe rozwiązujemy tak, jak równania.
- Doprowadzamy nierówność do najprostszej postaci: współczynniki powinny być całkowite, a znak współczynnika przy najwyższej potędze dodatni.
- Szukamy miejsc zerowych taką metodą, jaką rozwiązywaliśmy równanie wielomianowe.
- na osi liczbowej zaznaczamy miejsca zerowe i rysujemy krzywą od prawej strony od góry, pamiętając, że gdy miejsce zerowe występuje parzystą ilość razy, to krzywa pozostaje po tej samej stronie osi.

ZADANIE 1

Rozwiąż nierówności:

a) $x(2x-1)(x+2)(2-x)(1+2x)>0$

b) $x^6(4-x)^5(2-x)^4(x+6)(x-7)^3\leq 0$

c) $x^2(x^4-16)(27-x^3)\geq 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x(2x-1)(x+2)(2-x)(1+2x)>0$

W każdym nawiasie powinno być wyrażenie: $x\pm$ liczba.

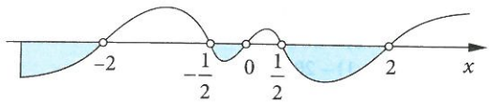
$x\cdot 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(-1)(x-2)\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$

$-4x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)>0 \quad /:(-4)$

$(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)<0$

Obliczamy miejsca zerowe.

$x_1=-2 \quad x_2=-\frac{1}{2} \quad x_3=0 \quad x_4=\frac{1}{2} \quad x_5=2$



Odpowiedź: $x\in\left\{(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)\right\}$.

Ad b)

$x^6 (4 - x)^5 (2 - x)^4 (x + 6)(x - 7)^3 \leq 0$

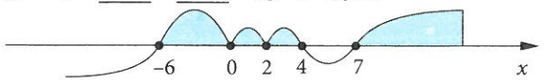
$x^6 \cdot [-(x - 4)]^5 \cdot [-(x - 2)]^4 (x + 6)(x - 7)^3 \leq 0$

$x^6 \cdot (-1)(x - 4)^5 (x - 2)^4 (x + 6)(x - 7)^3 \leq 0 \quad /:(-1)$

$(x + 6)\, x^6 (x - 2)^4 (x - 4)^5 (x - 7)^3 \geq 0$

Podkreślamy miejsca zerowe, które występują parzystą ilość razy.

$x_1 = -6 \quad \underline{x_2 = 0} \quad \underline{x_3 = 2} \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 7$



Odpowiedź: $x \in \{\langle -6; 4\rangle \cup \langle 7; \infty)\}$.

Ad c)

$x^2 (x^4 - 16)(27 - x^3) \geq 0$

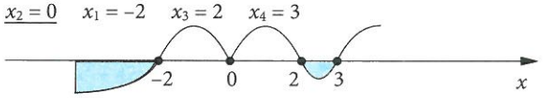
$x^2 (x^2 + 4)(x^2 - 4)(x^3 - 27) \geq 0 \quad /:(-1)$

$x^2 (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \leq 0 \quad /:(x^2 + 4)(x^2 + 3x + 9)$

$x^2 + 4$ oraz $x^2 + 3x + 9$ – wyrażenia są zawsze dodatnie, więc nierówność można przez nie podzielić

$x^2 (x + 2)(x - 2)(x - 3) \leq 0$

$\underline{x_2 = 0} \quad x_1 = -2 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 3$



Odpowiedź: $x \in \{(-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; 3\rangle \cup \{0\}\}$

ZADANIE 2

Rozwiąż nierówności:

a) $x^4 + x^3 - 8x - 8 > 0$ **b)** $x^3 - 21x - 20 < 0$

c) $3x^4 - 6x^3 - 19x^2 - 10x - 40 > 0$ **d)** $x^{13} - x^{12} - x^7 + x^6 \leq 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x^4 + x^3 - 8x - 8 > 0$

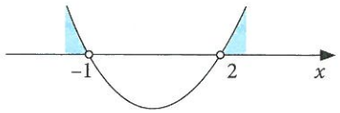
$x^3 (x + 1) - 8(x + 1) > 0$

$(x + 1)(x^3 - 8) > 0$

$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) > 0 \quad /:(x^2 + 2x + 4)$ – zawsze dodatnie

$(x + 1)(x - 2) > 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$



Odpowiedź: $x \in \{(-\infty; -1) \cup (2; \infty)\}$

Ad b)

$x^3 - 21x - 20 < 0$

$x^3 - x - 20x - 20 < 0$

$x(x^2 - 1) - 20(x - 1) < 0$

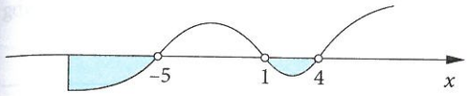
$x(x + 1)(x - 1) - 20(x - 1) < 0$

$(x - 1)[x(x + 1) - 20] < 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 20) < 0$

$x_3 = 1 \quad \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81 \quad \sqrt{\Delta} = 9$

$x_1 = \frac{-1-9}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-1+9}{2} = 4$



Odpowiedź: $x \in \{(-\infty; -5) \cup (1; 4)\}$

Ad c)

$3x^4 - 6x^3 - 19x^2 - 10x - 40 > 0$

$W(1) = 3 - 6 - 19 - 10 - 40 \neq 0 \qquad W(-1) = 3 + 6 - 19 + 10 - 40 \neq 0$

$W(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 6 \cdot (-2)^3 - 19 \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) - 40 =$

$= 3 \cdot 16 + 6 \cdot 8 - 19 \cdot 4 + 20 - 40 = 48 + 48 - 76 - 20 = 96 - 96 = 0 \quad x = -2$ – miejsce zerowe

$3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$

$(3x^4 - 6x^3 - 19x^2 - 10x - 40) : (x + 2)$

$-3x^4 - 6x^3$

$-12x^3 - 19x^2$

$12x^3 + 24x^2$

$5x^2 - 10x$

$-5x^2 - 10x$

$-20x - 40$

$20x + 40$

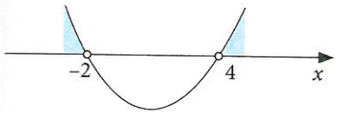
$= \quad =$

$(x + 2)(3x^3 - 12x^2 + 5x - 20) > 0$

$(x + 2)[3x^2 (x - 4) + 5(x - 4)] > 0$

$(x + 2)(x - 4)(3x^2 + 5) > 0 \quad /:(3x^2 + 5)$ – zawsze dodatnie

$(x + 2)(x - 4) > 0$



Odpowiedź: $x \in \{(-\infty; -2) \cup (4; \infty)\}$

Ad d)

$x^{13} - x^{12} - x^7 + x^6 \leq 0$

$x^{12} (x - 1) - x^6 (x - 1) \leq 0$

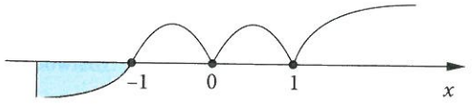
$(x - 1)(x^{12} - x^6) \leq 0$

$x^6 (x - 1)(x^2 - 1) \leq 0$

$x^6 (x - 1)(x + 1)(x - 1) \leq 0$

$(x + 1)\, x^6 (x - 1)^2 \leq 0$

$x = -1 \quad \underline{x = 0} \quad \underline{x = 1}$



Odpowiedź: $x \in \{(-\infty; -1\rangle \cup \{0; 1\}\}$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE I WYMIERNE

DZIEDZINA I WARTOŚĆ WYRAŻENIA WYMIERNEGO

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wyrażenie wymierne – jest zapisane za pomocą ułamka zwykłego, w którym w mianowniku znajduje się niewiadoma, najczęściej x, np. $\frac{2}{x+2}, \frac{-4}{x^2-4}, \frac{4-3x}{x}$.

Ponieważ w mianowniku ułamka występuje niewiadoma, a mianownik ułamka musi być różny od zera, każde wyrażenia wymierne wymaga założenia – mianownik różny od zera.
Wartość wyrażenia wymiernego obliczamy, podstawiając w miejsce niewiadomej wskazaną wartość.

Dziedzina wyrażenia wymiernego – wszystkie liczby, dla których wyrażenie istnieje.

ZADANIE 1

Określ, kiedy wyrażenie ma sens:

a) $\frac{-2x}{3x-x^2}$ b) $\frac{2x-1}{3x^2+1}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$3x-x^2 \neq 0 \quad /\cdot(-1)$

$x^2-3x \neq 0$

$x(x-3) \neq 0$

$x \neq 0$ i $x-3 \neq 0$ $x \neq 3$

Odpowiedź: Wyrażenie ma sens dla wszystkich liczb z wyjątkiem 0 i 3.

Ad b)

$3x^2+1 \neq 0$

To wyrażenie jest zawsze dodatnie, czyli zawsze jest różne od zera.

Odpowiedź: Wyrażenie ma zawsze sens; ma sens dla wszystkich liczb rzeczywistych; ma sens, gdy $x \in (-\infty; \infty)$; ma sens dla $x \in R$. (Wybieramy jedno sformułowanie.)

ZADANIE 2

Określ, kiedy wyrażenie traci sens:

a) $\frac{3x}{x^2-4}$ b) $\frac{-2x}{x^2+1}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x^2-4=0$

$x^2-2^2=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x+2=0$ lub $x-2=0$

$x=-2$ $x=2$

Odpowiedź: Wyrażenie traci sens dla liczby –2 lub 2.

Ad b)

$x^2+1=0$ – wyrażenie zawsze dodatnie

Odpowiedź: Wyrażenie ma zawsze sens liczbowy.

ZADANIE 3

Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego: $\frac{x-4}{x^2+6x+9}+\frac{3x-6}{x^3+x^2+2x}$.

ROZWIĄZANIE

$x^2+6x+9 \neq 0$

$(x+3)^2 \neq 0 \quad x \neq -3$

Najpierw określamy dziedzinę pierwszego mianownika.

$x^3+x^2+2x \neq 0$

$x\cdot(x^2+x+2) \neq 0$

$x \neq 0$ i $x^2+x+2 \neq 0$

$\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot2=-7$

$x \in R$

Następnie dziedzinę drugiego mianownika.

$x \in R \setminus \{-3, 0\}$

Dziedziną jest część wspólna dziedzin poszczególnych wyrażeń wymiernych.

Odpowiedź: Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste z wyjątkiem liczb –3 i 0.

ZADANIE 4

Skróć wyrażenie: a) $\frac{xy-x^2}{x^2-y^2}$ b) $\frac{x^3-7x-6}{x^3+x^2-4x-4}$.

Zadanie wykonujemy w trzech krokach:
1) Rozkładamy licznik i mianownik na czynniki.
2) Robimy założenie: mianownik różny od zera.
3) Skracamy wyrażenie.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\frac{xy-x^2}{x^2-y^2}=\frac{x(y-x)}{(x+y)(x-y)}=\frac{-x(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

Założenie:

$x+y\neq 0$ i $x-y\neq 0$

$x\neq -y$ $\quad x\neq y$

$$\frac{-x(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{-x}{x+y}$$

Odpowiedź: Wyrażenie po skróceniu ma postać $\frac{-x}{x+y}$, gdy $x\neq -y$ i $x\neq y$.

Ad b)

$$\frac{x^3-7x-6}{x^3+x^2-4x-4}=\frac{x^3-x-6x-6}{x^2(x+1)-4(x+1)}=\frac{x(x^2-1)-6(x+1)}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{x(x+1)(x-1)-6(x+1)}{(x+1)(x^2-2^2)}=$$

$$=\frac{(x+1)[x(x-1)-6]}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{(x+1)(x^2-x-6)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Założenie:

$x+1\neq 0$ i $x+2\neq 0$ i $x-2\neq 0$

$x\neq -1$ $\quad x\neq -2$ $\quad x\neq 2$

x^2-x-6 – trójmian kwadratowy przedstawiamy w postaci iloczynowej

$a=1,\ b=-1,\ c=-6$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$ $\qquad \sqrt{\Delta}=5$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{2\cdot 1}=\frac{-4}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3 \qquad x^2-x-6=(x+2)(x-3)$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x-6)}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{(x+1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x-2}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia po skróceniu ma postać $\frac{x-3}{x-2}$ dla $x\neq -1$, $x\neq -2$, $x\neq 2$.

ZADANIE 5

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{(\sqrt{3}x+y)^2-(x-\sqrt{3}y)^2}{(\sqrt{2}x+y)(\sqrt{2}x-y)}$ **dla** $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-1\frac{1}{2}$.

ROZWIĄZANIE

Założenie:

$\sqrt{2}x+y\neq 0$ i $\sqrt{2}x-y\neq 0$

$y\neq -\sqrt{2}x$ $\qquad y\neq \sqrt{2}x$

$$\frac{\left[\left(\sqrt{3}x\right)^2+2\sqrt{3}xy+y^2\right]-\left[x^2-2x\cdot\sqrt{3}y+\left(\sqrt{3}y\right)^2\right]}{\left(\sqrt{2}x\right)^2-y^2}=$$

Doprowadzamy wyrażenie do najprostszej postaci.

$$=\frac{3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-x^2+2\sqrt{3}xy-3y^2}{2x^2-y^2}=\frac{2x^2+4\sqrt{3}xy-2y^2}{2x^2-y^2}$$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1\tfrac{1}{2})-2\cdot(-1\tfrac{1}{2})^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-(-1\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{1}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{9}{4}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}-\frac{9}{4}}=$$

Obliczamy wartość wyrażenia.

$$\frac{\frac{3}{2}-9-\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}=\frac{-9-3}{\frac{6}{4}-\frac{9}{4}}=\frac{-12}{-\frac{3}{4}}=\frac{12}{1}\cdot\frac{4}{3}=16$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi 16.

DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH WYMIERNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Działania na wyrażeniach wymiernych wykonujemy tak, jak działania na ułamkach. Mianowniki ułamków zapisujemy w postaci iloczynowej, stosując wzór skróconego mnożenia, wyłączając wspólny czynnik przed nawias lub obliczając miejsca zerowe trójmianu kwadratowego. Przy dodawaniu i odejmowaniu sprowadzamy wyrażenia do najmniejszego wspólnego mianownika. Pamiętamy o założeniach, które określamy przed skracaniem ułamków.

ZADANIE 1

Wykonaj działania:

a) $\frac{x^2-2x}{9x^2-4}:\frac{x-2}{9x^2-12x+4}$ b $\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\frac{x^2-2x}{9x^2-4}:\frac{x-2}{9x^2-12x+4}=\frac{x(x-2)}{(3x)^2-2^2}\cdot\frac{(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2}{x-2}=\frac{x(x-2)}{(3x+2)(3x-2)}\cdot\frac{(3x-2)^2}{x-2}=$$

$$=\frac{x(3x-2)}{3x+2}=\frac{3x^2-2x}{3x+2}$$

Założenie:

$3x+2\neq 0$ i $3x-2\neq 0$ i $x-2\neq 0$

$3x\neq -2$ /:3 $3x\neq 2$ /:3 $x\neq 2$

$x\neq -\frac{2}{3}$ $x\neq \frac{2}{3}$

Przy dzieleniu ułamków założenie robimy do obu mianowników przed wykonaniem dzielenia oraz do mianownika po odwróceniu ułamka.

Odpowiedź: Dla $x\neq -\frac{2}{3}$, $x\neq \frac{2}{3}$ i $x\neq 2$ wynikiem dzielenia jest $\frac{3x^2-2x}{3x+2}$.

Ad b)

$$\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)=\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1(x+1)}{x+1}\right):\left(\frac{1(1-x^2)}{1-x^2}-\frac{3x^2}{1-x^2}\right)=\frac{x+x+1}{x+1}:\frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2}=$$

$$=\frac{2x+1}{x+1}:\frac{-4x^2+1}{-x^2+1}=\frac{2x+1}{x+1}:\frac{-(4x^2-1)}{-(x^2-1)}=\frac{2x+1}{x+1}:\frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x+1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{x-1}{2x-1}$$

Założenia:

$x+1\neq 0$ i $x-1\neq 0$ i $2x+1\neq 0$ i $2x-1\neq 0$

$x\neq -1$ $x\neq 1$ $2x\neq -1$ /:2 $2x\neq 1$ /:2

$x\neq -\frac{1}{2}$ $x\neq \frac{1}{2}$

Odpowiedź: Dla $x\neq -1$, $x\neq -\frac{1}{2}$, $x\neq \frac{1}{2}$ i $x\neq 1$ wynikiem dzielenia jest wyrażenie $\frac{x-1}{2x-1}$.

RÓWNANIA WYMIERNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równanie wymierne staramy się zapisać w postaci proporcji. Pamiętamy o założeniach.

ZADANIE 1

Rozwiąż równania:

a) $2-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3}{x+5}$

b) $\frac{2}{x-2}+\frac{4x+4}{x+3}=\frac{1}{3}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

Zał: $x+3\neq 0$ $x\neq -3$

$x+5\neq 0$ $x\neq -5$

Najpierw wypisujemy założenia.

$$2-\frac{1}{x+3}=\frac{2(x+3)}{x+3}-\frac{1}{x+3}=\frac{2x+6-1}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$$

Wyrażenie po lewej stronie sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$\frac{2x+5}{x+3}=\frac{x+3}{x+5}$$

Otrzymaną równość wymnażamy „na krzyż".

$$(2x+5)\cdot(x+5)=(x+3)^2$$

$$2x^2+10x+5x+25=x^2+6x+9$$

$$x^2+9x+16=0$$

$\Delta=81-64=17$, $\sqrt{\Delta}=\sqrt{17}$

$x_1=\frac{-9-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe i sprawdzamy, czy jego pierwiastki należą do dziedziny.

Odpowiedź: Dla $x\neq -5$ i $x\neq -5$ rozwiązaniem równania są liczby $\frac{-9-\sqrt{17}}{2}$ i $\frac{-9+\sqrt{17}}{2}$.

Ad c)

Zał: $x-2\neq 0$ $x\neq 2$

$x+3\neq 0$ $x\neq -3$

Najpierw wypisujemy założenia.

$$\frac{2}{x-2}+\frac{4x+4}{x+3}=\frac{2(x+3)+(x-2)\cdot(4x+4)}{(x-2)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{2x+6+4x^2+4x-8x-8}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{4x^2-2x-2}{(x-2)\cdot(x+3)}$$

Wyrażenia po lewej stronie sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$\frac{4x^2-2x-2}{x^2+x-6}=\frac{1}{3}$$

Korzystamy z własności proporcji. Rozwiązujemy równanie kwadratowe i sprawdzamy, czy jego pierwiastki należą do dziedziny.

$$12x^2-6x-6=x^2+x-6$$

$$11x^2-7x=0$$

$$x\cdot(11x-7)=0$$

$$x=0 \text{ lub } x=\frac{7}{11}$$

Odpowiedź: Dla $x\neq -3$ i $x\neq 2$ rozwiązaniem równania są liczby 0 lub $\frac{7}{11}$.

ZADANIE 2

Rozwiąż równania:

a) $\frac{2}{x^2+x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{6x}$

b) $\frac{2x-2}{x^2-36}-\frac{x-1}{x^2+6x}=\frac{x-2}{x^2-6x}$

c) $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-x-6}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\frac{2}{x(x+1)}=\frac{1}{6x}+\frac{1}{x^2}$ zał: $x\neq 0$ i $x\neq -1$

$\frac{2}{x(x+1)}=\frac{x}{6x^2}+\frac{6}{6x^2}$ $\frac{2}{x(x+1)}=\frac{x+6}{6x^2}$

$12x^2=x\,(x+1)(x+6)$ /:x $(x\neq 0)$

$12x=(x+1)(x+6)$

$12x=x^2+6x+x+6$

$x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$ $\sqrt{\Delta}=1$ $x_1=\frac{5-1}{2}=2$ $x_2=\frac{5+1}{2}=3$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby 2 lub 3.

Ad b)

$$\frac{2x-2}{(x+6)(x-6)}=\frac{x-2}{x(x-6)}+\frac{x-1}{x(x+6)} \qquad \text{zał: } x\neq -6,\ x\neq 0,\ x\neq 6$$

$$\frac{2x-2}{(x+6)(x-6)}=\frac{(x-2)(x+6)}{x(x-6)(x+6)}+\frac{(x-1)(x-6)}{x(x-6)(x+6)}$$

$$\frac{2x-2}{(x+6)(x-6)}=\frac{x^2+6x-2x-12+x^2-6x-x+6}{x(x+6)(x-6)} \qquad /\cdot x(x+6)(x-6)$$

$x(2x-2)=2x^2-3x-6$
$2x^2-2x=2x^2-3x-6$
$x=-6$ – zał. $x\neq -6$

Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązania.

Ad c)

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-4x+3}$$

zał:

$x^2-5x+6\neq 0 \quad \Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1 \quad \sqrt{\Delta}=1 \quad x_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3$

$x^2-x-6\neq 0 \quad \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25 \quad \sqrt{\Delta}=5 \quad x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \quad x_2=\frac{1+5}{2}=3$

$x^2-3x+2\neq 0 \quad \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1 \quad \sqrt{\Delta}=1 \quad x_1=\frac{3-1}{2}=1 \quad x_2=\frac{3+1}{2}=2$

$x^2-4x+3\neq 0 \quad \Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4 \quad \sqrt{\Delta}=2 \quad x_1=\frac{4-2}{2}=1 \quad x_2=\frac{4+2}{2}=3$

zał.: $x\in R-\{-2,1,2,3\}$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{2}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

Mianowniki ułamków zostały zapisane w postaci iloczynowej.

$$\frac{(x+2)+(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-3)}=\frac{2(x-3)+(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{2x}{(x+2)(x-2)(x-3)}=\frac{2x-6+x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \qquad /\cdot(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$2x(x-1)=(3x-8)(x+2)$
$2x^2-2x=3x^2+6x-8x-16$
$-x^2+16=0 \quad /\cdot(-1)$
$x^2-16=0$
$(x+4)(x-4)=0$
$x_1=-4 \quad x_2=4$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby –4 lub 4.

NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Aby sprawnie i bezbłędnie rozwiązać nierówność wymierną, możemy postępować zgodnie z zaproponowanymi krokami:
- wszystkie wyrażenia przenosimy na lewą stronę, równocześnie zapisując mianowniki w postaci iloczynowej,
- założenia – mianowniki różne od zera,
- sprowadzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika, a wyrażenia w licznikach zapisujemy w nawiasach, by uniknąć błędów rachunkowych,
- zapisujemy całe wyrażenie na jednej kresce ułamkowej,
- wykonujemy działania w liczniku, doprowadzając go do najprostszej postaci,
- gdy wyrażenie zapisane jest w postaci jednego ułamka, korzystamy z faktu, że znak dzielenia dwóch wyrażeń jest taki sam, jak znak mnożenia – zamieniamy dzielenie na mnożenie i dalej rozwiązujemy poznaną wcześniej nierówność wielomianową.

ZADANIE 1

Rozwiąż nierówności:

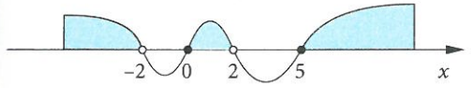
a) $\frac{x^2-5x}{x^2-4}\geq 0$ **b)** $\frac{1-4x^2}{2x+2}\geq 2x$ **c)** $\frac{-1}{x}\leq -1-\frac{3}{2(x+1)}$ **d)** $\frac{1+x}{2x+1}-\frac{1-2x}{x+1}\geq -1.$

ROZWIĄZANIA

Ad a)

$$\frac{x^2-5x}{(x+2)(x-2)}\geq 0 \qquad \text{zał: } x\neq -2 \text{ i } x\neq 2$$

$x(x-5)(x+2)(x-2)\geq 0$
$x_2=0 \quad x_4=5 \quad x_1=-2 \quad x_3=2$



Znak dzielenia dwóch wyrażeń jest taki sam, jak znak mnożenia.

Nierówność nie jest ostra, więc wszystkie kółka powinny być zamalowane, ale z założenia przy –2 i 2 muszą być otwarte.

Odpowiedź: $x\in(-1;-2)\cup\langle 0;2)\cup\langle 5;\infty)$

Ad b)

$$\frac{1-4x^2}{2(x+1)}-\frac{2x}{1}\geq 0 \qquad \text{zał: } x\neq -1$$

$$\frac{1-4x^2}{2(x+1)}-\frac{2x\cdot 2(x+1)}{2(x+1)}\geq 0$$

Na jedną stronę.

$$\frac{(1-4x^2)-4x(x+1)}{2(x+1)}\geq 0$$

Do wspólnego mianownika.

$$\frac{1-4x^2-4x^2-4x}{2(x+1)}\geq 0$$

Na jedną kreskę.

$(-8^2-4x+1)\cdot 2(x+1)\geq 0 \quad /:2$

Działania w liczniku.

$-(8x^2+4x-1)(x+1)\geq 0 \quad /:(-1)$

Zamiana dzielenia na mnożenie.

$(8x^2+4x-1)(x+1)\le 0$

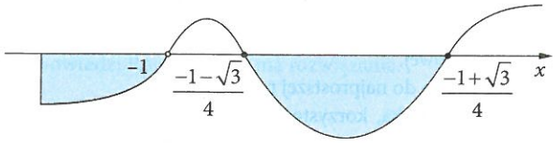
$8x^2+4x-1=0$ lub $x+1=0$

$\Delta = 4^2-4\cdot 8\cdot(-1)=16+32=48$ $x=-1$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3}$

$x_1=\frac{-4-4\sqrt{3}}{2\cdot 8}=\frac{4(-1-\sqrt{3}}{16}=\frac{-1\sqrt{3}}{4}$ $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

Miejsca zerowe na osi to: -1, $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}7$, $\frac{-1\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}2$



Odpowiedź: $x\in\left\{(-\infty;-1)\cup\left\langle\frac{-1-\sqrt{3}}{4};\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right\rangle\right\}$

Ad c)

$\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{1}-\frac{1}{x}<0$ zał: $x\neq -1$ i $x\neq 0$

$\frac{3x}{2x(x+1)}+\frac{2x(x+1)}{2x(x+1)}-\frac{2(x+1)}{2x(x+1)}\le 0$ $\frac{3x}{2x(x+1)}+\frac{(2x^2+2x)}{2x(x+1)}-\frac{(2x+2)}{2x(x+1)}\le 0$

$\frac{3x+\left(2x^2+2x\right)-(2x+2)}{2x(x+1)}\le 0$ $\frac{3x+2x^2+2x-2x-2}{2x(x+1)}\le 0$

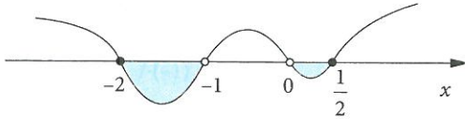
$(2x^2+3x-2)\cdot 2x\,(x+1)\le 0$ /:2

$(2x^2+3x-2)\cdot x\,(x+1)\le 0$

$2x^2+3x-2=0$ lub $x=0$ lub $x=-1$

$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 2=9+16=25$ $\Delta=5$

$x_1=\frac{-3-5}{2\cdot 2}=-2$ $x_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$



Odpowiedź: $x\in\left\{\langle -2;-1)\cup(0;\frac{1}{2}\rangle\right\}$

Ad d)

$\frac{x+1}{2x+1}-\frac{-(2x-1)}{x+1}+\frac{1}{1}\ge 0$ zał: $2x+1\neq 0$ i $x\neq -1$

$2x\neq -1$

$x\neq -\frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{2x+1}+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\ge 0$

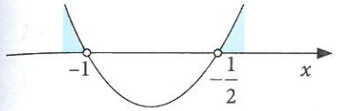
$\frac{(x+1)(x+1)}{2x+1)(x+1)}+\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}+\frac{(2x+1)(x+1)}{(2x+1)(x+1)}\ge 0$

$\frac{x^2+x+x+1+4x^2-1+2x^2+2x+x+1}{(2x+1)(x+1)}\ge 0$

$(7x^2+5x+1)(2x+1)(x+1)\ge 0$

$7x^2+5x+1=0$ lub $2x+1=0$ lub $x+1=0$

$\Delta=25-4\cdot 7\cdot 1=25-28=-3$ brak miejsc zerowych $x=-\frac{1}{2}$ $x=-1$



Odpowiedź: $x\in\left\{(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)\right\}$

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA, FUNKCJA WYKŁADNICZA

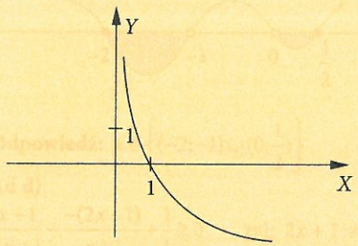
FUNKCJA LOGARYTMICZNA, JEJ WYKRES I WŁASNOŚCI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

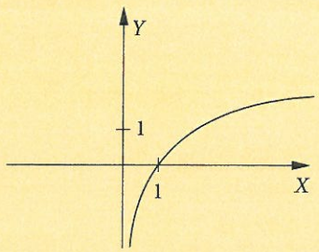
Funkcja logarytmiczna to funkcja postaci: $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ dla pewnej ustalonej liczby $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, zwanej podstawą funkcji logarytmicznej.

Wykres funkcji logarytmicznej:

a) $a \in (0, 1)$



b) $a \in (1, +\infty)$



ZADANIE 1

Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ i określ ich własności.

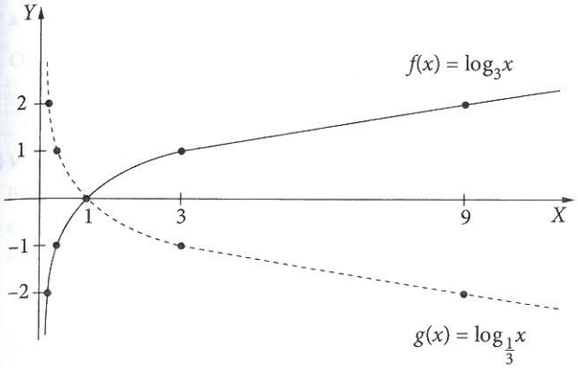
ROZWIĄZANIE

$f(x) = \log_3 x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	−2	−1	0	1	2

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$	2	2	0	−1	−2



Własności:

1) dziedzina: $x \in (0; \infty)$
2) zbiór wartości: $y \in \mathbb{R}$
3) miejsce zerowe: $x = 1$
4) funkcja $f(x)$ jest rosnąca, gdy $a \in (1; \infty)$ – podstawa logarytmu jest większa od 1, funkcja $g(x)$ jest malejąca, gdy $a \in (0; 1)$.

ZADANIE 2

Naszkicuj wykres funkcji o wzorze: $f(x) = \log_2 x$, a następnie:

a) przesuń jej wykres o wektor $\vec{u} = [0, 2]$, tj. o dwie jednostki w górę wzdłuż osi OY,

b) znajdź jej obraz w symetrii względem osi OX,

c) naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

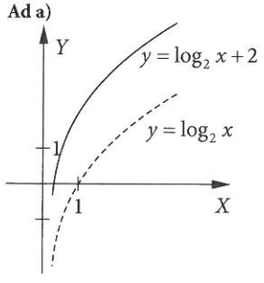
ROZWIĄZANIE

$f(x) = \log_2 x$

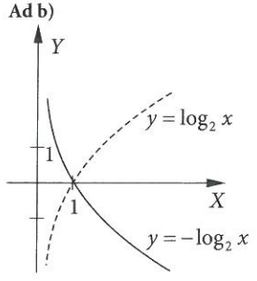
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	−2	−1	0	1	2

ROZWIĄZANIE

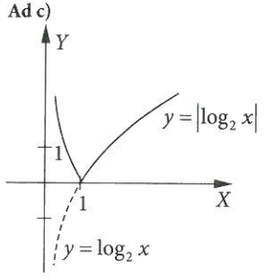
Ad a)



Ad b)



Ad c)



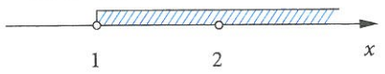
ZADANIE 3

Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\log_{x-1}\frac{x+2}{x+1}$.

ROZWIĄZANIE

1) $x-1>0$ i $x-1\neq 1$

$x>1 \quad x\neq 2$



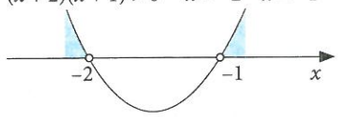
$x\in(1;2)\cup(2;\infty)$

Podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1.

2)

$\frac{x+2}{x+1}>0$

$(x+2)(x+1)>0 \quad x=-2 \quad x=-1$



$x\in\{(-\infty;-2)\cup(-1;\infty)\}$

Logarytmowana wielkość jest dodatnia. Znak dzielenia jest taki sam, jak znak mnożenia.

1) i 2)

Odpowiedź: Dziedziną funkcji $f(x)$ jest $x\in\{(1;2)\cup(2;\infty)\}$.

ZASTOSOWANIE FUNKCJI LOGARYTMICZNYCH

ZADANIE 1

Poziom natężenia hałasu wewnątrz ciężarówki wynosi 70 dB. Gdy kierowca włączył radioodbiornik, poziom hałasu wzrósł o 8 dB. Ile razy głośniej zrobiło się w ciężarówce?

ROZWIĄZANIE

$L(I)=10\log\frac{I}{I_0}$

$x=\frac{I_2}{I_1}$

$L(I_2)-L(I_1)=8$

$10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=8$

Rozwiązując to zadanie, wykorzystujemy wzór wyrażający poziom natężenia dźwięku ($L(I)$) w zależności od natężenia dźwięku (hałasu) oznaczonego symbolem I. We wzorze tym I_0 oznacza tzw. próg słyszalności.

W zadaniu oznaczamy początkowy poziom natężenia $L(I_1)$; odpowiada on początkowemu natężeniu I_1 (hałasowi przed włączeniem radioodbiornika). Końcowy poziom oznaczamy $L(I_2)$; odpowiada on końcowemu natężeniu I_2 (hałasowi po włączeniu radioodbiornika).

$\log\left(\frac{I_2}{I_0}:\frac{I_1}{I_0}\right)=0{,}8$

$\log\frac{I_2}{I_1}=0{,}8=\frac{4}{5}$

$\frac{I_2}{I_1}=10^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{10^4}$

$x\approx 6{,}31$

W zadaniu pytamy o iloraz $x = I_2 : I_1$. Aby go obliczyć, dzielimy równanie stronami przez 10 i korzystamy ze wzoru na logarytm ilorazu.

Odpowiedź: Hałas wzrósł około 6,3 razy.

ZADANIE 2

W laboratorium badano wrażenia smakowe. Otrzymano zależność $S(I) = 0{,}8 \cdot \log I$, gdzie I jest natężeniem bodźca.

a) Jaka zmiana bodźca wywołała dwukrotny wzrost siły wrażeń S?

b) O ile zmieni się siła wrażeń, jeśli siła bodźca zwiększy się trzykrotnie?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$0{,}8\log I_2 = 2\cdot 0{,}8\log I_1$

$\log I_2 = 2\log I_1$

$\log I_2 = \log I_1^2$

$I_2 = I_1^2$

Jeżeli pierwotne natężenie bodźca wynosiło I_1, a po zmianie I_2, to otrzymujemy wzór:

Odpowiedź: Dwukrotny wzrost siły wrażeń został wywołany przez zmianę natężenia bodźca I_1 do jego kwadratu.

Ad b)

$x = 0{,}8\log 3I - 0{,}8\log I =$

$= 0{,}8\cdot(\log 3 + \log I - \log I) = 0{,}8\log 3 \approx 0{,}3817$

Zapisujemy równanie wyrażające różnicę pomiędzy siłą wrażeń po trzykrotnym zwiększeniu siły bodźca i przed tym zwiększeniem.

Odpowiedź: Siła wrażeń wzrośnie o około 0,38.

ZADANIE 3

Dla jakiej wartości parametru m rozwiązaniem równania $x^3\log^2 m - 3x^2\log m - 6x - 2\log m = 0$ jest liczba –1.

ROZWIĄZANIE

$W(-1) = 0$

$(-1)^3\log^2 m - 3\cdot(-1)^2\log m - 6\cdot(-1) - 2\log m = 0$

$-\log^2 m - 3\log m - 2\log m + 6 = 0 \quad /\cdot(-1)$

$\log^2 m + 5\log m - 6 = 0$

$\log m = t,\ m > 0$

$t^2 + 5t - 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 25 + 24 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7$

$t_1 = \frac{-5-7}{2} = -6 \qquad t_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$

Niewiadomą w tym równaniu jest $\log m$, dla ułatwienia podstawiamy $\log m = t$.

$\log m = -6$ $\quad$ $\log m = 1$

$m = 10^{-6}$ $\quad$ $m = 10^{1} = 10$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba -1 dla $m = 10^{-6}$ lub $m = 10$.

ZADANIE 4

Chory przyjął 60 mg leku. Po czterech godzinach organizm usuwa 40% leku. Masę leku pozostałą po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$.

Kolejną dawkę leku chory powinien przyjąć, gdy w organizmie jest mniej niż 11 mg leku. Po jakim czasie (po ilu godzinach) należy ją podać?

ROZWIĄZANIE

$60 \cdot 0{,}88^t = 11$

$0{,}88^t = \frac{11}{60}$

$t = \log_{0{,}88} \frac{11}{60} = \frac{\log 11 - \log 60}{\log 0{,}88} \approx 13{,}27$

Spróbujmy ustalić, po jakim czasie w organizmie chorego pozostanie 11 mg leku.

Ponieważ współczynnik b leży w przedziale $(0, 1)$, funkcja M jest malejąca, dlatego jej wartość będzie mniejsza niż 11 po upływie 13,27 godz.

Odpowiedź: Kolejną dawkę leku należy podać po 14 godzinach.

TRYGONOMETRIA

MIARA ŁUKOWA KĄTA. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Miara kąta

Jednostką miary łukowej kąta jest radian.

$$1rad = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx \frac{360^\circ}{6{,}28} \approx 57^\circ$$

Aby zmienić miarę stopniową kąta na łukową należy miarę stopniową pomnożyć przez $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Aby zmienić miarę łukową – radiany na stopnie należy pomnożyć je przez $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Dowolny kąt to kąt ostry, rozwarty, z trzeciej lub czwartej ćwiartki układu współrzędnych oraz każdy kąt przekraczający miarę kąta pełnego. Aby wyznaczyć wartość funkcji trygonometrycznych tego kata, trzeba jego miarę zredukować do miary kąta ostrego.

Pamiętamy, że wielokrotność kąta 360° nie zmienia wartości funkcji trygonometrycznych:

$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin\alpha$

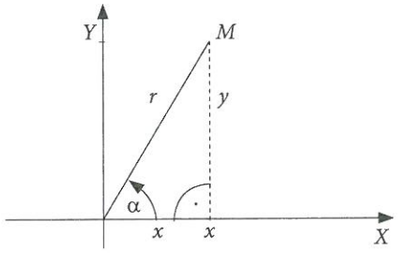
$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Dzięki tej zależności każdy kąt możemy sprowadzić do miary z przedziału $(0^\circ; 360^\circ)$. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów z drugiej, trzeciej i czwartej ćwiartki wyznaczamy, korzystając z definicji i odpowiednich zależności w układzie współrzędnych.

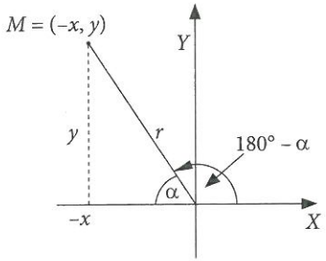
I ćwiartka (0°; 90°)



$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

II ćwiartka (90°, 180°)



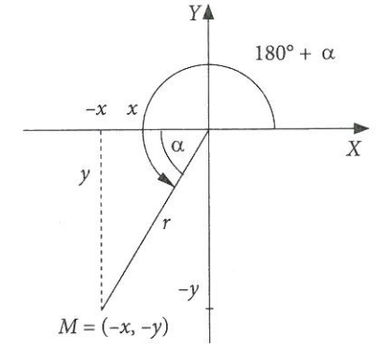
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y}{r}=\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{-x}{r}=-\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{y}{-x}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{-x}{y}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

III ćwiartka (180°, 270°)



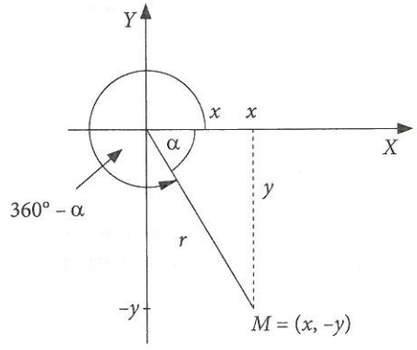
$$\sin(180^\circ+\alpha)=\frac{-y}{r}=-\sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ+\alpha)=\frac{-x}{r}=-\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\frac{-y}{-x}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\frac{-x}{-y}=\operatorname{ctg}\alpha$$

IV ćwiartka (270°, 360°)



$$\sin(360^\circ-\alpha)=\frac{-y}{r}=\sin\alpha$$

$$\cos(360^\circ-\alpha)=\frac{x}{r}=\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)=\frac{-y}{x}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

ZADANIE 1

Zamień miarę stopniową na łukową lub łukową na stopniową:

a) 25° **b)** 70° **c)** 150° **d)** $\frac{3}{4}\pi$ **e)** $\frac{8}{5}\pi$ **f)** 2 rad.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $25^\circ=\frac{25^\circ}{1}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{5}{36}\pi$

Ad b) $70^\circ=\frac{70^\circ}{1}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{7}{18}\pi$

Ad c) $150^\circ=\frac{150^\circ}{1}\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{15}{18}\pi=\frac{5}{6}\pi$

Ad d) $\frac{3}{4}\pi=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$

Ad e) $\frac{8}{5}\pi=\frac{8\pi}{5}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=288^\circ$

Ad f) $2rad=\frac{2}{1}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}\approx\frac{360^\circ}{3{,}14}\approx115^\circ$

ZADANIE 2

Rowerzysta jedzie z prędkością 12 km/h. Jaka jest prędkość kątowa koła roweru, jeżeli średnica koła ma długość 1 m?

ROZWIĄZANIE

$r=\frac{1}{2}\text{m}$ $v=12\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{12\,000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}}=\frac{10}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Okres wyznaczymy z prędkości liniowej.

$\omega=\frac{2\pi}{T}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $v=\frac{2\pi r}{T}$ stąd $T=\frac{2\pi r}{v}$ $\omega=2\pi\cdot\frac{v}{2\pi r}$ $\omega=\frac{10}{3}\cdot2=\frac{20}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Odpowiedź: Prędkość kątowa koła roweru wynosi $\frac{20}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

ZADANIE 3

Oblicz:

a) sin 850° **b)** tg 680° **c)** sin (–30°) **d)** cos (–210°) **e)** tg (–620°) **f)** $\sin\frac{11}{4}\pi$ **g)** $\cos\frac{7}{2}\pi$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

sin 850° = sin (2 · 360° + 130°) =
= sin 130° = sin (180° – 50°) =
= sin 50° = **0,7660**

Wielokrotność 360° nie wpływa na wartość funkcji. 130° to kąt z II ćwiartki. $\sin\alpha=y/r$, $y>0$. Odczytujemy z tablic.

Ad b)

tg 680° = tg (360° + 320°) =
= tg 320° = tg (360° – 40°) =
= – tg 40° = **– 0,8391**

320° – IV ćwiartka

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$, $x>0$, $y<0$

Ad c)

sin (– 30°) = – sin 30° = $-\frac{1}{2}$

Dodając 360°, otrzymujemy dodatnią miarę kąta.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $y<0$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

Ad d)

$\cos(-210^\circ) = \cos(150^\circ - 360^\circ) = \cos 150^\circ =$

$= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

W II ćwiartce cosinus jest ujemny, $x < 0$.

Ad e)

$\operatorname{tg}(-620^\circ) = \operatorname{tg}(-620^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$

$= \operatorname{tg} 100^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 80^\circ) =$

$= -\operatorname{tg} 80^\circ = \underline{-5{,}6713}$

W III ćwiartce tangens jest ujemny, $x < 0$, $y > 0$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Ad f)

$$\sin\frac{11}{4}\pi = \sin 2\frac{3}{4}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{3}{4}\pi\right) =$$

Wielokrotność 2π (360°) nie zmienia wartości funkcji. W II ćwiartce sinus jest dodatni.

$$= \sin\frac{3}{4}\pi = \sin\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \sin 135^\circ =$$

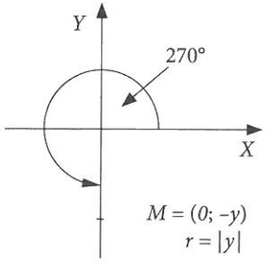
$$= \sin\left(180^\circ - 45^\circ\right) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ad g)

$$\cos\frac{7}{2}\pi = \cos\frac{7\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \cos 630^\circ =$$

Miarę łukową kąta można od razu zamienić na stopniową.

$= \cos(360^\circ + 270^\circ) = \cos 270^\circ = 0$



$\cos 270^\circ = \frac{x}{r} = 0$

Kąt 270° jest kątem granicznym i wartości funkcji najlepiej zobaczyć w układzie współrzędnych.

ZADANIE 4

Oblicz wartości brakujących funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}, \alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$. **c)** $\cos\alpha = -\frac{3}{4}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \qquad \frac{4}{9} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ lub $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Kąt należy do drugiej ćwiartki, dlatego cosinus ma wartość ujemną.
Wartość funkcji tangens obliczamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{5\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{-5\sqrt{5}}{10} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Odpowiedź: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}; \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ad b)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{2}$$

Korzystamy z definicji tangensa i ze wzoru jedynkowego.

$\sin\alpha = -\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(-\sqrt{2} \cdot \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$2 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$3 \cdot \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sin\alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Wybieramy dodatnią wartość cosinusa (kąt w czwartej ćwiartce).

$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; \sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}; \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ad c)

$\cos\alpha = -\frac{3}{4}, \alpha \in$ III ćwiartki

$\sin^2\alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{9}{16} = 1 \qquad \sin^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ lub $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

W III ćwiartce sinus jest ujemny, a tangens jest dodatni.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

Odpowiedź: W III ćwiartce $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

ZADANIE 5

Skonstruuj kąt α, gdy:

a) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$ **c)** $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

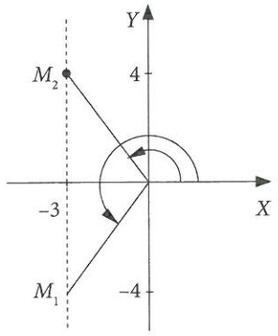
$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $r = 5$ i $x = -3$ — Obliczamy y.

$x^2 + y^2 = r^2$

$(-3)^2 + y^2 = 5^2$ $\quad 9 + y^2 = 25$ $\quad y^2 = 16$ — Otrzymujemy dwa kąty, ponieważ odcięta ma wartość ujemną w drugiej i trzeciej ćwiartce.

$y = -4$ lub $y = 4$

$M_1 = (-3; -4)$ $\quad M_2 = (-3; 4)$



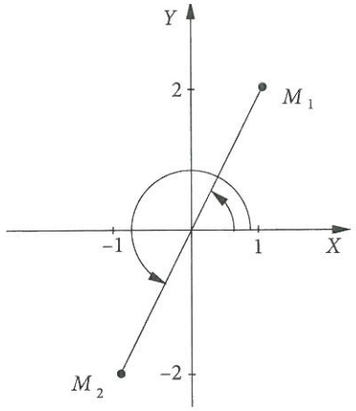
Ad b)

$\operatorname{tg}\alpha = 2 = \frac{2}{1}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

$x = 1$ i $y = 2$ $\quad M_1 = (1, 2)$

lub $x = -1$ i $y = -2$ $\quad M_2 = (-1, -2)$

Otrzymujemy dwa kąty – w I ćwiartce obie współrzędne są dodatnie, a w III ujemne.



Ad c)

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $y = -5$, $r = 13$

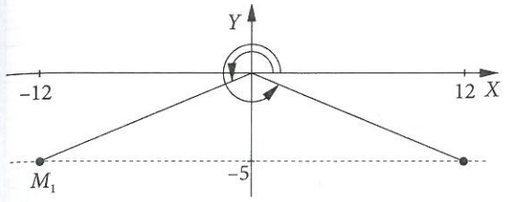
$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + (-5)^2 = 13^2$ $\quad x^2 + 25 = 169$ $\quad x^2 = 144$

$x_1 = -12$ $\quad$ lub $\quad x_2 = 12$

$M_1 = (-12, -5)$ $\quad M_2 = (12, -5)$

Otrzymujemy dwa kąty, druga współrzędna jest ujemna w III i IV ćwiartce.



WYKRESY I WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

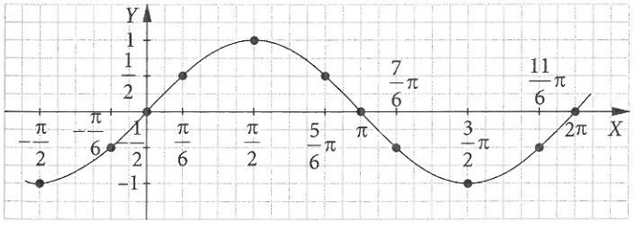
We wzorach maturalnych są wykonane wykresy funkcji trygonometrycznych, a miary kątów na osi odciętych podane są w mierze łukowej, więc wykonujemy wykresy również z takimi samymi oznaczeniami. Odpowiednikami miary stopniowej kątów potrzebnych do wykonania wykresu są: $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Aby w miarę dokładnie wykonać wykres, najlepiej na osi y zaznaczyć 1 po 4 kratkach, a na osi x po 6 kratkach $\frac{\pi}{2}$.

ZADANIE 1

Wykonaj wykresy funkcji: a) $f(x) = \sin x$, b) $f(x) = \cos x$, c) $f(x) = \operatorname{tg} x$ i określ ich własności.

ROZWIĄZANIE

Ad a) $f(x) = \sin x$ — Wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ jest sinusoida.



Własności:

1) dziedzina: $x \in R$ 2) zbiór wartości: $y \in \langle -1; 1 \rangle$
3) miejsca zerowe: $x = k\pi$, $k \in C$
4) punkt przecięcia z osią y: $(0; 0)$
5) funkcja jest rosnąca np. dla

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, czyli ogólnie: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

funkcja jest malejąca np. dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$,

ogólnie dla $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), k \in C$.

6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie np. dla $x \in (0; \pi)$, czyli dla $x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, a ujemne dla $x \in (\pi; 2\pi)$, czyli dla $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$
7) funkcja jest okresowa,

okresem zasadniczym funkcji jest $2k\pi$, podstawowym 2π.

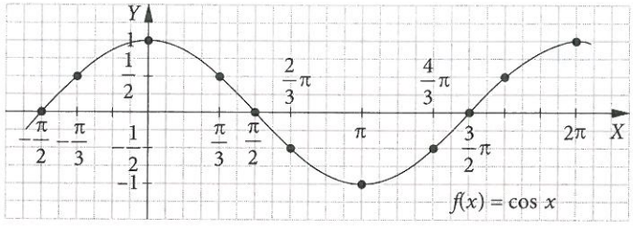
Miejsca zerowe to: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$, ale również $-\pi, -2\pi$ – jest ich nieskończenie wiele i powtarzają się co π.

Początek kolejnego przedziału, gdzie funkcja zaczyna rosnąć, pojawia się co 2π.

Jeżeli funkcja jest okresowa, to $f(x) = f(x + T)$, gdzie T jest okresem.

Ad b) $f(x) = \cos x$

Wykresem funkcji $f(x) = \cos x$ jest cosinusoida.



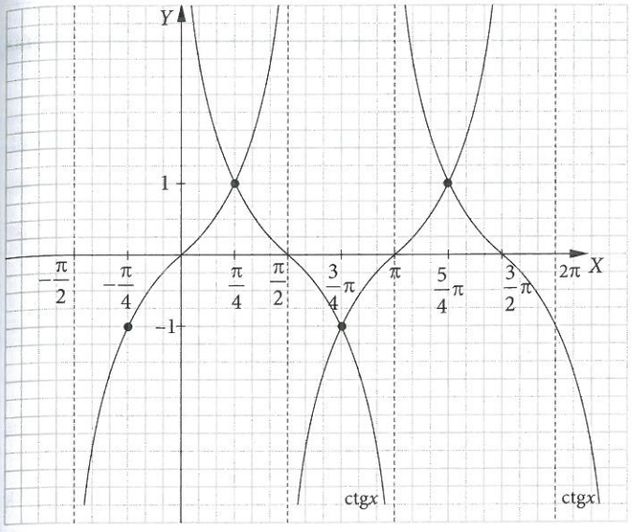
Własności:

1) dziedzina: $x \in R$ 2) zbiór wartości: $y \in \langle -1; 1 \rangle$
3) miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in C$ 4) punkt przecięcia z osią y: $(0; 1)$
5) funkcja jest rosnąca dla $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$, a malejąca dla $x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie

dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, a ujemne dla $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), k \in C$

7) funkcja jest okresowa, okresem zasadniczym funkcji jest $2k\pi$, podstawowym 2π.

Ad c) $f(x) = \text{tg}x$ i $\text{ctg}x$



Własności funkcji tg$x$:

1) dziedzina: $x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2}k\right\}, k \in C$ dla $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3}{2}\pi$... asymptoty pionowe
2) zbiór wartości: $y \in R$
3) dla $x \in R$ funkcja zawsze rosnąca
4) nieparzysta: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$ (wykres funkcji posiada środek symetrii i jest nim punkt $(0, 0)$)
5) miejsca zerowe: $x = k\pi$
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \left(0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$,

a ujemne dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 + k\pi\right), k \in C$.

7) funkcja jest okresowa, okresem zasadniczym jest $k\pi$, okres podstawowy: π.

Własności funkcji ctg$x$:

1) dziedzina: $x \in R \setminus \{k\pi\}$ dla $x = \pi; x = 2\pi$ itd. funkcja posiada asymptoty pionowe

2) zbiór wartości: $y \in R$
3) dla $x \in R$ funkcja zawsze malejąca
4) nieparzysta: $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x$ (wykres funkcji posiada środek symetrii i jest nim punkt $(0, 0)$)
5) miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in C$
6) funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi)$,

a ujemne dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; 0 + k\pi\right), k \in C$.

7) funkcja jest okresowa, okresem zasadniczym jest $k\pi$, okres podstawowy: π.

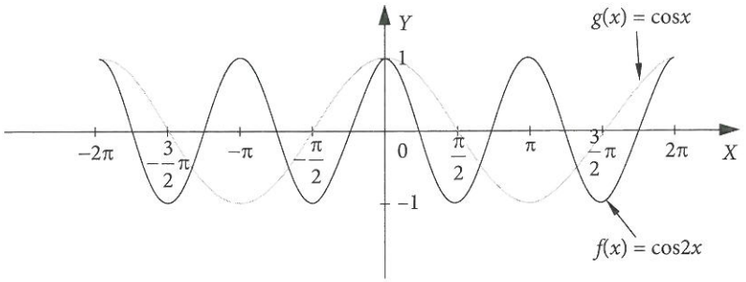
ZADANIE 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = \cos 2x$, $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$, oraz $g(x) = \cos x$, $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$. Wyznacz te kąty, dla których:

a) $f(x) = g(x)$

b) $f(x) \geq 1$

ROZWIĄZANIE



Ad a)

$$x \in \left\{-2\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi\right\}.$$

Ad b)

$x \in \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$.

WZORY TRYGONOMETRYCZNE I ICH ZASTOSOWANIE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Związki między funkcjami tego samego kąta:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ jest liczbą dodatnią.}$$

Sinus i cosinus sumy i różnicy dowolnych kątów α i β:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\sin$ $\qquad$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

W szczególności funkcje trygonometryczne podwojonego kąta:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Suma i różnica sinusów oraz cosinusów:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ZADANIE 1

Oblicz dokładną wartość tangensa kąta: **a)** 15° **b)** 75°

ROZWIĄZANIE

Dokładną wartość możemy obliczyć, korzystając z wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, 60°.

Ad a)

$$\operatorname{tg}15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin(45^\circ - 30^\circ)}{\cos(60^\circ - 45^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ\cos 45^\circ + \sin 60^\circ\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{6 - \sqrt{12} - \sqrt{12} + 2}{6-2} = \frac{8 - 2\sqrt{4\cdot 3}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

15° to różnica 45° – 30° lub 60° – 45°. Możemy wybrać dowolną różnicę.

Korzystamy z sinusa i cosinusa różnicy kątów i odczytujemy wartości z tabeli.

Usuwamy niewymierność z mianownika.

Odpowiedź: Tangens 15° wynosi $2 - \sqrt{3}$.

Ad b)

$$\operatorname{tg}75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin(45^\circ + 30^\circ)}{\cos(45^\circ + 30^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{6 + \sqrt{12} + \sqrt{12} + 2}{6-2} = \frac{8 + 2\sqrt{4\cdot 3}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

Odpowiedź: Tangens 75° wynosi $2 + \sqrt{3}$.

ZADANIE 2

Mając dane kąty ostre α i β takie, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$, oblicz $\sin(\alpha + \beta)$.

ROZWIĄZANIE

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Wybieramy tylko wartości dodatnie, bo kąt jest ostry.

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\sin\beta = \frac{1}{4}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\cos^2\beta = 1 - \frac{1}{16}$

$\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$ $\qquad$ $\cos^2\beta = \frac{15}{16}$

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=$

$=\frac{1}{3}\cdot\cos\beta+\frac{1}{4}\cdot\cos\alpha=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=$

$=\frac{\sqrt{15}}{12}+\frac{2\sqrt{2}}{12}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów, następnie obliczamy brakujące wartości funkcji z „jedynki trygonometrycznej".

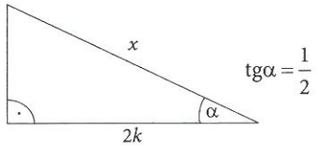
Odpowiedź: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$.

ZADANIE 3

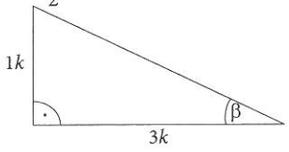
Wykaż, że jeżeli α i β są kątami ostrymi, przy czym $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, to α + β = 45°.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli α + β = 45°, to tg (α + β) = 1 lub $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$



$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$

$x^2=(1k)^2+(2k)^2$ $\quad x^2=5k^2$ $\quad x=k\sqrt{5}$

$\sin\alpha=\frac{1k}{k\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha=\frac{2k}{k\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$x^2=(1k)^2+(3k)^2$ $\quad x^2=10k^2$ $\quad x=k\sqrt{10}$

$\sin\beta=\frac{1k}{k\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\beta=\frac{3k}{k\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{50}}{50}+\frac{2\sqrt{50}}{50}=\frac{5\sqrt{50}}{50}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin 45°$

Odpowiedź: α + β = 45°

ZADANIE 4

Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie: $\frac{\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}$.

ROZWIĄZANIE

$\frac{\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}=\frac{2\sin\frac{7\alpha-5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha+5\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-5\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos\alpha}=tg\alpha\cdot\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=tg\alpha\cdot\frac{1}{tg6\alpha}=\frac{tg\alpha}{tg6\alpha}$

Odpowiedź: Najprostsza postać wyrażenia to $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}6\alpha}$.

RÓWNANIA TRYGONOMETRYCZNE

UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Rozwiązując równania trygonometryczne dowolnego kąta, pamiętajmy, że:

Sinus i cosinus mają dwa rozwiązania, do których dodajemy wielokrotność okresu, czyli 2kπ, gdzie k jest liczbą całkowitą.

W przypadku sinusa drugie rozwiązanie otrzymujemy, odejmując od π obliczony kąt, a w przypadku cosinusa drugie rozwiązanie ma znak przeciwny.

Tangens ma tylko jedno rozwiązanie, do którego dodajemy kπ, ale rozwiązywanie równania rozpoczynamy od założenia: kąt różny od $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Wśród funkcji trygonometrycznych tylko cos*x* jest funkcją parzystą cos(−*x*) = cos *x*, pozostałe funkcje są nieparzyste: sin(−*x*) = −cos *x*, tg(−*x*) = −tg *x*, ctg(−*x*) = −ctg *x*.

Jeżeli funkcja trygonometryczna podniesiona jest do kwadratu, to możemy zapisać tylko dodatnie rozwiązanie, ale dodać okres o połowę mniejszy.

Jeżeli w końcowym wyniku otrzymamy kąt ujemny, możemy dodać okres, podstawiając k = 1, i zapisać dodatnią wartość kąta.

ZADANIE 1

Rozwiąż równania:

a) $\sin 3x=0$ **b)** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ **c)** $\operatorname{tg}\frac{2}{3}x=0$.

ROZWIĄZANIE

W każdym przypadku są to miejsca zerowe funkcji.

Ad a)

$\sin 3x=0$ $\quad 3x=k\pi$ /:3 $\quad x=\frac{k\pi}{3}, k\in C$

Miejsca zerowe funkcji sinus występują dla $\alpha=k\pi$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są wielokrotności $\frac{\pi}{3}$.

Ad b)

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

Miejsca zerowe funkcji cosinus występują dla $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\quad 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+k\pi$

$2x=\frac{3}{6}\pi+\frac{2}{6}\pi+k\pi$ $\quad 2x=\frac{5}{6}\pi+k\pi$ /:2

$x=\frac{5}{12}\pi+\frac{k\pi}{2}$

Odpowiedź: Rozwiązanie równania ma postać $\frac{5}{12}\pi+\frac{k\pi}{2}, k\in C$.

Ad c)

$\operatorname{tg}\frac{2}{3}x=0$ zał.: $\frac{2}{3}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad /:\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}x=k\pi \quad /:\frac{2}{3}$ $x\neq\frac{3\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$

$x=k\pi\cdot\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest $\frac{3}{2}k\pi, k\in C$.

ZADANIE 2

Rozwiąż równania:

a) $\cos 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\operatorname{tg}8x=-\sqrt{3}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\cos 7x=-\cos\frac{\pi}{4}$ $\cos 7x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos 7x=\cos\frac{3\pi}{4}$

$7x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi \quad /:7$ lub $7x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

$x=\frac{3}{28}\pi+\frac{2k\pi}{7}$ $7x=2\pi-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

$7x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi \quad /:7$

$x=\frac{5}{28}\pi+\frac{2k\pi}{7}$

Odpowiedź: Rozwiązaniami są: $\frac{3}{28}\pi+\frac{2k\pi}{7}$ oraz $\frac{5}{28}\pi+\frac{2k\pi}{7}, \quad k\in C.$

Ad b)

$\operatorname{tg}8x=-\sqrt{3}$ zał. $8x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad /:8$

$\operatorname{tg}8x=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ $x\neq\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}$

$\operatorname{tg}8x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$8x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $8x=\pi-\frac{\pi}{3}+k\pi$

$8x=\frac{2}{3}\pi+k\pi \quad /:8$ $x=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi+\frac{k\pi}{8}$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{8}$

Odpowiedź: Rozwiązanie równania ma postać $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{8}, k\in C.$

ZADANIE 3

Rozwiąż równania:

a) $4\cos^2x-8\sin x+1=0$ **b)** $\operatorname{tg}^2x-\frac{3}{\cos x}=-3$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$4\cos^2x-8\sin x+1=0$ $\cos^2x=1-\sin^2x$

Aby w równaniu była tylko jedna funkcja, korzystamy ze wzoru jedynkowego i wyznaczamy $\cos^2x$.

$4(1-\sin^2x)-8\sin x+1=0$

$4-4\sin^2x-8\sin x+1=0$

$-4\sin^2x-8\sin x+5=0 \quad /\cdot(-1)$

Dla ułatwienia obliczeń stosujemy podstawienie, pamiętając, że sinus może przyjmować wartości z przedziału $\langle -1;1\rangle$.

$4\sin^2x+8\sin x-5=0$

$\sin x=t, \quad t\in\langle -1;1\rangle$

$4t^2+8t-5=0$

$\Delta=8^2-4\cdot4\cdot(-5)=64+80=144 \quad \sqrt{\Delta}=12$

$t_1=\frac{-8-12}{2\cdot4}=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}$ – nie spełnia założenia

$t_2=\frac{-8+12}{2\cdot4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ – wracamy do wcześniejszego podstawienia

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są: $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $\frac{5}{6}\pi+2k\pi.$

Ad b)

$\operatorname{tg}^2x-\frac{3}{\cos x}=-3$ zał. $\cos x\neq0$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{3}{\cos x}=-3 \quad /\cdot\cos^2x$

$\sin^2x-3\cos x=-3\cos^2x$

$\sin^2x=1-\cos^2x$ – z jedynki trygonometrycznej

$1-\cos^2x-3\cos x+3\cos^2x=0$

$2\cos^2x-3\cos x+1=0$ $\cos x=t, \quad t\in\langle -1;1\rangle$

$2t^2-3t+1=0$ $\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1$ $\sqrt{\Delta}=1$

$t_1=\frac{3-1}{2\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $t_2=\frac{3+1}{2\cdot2}=\frac{4}{4}=1$

$\cos x=\frac{1}{2}$ lub $\cos x=1$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ $\cos x=\cos0$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $x=0+2k\pi=2k\pi$

$x=2\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są: $\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi$ lub $2k\pi.$

ZADANIE 4

Rozwiąż równanie:

a) $\sin x + \cos x = 0$ **b)** $\sin x - \cos x = 1$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x \quad / : \cos x \qquad \cos x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$

$\operatorname{tg} x = -1$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest $\frac{3}{4}\pi + k\pi, \quad k \in C$.

Ad b)

$\begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \sin^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

Korzystamy ze wzoru jedynkowego, który dopisujemy i rozwiązujemy układ równań.

$\begin{cases} \sin x = 1 + \cos x \\ (1 + \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

2) $1 + 2\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \quad / : 2$

$\cos^2 x + \cos x = 0 \qquad (\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \qquad$ lub $\qquad \cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

Szukamy kątów, które równocześnie spełniają oba równania.

1) $\sin x = 1 + 0 = 1$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

$\sin x = 1 - 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \pi + 2k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $\pi + 2k\pi, \quad k \in C$.

ZADANIE 5

Rozwiąż równania:

a) $2\cos 2x - \cos^2 x = 0$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$2\cos 2x - \cos^2 x = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta.

$2(2\cos^2 x - 1) - \cos^2 x = 0$

$4\cos^2 x - 2 - \cos^2 x = 0$

$3\cos^2 x = 2 \quad / : 3$

$\cos^2 x = \frac{2}{3}$

$\cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Do rozwiązania dodany będzie okres o połowę mniejszy. Korzystamy z tablic i wartości stopniowych, przybliżonych.

$\cos x \approx 0{,}8165$

$x \approx 35^\circ + k \cdot 180^\circ$ lub $x = -35^\circ + k \cdot 180^\circ$

$x = 180^\circ - 35^\circ + k \cdot 180^\circ$

$x = 145^\circ + k \cdot 180^\circ$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są kąty $35^\circ + k \cdot 180^\circ$ lub $145^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$.

Ad b)

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$

$2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{2} = \frac{1}{2} \quad / : 2$

$\sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{4} \quad / : \frac{1}{2} \qquad \cos x = \frac{1}{2} \qquad \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są kąty $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in C$.

NIERÓWNOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Nierówności trygonometryczne rozwiązujemy tak, jak równania. Obliczamy kąty, zaznaczamy je na wykresie danej funkcji trygonometrycznej i odczytujemy z wykresu przedziały, które są rozwiązaniem. Najczęściej nierówność rozwiązujemy w podanym przedziale. Gdyby przedział nie był podany, do początku i końca każdego przedziału dodajemy wielokrotność okresu.

ZADANIE 1

Rozwiąż nierówność, gdy $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

a) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

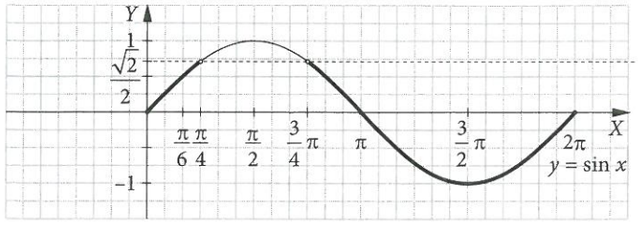
ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

Wykonujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x$ i zaznaczamy obliczone kąty.



Odpowiedź: $x \in \langle 0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi; 2\pi \rangle$.

Ad b)

$\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

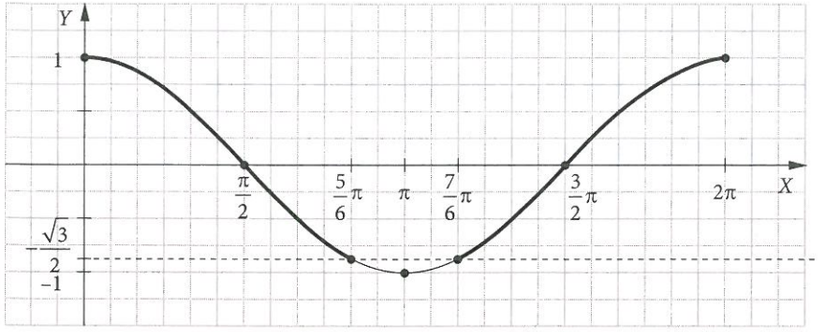
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = -\cos\frac{\pi}{6} \qquad \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \cos x = \cos\frac{5}{6}\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi = 2\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

Dodajemy 2π, ponieważ chcemy otrzymać dodatnie rozwiązanie.

$x_1 = \frac{5}{6}\pi \qquad x_2 = \frac{7}{6}\pi$



Odpowiedź: $x \in \langle 0; \frac{5}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{7}{6}\pi; 2\pi \rangle$.

ZADANIE 2

Rozwiąż nierówności dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

a) $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$ **b)** $\operatorname{tg} x > -1$

ROZWIĄZANIE

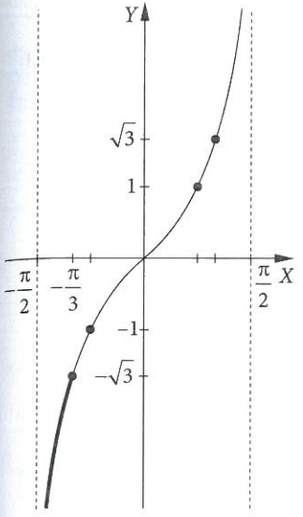
Ad a)

$\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$x = -\frac{\pi}{3}$

Zostawiamy kąt ujemny, ponieważ wykres rysujemy w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



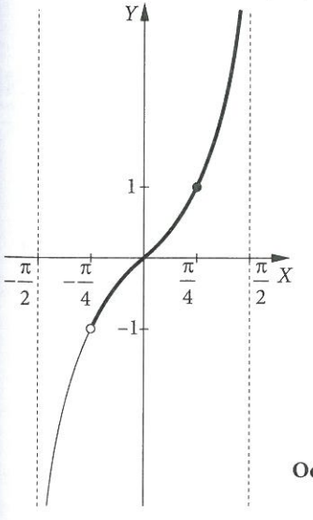
Odpowiedź: $x \in (-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3})$

Ad b)

$\operatorname{tg} x > -1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg} x = -1$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad x = -\frac{\pi}{4}$



Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$

ZADANIE 3

Rozwiąż nierówności, gdy $x \in (0; 2\pi)$:

a) $\cos^2 x - 3\sin x + \frac{3}{4} \le 0$ **b)** $\cos 2x + \frac{3\cos x}{\sqrt{3}} + 1 > 0.$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\cos^2 x - 3\sin x + \frac{3}{4} \le 0$ $\quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$1 - \sin^2 x - 3\sin x + \frac{3}{4} \le 0$ $\quad -\sin^2 x - 3\sin x + 1\frac{3}{4} \le 0 \quad / \cdot(-1)$

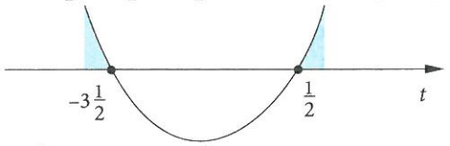
$\sin^2 x + 3\sin x - \frac{7}{4} \ge 0$

$\sin x = t, \quad t \in \langle -1; 1\rangle$

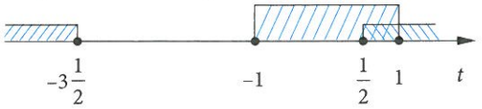
$t^2 + 3t - \frac{7}{4} \ge 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 9 + 7 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$

$t_1 = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2} = -3\frac{1}{2}$ $\qquad t_2 = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$



$t \in \left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$ i $t \in \langle -1; 1\rangle$



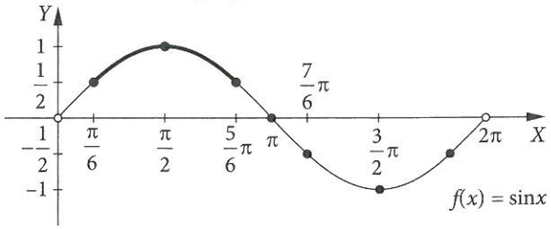
$t \in \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$

$t \ge \frac{1}{2}$ i $t \le 1$

$\sin x \ge \frac{1}{2}$ i $\sin x \le 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$



Funkcja $f(x) = \sin x$ może przyjmować tylko wartości z przedziału $\langle -1; 1\rangle$.

Funkcja sinus przyjmuje wartości nie większe od 1.

Odpowiedź: $x \in \langle \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\rangle$

Ad b)

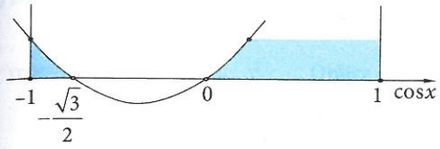
$\cos 2x + \frac{3\cos x}{\sqrt{3}} + 1 > 0 \quad x \in (0; 2\pi)$

$2\cos^2 x - 1 + \frac{3\cos x}{\sqrt{3}} + 1 > 0$ $\qquad 2\cos^2 x + \frac{3\cos x}{\sqrt{3}} > 0 \quad / \cdot\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x > 0$ $\qquad \cos x\left(2\sqrt{3}\cos x + 3\right) > 0$

$\cos x = 0$ lub $2\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$ lub $\cos x = 0$

$\cos x = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos x \in \langle -1; -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (0; 1\rangle$

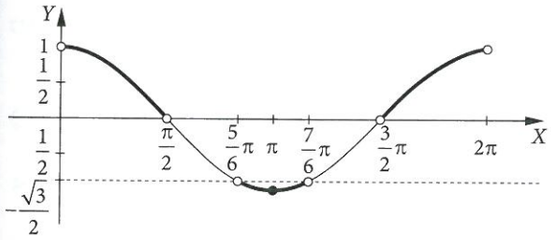
$\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x > 0$

$\cos x = -\cos\frac{\pi}{6}$ $\qquad \cos x = 0$ $\qquad x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$

$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\cos x = \cos\frac{5}{6}\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi = -\frac{5}{6}\pi + \frac{12}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$



Odpowiedź: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

CIĄGI LICZBOWE

WYZNACZANIE WYRAZÓW CIĄGU OKREŚLONEGO WZOREM REKURENCYJNYM

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Ciąg określony rekurencyjnie jest zdefiniowany za pomocą wzoru rekurencyjnego zapisanego w nawiasie klamrowym, tak jak zapisuje się układ równań. We wzorze rekurencyjnym zawsze podana jest wartość pierwszego wyrazu ciągu, czyli a_1, oraz zależności między wyrazem a_n i a_{n+1}, czyli podany jest wzór pozwalający obliczyć wyraz następny.

ZADANIE 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągów określonych wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n(n+2)}{n+1} \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$

$n = 1$: $a_{1+1} = 2a_1$ $a_2 = 2 \cdot 3 = 6$

$n = 2$: $a_{2+1} = 2a_2$ $a_3 = 2 \cdot 6 = 12$

$n = 3$: $a_{3+1} = 2a_3$ $a_4 = 2 \cdot 12 = 24$

Odpowiedź: $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 24$.

Ad b)

$a_1 = -2$ $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n(n+2)}{n+1}$

$n = 1$: $a_{1+1} = a_1 \cdot \dfrac{1 \cdot (1+2)}{(1+1)}$ $a_2 = -2 \cdot \dfrac{3}{2} = -3$

$n = 2$: $a_{2+1} = a_2 \cdot \dfrac{2(2+2)}{2+1}$ $a_3 = -3 \cdot \dfrac{8}{3} = -8$

$n = 3$: $a_{3+1} = a_3 \cdot \dfrac{3(3+2)}{3+1}$ $a_4 = -8 \cdot \dfrac{15}{4} = -30$

Odpowiedź: $a_1 = -2$, $a_2 = -3$, $a_3 = -8$, $a_4 = -30$.

ZADANIE 2

Dane są ciągi (a_n) i (b_n). Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$, a (b_n) wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \cdot b_n \end{cases}$. Oblicz $a_3 - b_3$.

ROZWIĄZANIE

$a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ Dla ciągu (a_n) obliczamy a_3.

$a_3 = \dfrac{3+1}{3+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$b_1 = 1$ $b_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \cdot b_n$ Dla ciągu (b_n) obliczamy kolejno b_2 i b_3.

$b_{1+1} = \left(\dfrac{1}{1+1}\right)^2 \cdot b_1$ $b_2 = \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

$b_{2+1} = \left(\dfrac{2}{2+1}\right)^2 \cdot b_2$ $b_3 = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{9}$

$a_3 - b_3 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{6}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$

Odpowiedź: Różnica trzecich wyrazów ciągów wynosi $\dfrac{1}{3}$.

GRANICA CIĄGU

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Ciągi zbieżne do zera to na przykład ciągi dane wzorami: $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{2}{n}$. W każdym takim przypadku, gdy rośnie n, to wartość ułamka maleje i zbliża się do zera. Podobnie do zera zbieżne są ciągi: $c_n = -\dfrac{1}{n}$, $d_n = -\dfrac{4}{n^2}$. Dla każdego z tych ciągów granica, gdy n dąży do nieskończoności, wynosi 0.

Symbolicznie: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Liczba g jest granicą ciągu (a_n), gdy ciąg $(a_n - g)$ jest zbieżny do zera, czyli:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - g = 0$

Warto pamiętać, że granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów jest równa odpowiednio sumie, różnicy, iloczynowi i ilorazowi granic, o ile ciągi te są zbieżne.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n : b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) : (\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = a : b$, 0 gdy $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

Jeśli ciąg jest rozbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Przy obliczaniu granic przydatne będą wartości najczęściej występujących granic:

* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0, a \in R$ * $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n^p} = 0, p \in R_+, a \in R$

* $\lim\limits_{n\to\infty} c = c, c \in R$ * $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ * $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$

* $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot n) = -\infty$, gdy $k < 0$ * $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot n) = \infty$, gdy $k > 0$

* $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ – granica nie istnieje * $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \infty, p \in R_+$.

Symbole: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ nie mają określonej wartości – są to wyrażenia nieoznaczone.

Gdy otrzymamy takie wyrażenie, aby obliczyć granicę, trzeba wzór przekształcić.

Gdy obliczamy granicę wyrażenia wymiernego, pamiętamy, że:
- Jeśli licznik i mianownik ułamka jest wielomianem tego samego stopnia, to granicą jest iloraz współczynników przy najwyższych potęgach n.
- Jeśli mianownik jest wielomianem wyższego stopnia niż licznik, to granicą jest zero.
- Jeśli licznik jest wielomianem wyższego stopnia, to granicą jest nieskończoność, tylko trzeba ustalić jej znak.

ZADANIE 1

Wykaż z definicji, że granicą ciągu (a_n) jest liczba g:

a) $a_n = \frac{5}{3n-7}$, $g = 0$ **b)** $b_n = \frac{3-8n}{5n+4}$, $g = -\frac{8}{5}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - g) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3n-7}\right) - 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n\left(3-\frac{7}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n} = \frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Odpowiedź: Ponieważ granica $(a_n - g)$ jest równa zero, więc liczba 0 jest granicą ciągu $a_n = \frac{5}{3n-7}$.

Ad b)

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - g) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-8n}{5n+4} + \frac{8}{5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5(3-8n)}{5(5n+4)} + \frac{8(5n+4)}{5(5n+4)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{15-40n+40n+32}{5(5n+4)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{47}{25n+20} = \lim_{n\to\infty}\frac{47}{n\left(25+\frac{20}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{47}{25n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{47}{25}}{n} = 0$$

Odpowiedź: Granica $(b_n - g)$ jest równa 0, więc $-\frac{8}{5}$ jest granicą b_n.

ZADANIE 2

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-4n^3 + 5n - 2n^5)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} 4$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \frac{2}{3-8n}\right)$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+8}{n^2+7n-13}$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+71}{7n^3-n}$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8-5n^3}{n^2-3n}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\lim_{n\to\infty}(-2n^5 - 4n^3 + 5n) = \lim_{n\to\infty} n^5\left(-2 - \frac{4n^3}{n^5} + \frac{5n}{n^5}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^5\left(-2 - \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}(-2n^5) = -\infty$$

Granica została formalnie obliczona – zawsze wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n. Bez obliczenia od razu wiadomo, że granicą jest „$-\infty$" – patrzymy tylko na współczynnik przy najwyższej potędze.

Ad b) $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$

Granica z liczby, z ciągu stałego jest tą samą liczbą.

Ad c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n+1} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n} = 0$$

W mianowniku jest wyższa potęga n niż w liczniku. Jeśli obliczamy, to wyłączamy n przed nawias w mianowniku.

Ad d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{2}{3-8n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-8n} = 5 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n\left(\frac{3}{n}-8\right)} =$$

$$= 5 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{-8n} = 5 - \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{4n} = 5 - 0 = 5$$

Ad e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+8}{n^2+7n-13} = 0$$

Potęga w mianowniku jest wyższa niż w liczniku.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+8}{n^2+7n-13} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}-\frac{13}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(0+0)}{n^2(1+0-0)} = \frac{0}{1} = 0$$

Ad f)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+5}{7n^3-n}=\frac{2}{7}$$

Zawsze wyłączamy w liczniku i mianowniku najwyższą potęgę n z mianownika.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+5}{7n^3-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(7-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2-0+0)}{n^3(7-0)}=\frac{2}{7}$$

Ad g)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8-5n^3}{n^2-3n}=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8-5n^3}{n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{8}{n^2}-5n\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(0-5n)}{n^2(1-0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n}{1}=-\infty$$

SZEREG GEOMETRYCZNY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Jeżeli ciąg geometryczny jest nieskończony i $|q|<1$, to jest to szereg geometryczny, którego sumę obliczamy ze wzoru: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

ZADANIE 1

Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$ **b)** $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$

$$a_1=0{,}3\quad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0{,}03}{0{,}3}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0{,}1\qquad |0{,}1|=0{,}1<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{0{,}3}{0{,}9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: Suma tego szeregu geometrycznego wynosi $\frac{1}{3}$.

Ad b)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots\qquad a_1=1\quad q=\frac{a_2}{a_1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}:1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Suma tego szeregu geometrycznego wynosi $2-\sqrt{2}$.

ZADANIE 2

Zamień ułamek okresowy dziesiętny na ułamek zwykły: **a)** $0{,}(72)$ **b)** $0{,}24(7)$.

Ad a)

$0{,}(72)=0{,}727272\ldots=0{,}72+0{,}0072+0{,}000072+\ldots$

$$a_1=72\quad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0{,}0072}{0{,}72}=\frac{72}{7200}=\frac{1}{100}=0{,}01\qquad |0;01|=0{,}01<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}72}{1-0{,}01}=\frac{0{,}72}{0{,}99}=\frac{72}{99}=\frac{8}{11}$$

Odpowiedź: $0{,}(72)=\frac{8}{11}$

Ad b)

$0{,}24(7)=0{,}24+0{,}007+0{,}0007+0{,}00007+\ldots$

szereg geometryczny

$$a_1=0{,}007\qquad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0{,}0007}{0{,}007}=\frac{7}{70}=\frac{1}{10}=0{,}1\qquad |0{,}1|=0{,}1<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}007}{1-0{,}1}=\frac{0{,}007}{0{,}9}=\frac{7}{900}\qquad 0{,}24(7)=0{,}24+\frac{7}{900}=\frac{24}{100}+\frac{7}{900}=\frac{216}{900}+\frac{7}{900}=\frac{223}{900}$$

Odpowiedź: $0{,}24(7)=\frac{223}{900}$.

ZADANIE 3

Wykonaj działanie $2{,}5(2)-0{,}(3)$ i wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego.

ROZWIĄZANIE

$2{,}5(2)=2{,}5222\ldots=2{,}5+0{,}02+0{,}002+0{,}0002+\ldots$

szereg geometryczny

$$a_1=0{,}02\quad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0{,}002}{0{,}02}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1\qquad |0{,}1|=0{,}1<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}02}{1-0{,}1}=\frac{0{,}02}{0{,}9}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

$$2{,}5(2)=2{,}5+\frac{1}{45}=2\frac{1}{2}+\frac{1}{45}=2\frac{45}{90}+\frac{2}{90}=2\frac{47}{90}$$

$0{,}(3)=0{,}333\ldots=0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$

$$a_1=0{,}3\quad q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0{,}03}{0{,}3}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0{,}1\qquad |0{,}1|=0{,}1<1$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{0{,}3}{0{,}9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\qquad 0{,}(3)=\frac{1}{3}$$

$$2{,}5(2)-0{,}(3)=2\frac{47}{90}-\frac{1}{3}=2\frac{47}{90}-\frac{30}{90}=2\frac{17}{90}$$

Odpowiedź: Wynik działania to $2\frac{17}{90}$.

ZADANIE 4

Wyznacz x, dla których ciąg geometryczny $x^2, \frac{x^2}{x-2}, \frac{x^2}{(x-2)^2}, \ldots$ jest zbieżny.

ROZWIĄZANIE

$x^2, \frac{x^2}{x-2}, \frac{x^2}{(x-2)^2}, \ldots, x \neq 2$

Ciąg geometryczny jest zbieżny, gdy $|q| < 1$.

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x^2}{x-2} : x^2 = \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2}, \quad x \neq 0$

Aby ciąg istniał, mianownik ułamka musi być różny od zera $x \neq 2$. Aby obliczyć q, $x \neq 0$.

$|q| < 1 \quad \left|\frac{1}{x-2}\right| < 1$

1)

$\frac{1}{x-2} < 1$

$\frac{1}{x-2} - 1 < 0$

$\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} < 0$

$\frac{1-(x-2)}{x-2} < 0$

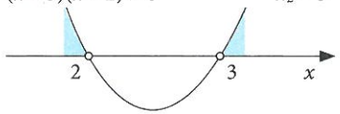
$\frac{1-x+2}{x-2} < 0$

$\frac{3-x}{x-2} < 0$

$(3 - x)(x - 2) < 0$

$-(x - 3)(x - 2) < 0 \quad /\cdot(-1)$

$(x - 3)(x - 2) > 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_1 = 2$



$x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$

2)

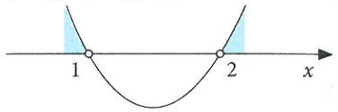
$\frac{1}{x-2} > -1$

$\frac{1}{x-2} + 1 > 0$

$\frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} > 0$

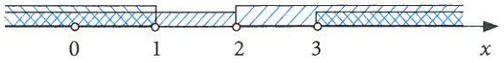
$\frac{1+x-2}{x-2} > 0$

$(x - 1)(x - 2) > 0 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$



$x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$

Razem: **1)** i **2)** oraz $x \neq 0$



Odpowiedź: Ciąg geometryczny jest zbieżny, gdy $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$.

ZADANIE 5

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots$.

ROZWIĄZANIE

$a_1 = 1, \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{x} : 1 = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

$|q| < 1 \quad \left|\frac{1}{x}\right| < 1$

Warunek zbieżności ciągu.

1)

$\frac{1}{x} < 1$

$\frac{1}{x} - 1 < 0$

$\frac{1}{x} - \frac{x}{x} < 0$

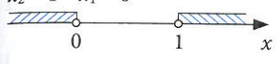
$\frac{1-x}{x} < 0$

$(1 - x)\, x < 0$

$-(x - 1)\, x < 0 \quad /:(-1)$

$(x - 1)\, x > 0$

$x_2 = 1 \quad x_1 = 0$



i

2)

$\frac{1}{x} > -1$

$\frac{1}{x} + 1 > 0$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{x} > 0$

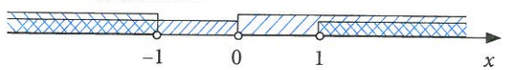
$\frac{1+x}{x} > 0$

$(1 + x)\, x > 0$

$(x + 1)\, x > 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 0$

Razem **1** i **2**



Aby ciąg był zbieżny $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

Odpowiedź: Dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ suma szeregu geometrycznego wynosi $\frac{x}{x-1}$.

ZADANIE 6

Rozwiąż równanie: $x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{9} + \ldots = \frac{3}{x}$

ROZWIĄZANIE

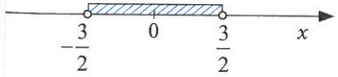
$x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{9} + \ldots = \frac{3}{x}, \quad x \neq 0$

$a_1 = x \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2x^2}{3} : x = \frac{2x^2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x}{3}$

Założenie, by ciąg był zbieżny.

$|q| < 1 \qquad \left|\frac{2}{3}x\right| < 1$

$\frac{2}{3}|x| < 1 \quad /:\frac{2}{3} \qquad |x| < \frac{3}{2}$



$x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

Obliczamy lewą stronę równania, która jest sumą szeregu geometrycznego.

$$S=\frac{x}{1-\frac{2x}{3}}=\frac{x}{\frac{3}{3}-\frac{2x}{3}}=\frac{x}{\frac{3-2x}{3}}=\frac{x}{1}\cdot\frac{3}{3-2x}=\frac{3x}{3-2x}$$

$$\frac{3x}{3-2x}=\frac{3}{x}$$

Rozwiązujemy równanie.

$$3x^2=3(3-2x)\ /:3 \qquad x^2=3-2x \qquad x^2+2x-3=0$$

$$S=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16 \qquad \sqrt{S}=4$$

$$x_1=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \qquad x_2=\frac{-2+4}{2}=1$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Tylko liczba 1 spełnia warunek $|q|<1$.

ZADANIE 7

Rozwiąż nierówności: $\frac{2x}{x-1}+\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3+\ldots<2$

ROZWIĄZANIE

$$\frac{2x}{x-1}+\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3+\ldots<2 \qquad x\neq1$$

$$a_1=\frac{2x}{x-1} \qquad q=\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2:\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{(2x)^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{2x}=\frac{2x}{x-1}, \qquad x\neq0$$

$$|q|<1 \qquad \left|\frac{2x}{x-1}\right|<1$$

$$\frac{2x}{x-1}<1 \qquad \text{i} \qquad \frac{2x}{x-1}>-1$$

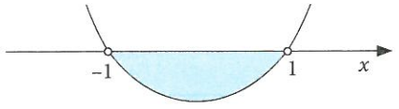
$$\frac{2x}{x-1}-1<0 \qquad \frac{2x}{x-1}+1>0$$

$$\frac{2x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}<0 \qquad \frac{2x}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}>0$$

$$\frac{2x-(x-1)}{x-1}<0 \qquad \frac{2x+x-1}{x-1}>0$$

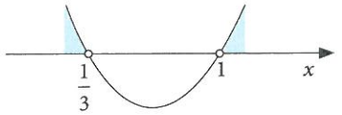
$$\frac{2x-x+1}{x-1}<0 \qquad (3x-1)(x-1)>0$$

$$x_1=-1 \quad x_2=1 \qquad 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)>0\ /:3$$



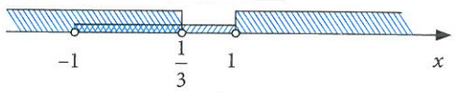
$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)>0 \qquad x_1=\frac{1}{3} \quad x_2=1$$

$$x\in(-1,1)$$



$$x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;\infty)$$

Razem **1** i **2**:



$$x\in\left(-1;\frac{1}{3}\right)$$

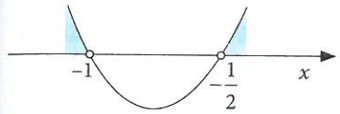
$$S=\frac{a_1}{a-q}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{1-\frac{2x}{x-1}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x-1}{x-1}-\frac{2x}{x-1}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x-1-2x}{x-1}}=\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{-x-1}=\frac{2x}{-x-1}=\frac{2x}{-(x+1)}=-\frac{2x}{x+1}$$

$$-\frac{2x}{x+1}<2\ /\cdot(-1) \qquad \frac{2x}{x+1}>-2 \qquad \frac{2x}{x+1}+2>0$$

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{2(x+1)}{x+1}>0 \qquad \frac{2x+2(x+1)}{x+1}>0 \qquad \frac{2x+2x+2}{x+1}>0$$

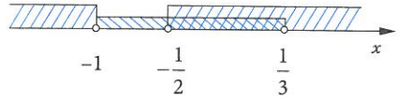
$$(4x+2)(x+1)>0 \qquad 4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)>0\ /:4$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)>0 \qquad x=-\frac{1}{2} \qquad x=-1$$



$$x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$$

Część wspólna założenia i rozwiązania:



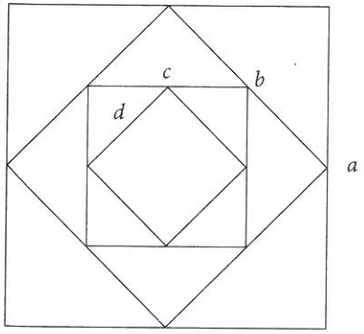
$$x\in\left(-1;\frac{1}{3}\right) \quad \text{i} \quad x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

ZADANIE 8

W kwadracie o boku długości *a* połączono środki kolejnych boków. W nowo powstałym kwadracie postąpiono tak samo i w następnych również. Okazało się, że długość boków kolejnych kwadratów tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów.

ROZWIĄZANIE



$$b=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c=\frac{1}{2}b\sqrt{2}=b\frac{\sqrt{2}}{2}=a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$d=\frac{1}{2}c\sqrt{2}=c\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

...itd.

Obserwując rysunek i obliczenia, widzimy, że każdy kolejny bok kwadratu jest przekątną kwadratu o boku długości połowie boku poprzedniego. Jeżeli boki tworzą nieskończony ciąg geometryczny, to również ich obwody tworzą taki ciąg. Sprawdzimy jego zbieżności.

$$Ob_1 = 4a \qquad Ob_2 = 4b = 4 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}a \qquad Ob_3 = 4c = 4 \cdot a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{4} = 2a$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}a}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Iloraz przy obliczaniu obwodów jest taki sam, jak iloraz długości boków kwadratu.

Iloraz jest mniejszy od 1, więc ciąg jest zbieżny.

$q < 1$ – ciąg zbieżny

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{1} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{8a}{\left(2-\sqrt{2}\right)} \cdot \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{8\left(2+\sqrt{2}\right)a}{4-2} = 4\left(2+\sqrt{2}\right)a$$

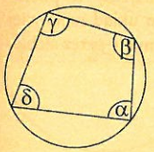
Odpowiedź: Suma obwodów tych kwadratów wynosi $4\left(2+\sqrt{2}\right)a$.

PLANIMETRIA

CZWOROKĄTY WPISANE I OPISANE NA OKRĘGU

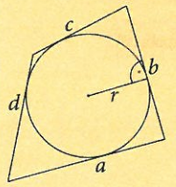
■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Na czworokącie można opisać okrąg, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

W czworokąt można wpisać okrąg, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

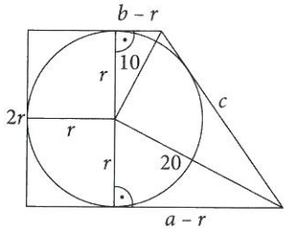


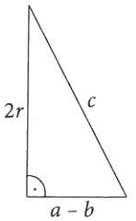
$$a + c = b + d$$

ZADANIE 1

Na kole opisano trapez prostokątny. Odległość środka koła od końców jednego z ramion są równe 10 cm i 20 cm. Oblicz pole trapezu.

ROZWIĄZANIE





Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa oraz z faktu, że czworokąt jest opisany na okręgu.

1) $r^2 + (a - r)^2 = 20^2$
2) $r^2 + (b - r)^2 = 10^2$
3) $(2r)^2 + (a - b)^2 = c^2$
4) $2r + c = a + b \qquad c = a + b - 2r$
3) $(2r)^2 + (a - b)^2 = (a + b - 2r)(a + b - 2r)$
$4r^2 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + ab - 2ar + ab + b^2 - 2br - 2ar - 2br + 4r^2$
$4ar + 4br = 4ab \quad /:4 \qquad ar + br = ab \qquad r(a + b) = ab$

Z czwartej zależności wyznaczamy c i wstawiamy do trzeciej.

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Wyznaczamy r i podstawiamy do **1)** i **2)** równania.

1) $r^2 + (a - r)^2 = 400$

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(a - \frac{ab}{a+b}\right)^2 = 400$$

$$\frac{a^2b^2}{(a+b)+^2} + \frac{\left(a(a+b)-ab\right)^2}{(a+b)^2} = 400 \quad /\cdot(a+b)^2$$

$a^2b^2 + (a^2 + ab - ab)^2 = 400\,(a + b)^2 \qquad a^2b^2 + a^4 = 400\,(a + b)^2$
$a^2\,(a^2 + b^2) = 400\,(a + b)^2$

2) $r^2 + (b - r)^2 = 100$

Podobnie jak w równaniu **1).**

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)^2 = 100$$

$a^2b^2 + (ab + b^2 - ab)^2 = 100\,(a + b)^2 \qquad a^2b^2 + b^4 = 100\,(a + b)^2$
$b^2\,(a^2 + b^2) = 100\,(a + b)^2$

$$\begin{cases} a^2\left(a^2+b^2\right) = 400\left(a+b\right)^2 \\ b^2\left(a^2+b^2\right) = 100(a+b)^2 \ * \end{cases}$$

Obie zależności zapisujemy w postaci układu równań. Ten układ najłatwiej rozwiązać, dzieląc równania przez siebie.

$$\frac{a^2(a^2+b^2)}{b^2(a^2+b^2)} = \frac{400\left(a+b\right)^2}{100\left(a+b\right)^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 4$$

$a^2 = 4b^2$
$a = 2b$
$b^2\,(a^2 + b^2) = 100\,(a + b)^2\ *$
$b^2\,[(2b)^2 + b^2] = 100\,(2b + b)^2$
$b^2 \cdot 5b^2 = 100 \cdot 9b^2 \quad /:5b^2$
$b^2 = 180 = 36 \cdot 5 \qquad \boldsymbol{b = 6\sqrt{5}} \qquad \boldsymbol{a = 12\sqrt{5}}$

Długości boków są dodatnie. Podstawiamy do równania *.

Przekształcamy wzór na pole trapezu.

$$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)\cdot 2r}{2} = (a+b)\cdot r$$

Obliczamy pole trapezu.

$$r = \frac{ab}{a+b}$$
$$P = \left(a+b\right)\cdot\frac{ab}{a+b} = ab$$

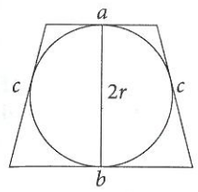
$$P = ab = 12\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5} = 72\cdot 5 = 360\,[\text{cm}^2]$$

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi 360 cm^2.

ZADANIE 2

Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu c, opisanego na kole o promieniu r.

ROZWIĄZANIE



$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$
$h = 2r$
$a + b = 2c$

Trapez jest opisany na okręgu, więc sumy przeciwległych boków są takie same, a wysokość trapezu wynosi $2r$.

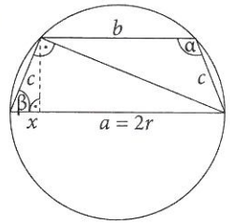
$$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{2c\cdot 2r}{2} = 2cr$$

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi $2cr$.

ZADANIE 3

W okrąg wpisano trapez tak, że jedna z jego podstaw jest średnicą okręgu. Stosunek sumy długości podstaw trapezu do długości jego obwodu wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz cosinus kąta rozwartego trapezu.

ROZWIĄZANIE



$\beta = 180^\circ = \alpha$

$$x = \frac{a-b}{2} = \frac{2r-b}{2}$$

Kąt oparty na półokręgu jest prosty.

Przekształcamy daną zależność.

$$\frac{a+b}{a+b+2c} = \frac{2}{3}$$

$3\,(a + b) = 2\,(a + b + 2c)$
$3a + 3b = 2a + 2b + 4c$
$a + b = 4c \qquad 2r + b = 4c \qquad b = 4c - 2r$
$b > 0 \qquad 4c - 2r > 0 \qquad 4c > 2r \qquad c > \frac{1}{2}r$

Długość boku musi być dodatnia, więc zapisujemy założenie.

$$x = \frac{2r-b}{2} = \frac{2r-(4c-2r)}{2} = \frac{4r-4c}{2} = 2r - 2c$$

Możemy wyznaczyć długość x.

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{x}{c} = \frac{2r-2c}{c} \\ \cos\beta = \frac{c}{2r} \end{cases}$$

Wyznaczamy cosinus kąta β w dwóch trójkątach prostokątnych.

$$\begin{cases} 2r = \frac{c}{\cos\beta} \\ \cos\beta = \frac{\frac{c}{\cos\beta} - 2c}{c} \quad /\cdot c \end{cases}$$

$c\cos\beta = \frac{c}{\cos\beta} - 2c \quad / \cdot \cos\beta \quad / : c$

$\cos^2\beta = 1 - 2\cos\beta$

$\cos^2\beta + 2\cos\beta - 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\beta = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ lub $\cos\beta = -1+\sqrt{2}$

Kąt β jest ostry, więc cosinus kąta musi być dodatni i mniejszy od jeden.

$\cos\beta = -1+\sqrt{2}$

$\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

Obliczamy cosinus kąta rozwartego α, który jest ujemny.

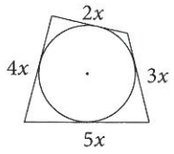
$\cos\alpha = -\cos\beta = -\left(-1+\sqrt{2}\right) = 1-\sqrt{2}$

Odpowiedź: Cosinus kąta rozwartego w trapezie ma wartość $1-\sqrt{2}$.

ZADANIE 4

Długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu są w stosunku 2 : 3 : 5. Oblicz długość boków czworokąta, gdy jego obwód wynosi 84 cm.

ROZWIĄZANIE



Boki czworokąta oznaczamy $2x$, $3x$, $5x$. Sumy przeciwległych boków są takie same.

Bok leżący naprzeciwko boku $3x$ ma długość $4x$.

$2x + 3x + 5x + 4x = 14x$

$14x = 84 \quad / :14 \qquad x = 6 \qquad 2 \cdot 6 = 12,\ 3 \cdot 6 = 18,\ 4 \cdot 6 = 24,\ 5 \cdot 6 = 30$

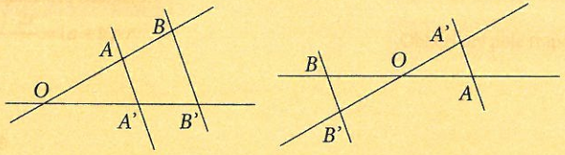
Odpowiedź: Boki czworokąta mają długość 12 cm, 18 cm, 24 cm i 30 cm.

TWIERDZENIE TALESA, FIGURY PODOBNE

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$.



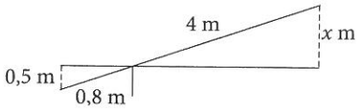
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

ZADANIE 1

Dłuższe ramię szlabanu kolejowego ma 4 m, a krótsze 0,8 m. O ile wzniesie się dłuższe ramię szlabanu, gdy krótsze opuści się o 0,5 m?

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

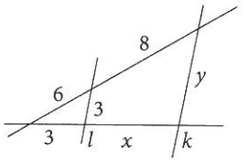
$\frac{0,8}{4} = \frac{0,5}{x} \qquad 0,8x = 2 \qquad x = 2,5$

W rozwiązaniu zadania korzystamy z twierdzenia Talesa.

Odpowiedź: Dłuższe ramię szlabanu podniesie się o 2,5 m.

ZADANIE 2

Oblicz brakujące długości odcinków, gdy proste k i l są równoległe:



ROZWIĄZANIE

Korzystamy z tw. Talesa.

$\frac{3+x}{3} = \frac{6+8}{6}$

$6(3+x) = 3 \cdot 14 \quad / :3$

$2(3+x) = 14$

$6 + 2x = 14$

$2x = 8 \qquad x = 4$

$\frac{6+8}{y} = \frac{6}{3}$

$6y = 3 \cdot 14 \quad / :3$

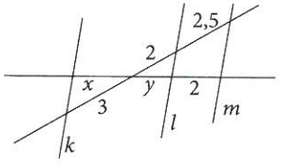
$2y = 14 \quad / :2$

$y = 7$

Odpowiedź: Brakujące długości odcinków wynoszą odpowiednio $x = 4$ oraz $y = 7$.

ZADANIE 3

Oblicz brakujące długości odcinków, gdy proste k, l, m są równoległe.



ROZWIĄZANIE

$\frac{y}{2}=\frac{y+2}{2+2,5}$

$4,5y=2(y+2)$ $\quad 4,5y=2y+4$ $\quad 2,5y=4$ $\quad y=4:2,5=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}=1,6$

$\frac{y}{2}=\frac{x}{3}$

$\frac{1,6}{2}=\frac{x}{3}$ $\quad 2x=3\cdot 1,6 \quad /:2$ $\quad x=3\cdot 0,8$ $\quad x=2,4$

Odpowiedź: Brakujące odcinki mają odpowiednio długości $x=2,4$ i $y=1,6$.

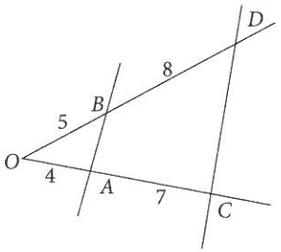
ZADANIE 4

Ramiona kąta, którego wierzchołkiem jest punkt *O*, przecięto prostymi *AB* i *CD*. Sprawdź, czy proste te są równoległe, jeśli:

a) $|OA|=4,\ AC=7,\ OB=5,\ BD=8$ **b)** $|OA|=8,\ AC=12,\ OB=6,\ BD=9$

ROZWIĄZANIE

Ad a)



$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$

Jeśli proste są równoległe, to zgodnie z tw. Talesa stosunek długości odpowiednich odcinków musi być taki sam. Zapisujemy jedną z proporcji i sprawdzamy, czy jest ona prawdziwa.

$L=\frac{OA}{OC}=\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11}$ $\quad P=\frac{OB}{OD}=\frac{5}{5+8}=\frac{5}{13}$ $\quad L\neq P$

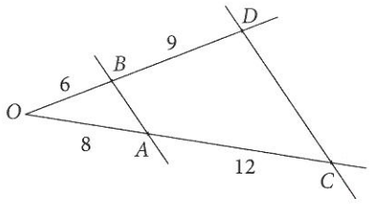
Odpowiedź: Te proste nie są równoległe.

Ad b)

$\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OD}$

$L=\frac{OA}{OC}=\frac{8}{8+12}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

$P=\frac{OB}{OD}=\frac{6}{6+9}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ $\quad L=P$

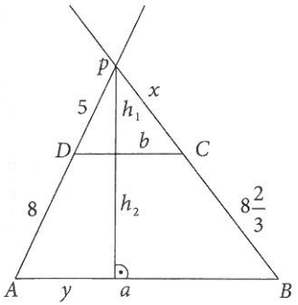


Odpowiedź: Proste są równoległe.

ZADANIE 5

W trapezie *ABCD* przedłużono ramiona *BC* i *AD*, aż do ich przecięcia się w punkcie *P*. Oblicz $|BP|$, jeśli $|AD|=8$ cm, $|DP|=5$ cm, $|BC|=8\frac{2}{3}$ cm.

ROZWIĄZANIE



$\frac{x}{x+8\frac{2}{3}}=\frac{5}{5+8}$ $\quad \frac{x}{x+8\frac{2}{3}}=\frac{5}{13}$

Z twierdzenia Talesa obliczamy *x*.

$13x=5\left(x+\frac{26}{3}\right)$ $\quad 13x=5x+\frac{130}{3}$ $\quad 8x=\frac{130}{3} \quad /:8$ $\quad x=\frac{130}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$

$|BP|=8\frac{2}{3}+x=8\frac{8}{12}+5\frac{5}{12}=13\frac{13}{12}=14\frac{1}{12}$

Odpowiedź: Długość odcinka *BP* wynosi $14\frac{1}{12}$.

JEDNOKŁADNOŚĆ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Jednokładność to przekształcenie, które pozwala znaleźć obraz figury, która ma kąty tej samej miary, a boki mają długość odpowiednio do skali większą lub mniejszą. Figury jednokładne są podobne. W jednokładności zawsze podany jest punkt, który jest środkiem jednokładności, oraz skala. Jeśli skala jest dodatnia, figura i jej obraz leżą po tej samej stronie środka jednokładności, a jeśli ujemna, to po przeciwnej.
Zadania z jednokładności w układzie współrzędnych pojawią się w dziale: *Geometria analityczna*.

ZADANIE 1

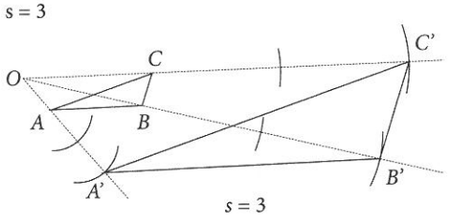
Znajdź obraz dowolnego trójkąta w jednokładności o środku *O* i skali *s*, która wynosi:

a) 3 **b)** −2 **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$s = 3$



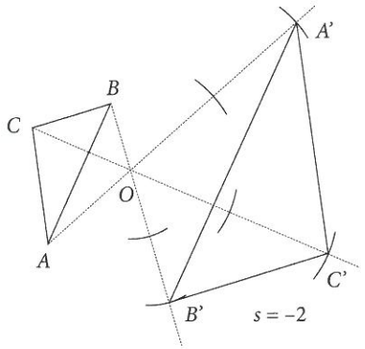
$s = 3$

Zaznaczamy punkt O, który jest środkiem jednokładności. Rysujemy trójkąt ABC. Ponieważ $s = 3$ i obraz figury będzie trzykrotnie większy, więc rysujemy trójkąt dość blisko środka jednokładności. Prowadzimy proste od środka jednokładności przechodzące odpowiednio przez wierzchołki trójkąta. Najlepiej przy pomocy cyrkla odmierzamy odległość OC i na tej półprostej odmierzamy ją jeszcze dwukrotnie $|OC'| = 3|OC|$. Podobnie otrzymujemy wierzchołki A' i B'. Łączymy punkty i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta w jednokładności o środku O i skali $s = 3$.
W ten sam sposób wykonujemy pozostałe rysunki.

Ad b)

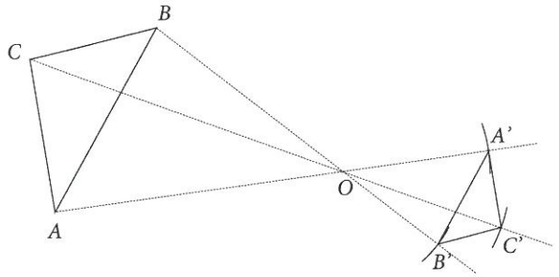
$s = -2$

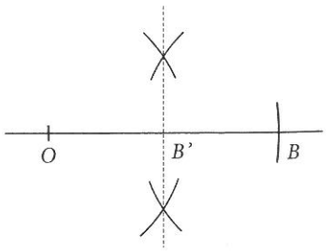
Figura i jej obraz będą leżały po przeciwnej stronie środka jednokładności i obraz figury będzie dwukrotnie większy.



Ad c) $s = -\frac{1}{2}$

Figura i jej obraz będą leżały po przeciwnej stronie środka jednokładności i obraz figury będzie dwukrotnie mniejszy.
Odcinki $|OA|$, $|OB|$, i $|OC|$ musimy podzielić na pół. Należy to zrobić konstrukcyjnie, konstruując symetralne odcinków, na przykład odcinka $|OB|$.

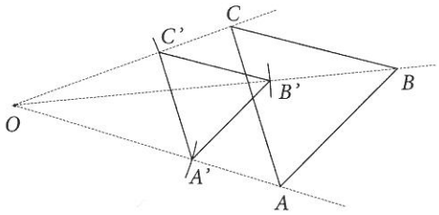




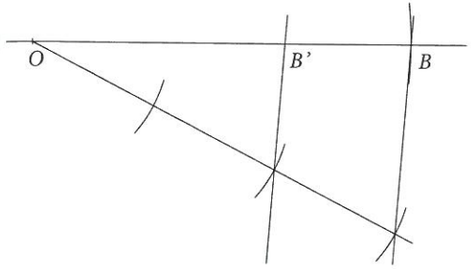
Ad d)

$s = \frac{2}{3}$

Figura i jej obraz będą leżały po tej samej stronie środka jednokładności. Każdy z odcinków $|OA|$, $|OB|$ i $|OC|$ trzeba będzie podzielić na trzy części, korzystając z tw. Talesa, i odmierzyć dwie jego części.



Rysujemy odcinek $|OA|$. Dorysowujemy dowolną półprostą o początku w punkcie O. Na niej odmierzamy cyrklem trzy odcinki o dowolnej jednakowej długości. Przez otrzymany końcowy punkt A prowadzimy prostą. Kreślimy prostą równoległą do niej przechodzącą przez punkt oddalony od punktu O o dwie długości odmierzonego odcinka, np.



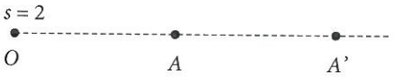
ZADANIE 2

Dane są dwa różne punkty O i A'. Znajdź środek jednokładności, w której obrazem punktu A jest punkt A', jeśli skala jednokładności wynosi: **a)** $s = 2$ **b)** $s = -\frac{3}{4}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$s = 2$

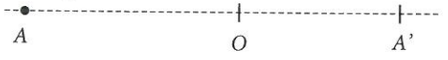


Gdy $s = 2$, to $|OA| = 2|OA|$ oraz punkty A i A' leżą po tej samej stronie punktu O. Punkt A znajdujemy, dzieląc $|OA'|$ na pół, czyli konstruując symetralną odcinka tak, jak w zad 1c).

Ad b)

$s = -\frac{3}{4}$ $|OA'| = \frac{3}{4}|OA|$ $/ : \frac{3}{4}$

$|OA| = \frac{4}{3}|OA'|$



Punkty A i A' leżą po przeciwnej stronie punktu O.
Odcinek OA' dzielimy na trzy 3 części.

$|OA| = |OA'| + \frac{1}{3}|OA|$

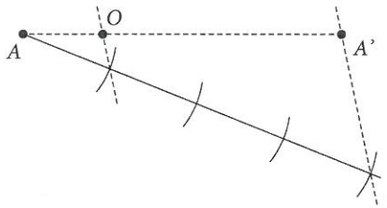
Konstrukcja tak, jak w zad 1d).

ZADANIE 3

Mając dane dwa różne punkty A i A', znajdź środek jednokładności, w której obrazem punktu A jest punkt A', jeśli skala jednokładności wynosi -3.

ROZWIĄZANIE

$s = -3$

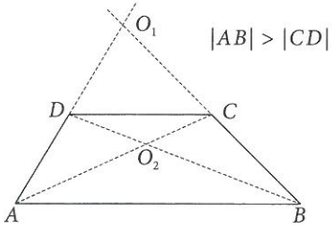


Punkt O będzie leżał pomiędzy punktem A i A'. Gdy odcinek AA' podzielimy na 4 jednostkowe odcinki, to punkt O zaznaczymy tak, by $|OA|$ miał długość jednego odcinka jednostkowego, a $|OA'|$ trzech takich odcinków. Konstrukcja tak jak w zadaniu 1a).

ZADANIE 4

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wyznacz środek i skalę jednokładności odwzorowującej dłuższą podstawę na krótszą.

ROZWIĄZANIE



$|AB| > |CD|$

Obrazem odcinka $|AB|$ ma być odcinek $|DC|$. Możliwe są dwa przypadki. Środek jednokładności może być punktem przecięcia przedłużonych ramion trapezu – O_1 lub jego przekątnych O_2. Obliczamy skalę.

1. środek jednokładności O_1 – skala dodatnia

$|DC| = s|AB|$

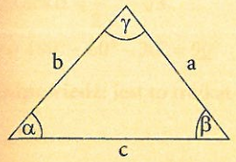
$$s = \frac{|DC|}{|AB|}$$

2. środek jednokładności O_2 – skala ujemna: $s = -\frac{|DC|}{|AB|}$.

Odpowiedź: Otrzymujemy środek jednokładności O_1 i skalę $\frac{|DC|}{|AB|}$ oraz O_2 i skalę: $-\frac{|DC|}{|AB|}$.

TWIERDZENIE SINUSÓW I COSINUSÓW

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE



Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są takie same i są równe średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$, gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie.

Twierdzenie cosinusów

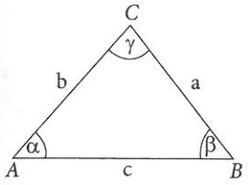
W dowolnym trójkącie kwadrat długości wybranego boku jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwójny iloczyn tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

ZADANIE 1

Korzystając z oznaczeń na rysunku rozwiąż trójkąt, czyli wyznacz brakujące długości boków i miary kątów, gdy:

a) $b = 10$, $\alpha = 30°$, $\beta = 135°$ **b)** $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|AB| = 9$, $\sphericalangle BAC = 120°$ **c)** $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$



ROZWIĄZANIE

Ad a)

$b = 10$, $\alpha = 30°$, $\beta = 135°$

$\gamma = 180° - 135° - 30° = \underline{15°}$ Obliczamy brakujący kąt γ.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{10}{\sin 135°}$$ Obliczamy bok a.

$\sin(180° - 45°)\, a = 10\sin 30°$

$\sin 45°\, a = 10 \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} a = 5 \quad / \cdot 2$

$\sqrt{2}a = 10 \quad / \cdot \sqrt{2}$

$2a = 10\sqrt{2} \quad / : 2$

$a = 5\sqrt{2}$

$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}$

Obliczamy bok c.

$\frac{c}{\sin 45^\circ}=\frac{10}{\sin 135^\circ}$

$c\cdot\sin 45^\circ = 10\sin 15^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2}c=10\cdot 0{,}2588 \quad /\cdot 2 \qquad \sqrt{2}c=2\cdot 2{,}588 \quad /\cdot\sqrt{2}$

$2c=2\cdot 2{,}588\sqrt{2} \quad /:2 \qquad c=2{,}588\sqrt{2}\approx 2{,}6\sqrt{2}$

Odpowiedź: Brakujący kąt ma miarę 15°, a boki mają długość $5\sqrt{2}$ i $2{,}6\sqrt{2}$.

Ad b)

$|AC|=3\sqrt{6} \quad |AB|=9 \quad \sphericalangle BAC=120^\circ$

Kiedy znamy długość dwóch boków i kąt między nimi zawarty, to korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$b=3\sqrt{6}\ ,\ c=9,\ \alpha=120^\circ$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$a^2=\left(3\sqrt{6}\right)^2+9^2-2\cdot 3\sqrt{6}\cdot 9\cdot\cos 120^\circ =$

Cosinus w drugiej ćwiartce jest ujemny.

$=9\cdot 6+81-54\sqrt{6}\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=54+81-54\sqrt{6}\cdot(-\cos 60^\circ)=$

$=135+54\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}=135+27\sqrt{6}\approx 135+66\approx 201$

$a\approx 14{,}2$

$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \qquad \frac{9}{\sin\gamma}=\frac{14{,}2}{\sin 120^\circ}$

Znając długość wszystkich boków, można brakujący kąt obliczyć z twierdzenia cosinusów lub wykorzystać dwa boki i kąt leżący naprzeciwko jednego z nich i zastosować twierdzenie sinusów.

$14{,}2\sin\gamma = 9\sin(180^\circ - 60^\circ) \qquad 14{,}2\sin\gamma = 9\sin 60^\circ$

$14{,}2\sin\gamma=9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad /:14{,}2$

$\sin\gamma\approx\frac{9}{2}\cdot\frac{1{,}73}{14{,}2}\approx\frac{15{,}57}{28{,}40}\approx\frac{1557}{2840}\approx 0{,}5482$

$\gamma\approx 33^\circ$

$\beta = 180^\circ - 120^\circ - 33^\circ = 27^\circ$

Odpowiedź: Brakujący bok ma długość 14,2 a kąty 33° i 27°.

Ad c)

$a=2, b=2\sqrt{3}, c=4$

Gdy znamy długość trzech boków, kąt możemy obliczyć tylko z twierdzenia cosinusów.

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

$\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos\beta$

$12 = 4 + 16 - 16\cos\beta \qquad 16\cos\beta = 8 \quad /:16 \qquad \cos\beta=\frac{1}{2} \qquad \beta = 60^\circ$

Drugi kąt można obliczyć, korzystając z twierdzenia sinusów lub cosinusów.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$2^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+4^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cos\alpha$

$4=12+16-16\sqrt{3}\cos\alpha$

$16\sqrt{3}\cos\alpha=24 \quad /:16$

$\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{24}{16}$

$\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{3}{2} \quad /\cdot\sqrt{3} \qquad 3\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad /:3 \qquad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = 30^\circ$

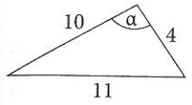
$\gamma = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

Odpowiedź: Jest to trójkąt prostokątny, w którym kąty mają miary 30°, 60° i 90°.

ZADANIE 2

Sprawdź, czy trójkąt o bokach 10, 11 i 4 jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

ROZWIĄZANIE



Kąt o największej mierze znajduje się zawsze naprzeciwko najdłuższego boku, więc obliczamy cosinus kąta α leżącego naprzeciwko boku o długości 11 z twierdzenia cosinusa.

$11^2 = 10^2 + 4^2 - 2\cdot 10\cdot 4\cos\alpha$

$121 = 100 + 16 - 80\cos\alpha$

$80\cos\alpha = -5 \quad /:80$

$\cos\alpha=-\frac{5}{80} \qquad \cos\alpha=-\frac{5}{80}=-\frac{1}{16}$

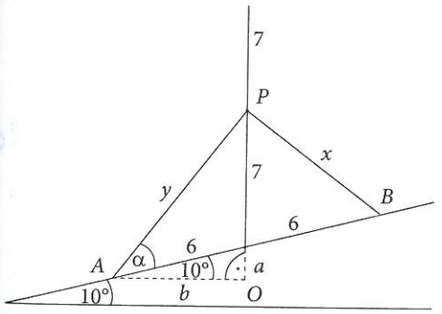
Jeśli cosinus jest ujemny, to kąt jest z II lub III ćwiartki układu współrzędnych, czyli rozwarty, a zatem trójkąt rozwartokątny.

Odpowiedź: Trójkąt jest rozwartokątny.

ZADANIE 3

Na stoku narciarskim o kącie nachylenia 10° ustawiono słup o wysokości 14 m. W połowie wysokości słupa zaczepiono odciągi, które zostały przymocowane do ziemi w dwóch punktach odległych o 6 m od podstawy słupa. Oblicz, jakiej długości są odciągi.

ROZWIĄZANIE



Rysując odcinek równoległy do podstawy z punktu A oraz przedłużając odcinek przedstawiający słup, otrzymujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b, przeciwprostokątnej 6 i kącie ostrym 10°. Obliczamy długość boków a i b.

$\sin 10^\circ=\frac{a}{6} \qquad \cos 10^\circ=\frac{b}{6}$

$\frac{a}{6}=\frac{0{,}1736}{1} \qquad \frac{b}{6}=\frac{0{,}9848}{1}$

$a = 6\cdot 0{,}1736 \approx 1$ cm $\qquad b = 6\cdot 0{,}9848 \approx 5{,}9$ cm

$y^2 = b^2 + (a+7)^2$
$y^2 = (5{,}9)^2 + 8^2 = 34{,}81 + 64 = 9881$
$\underline{y \approx 9{,}9 \text{ cm}}$

Długość odcinka y można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa – jest to przeciwprostokątna w trójkącie AOP.

$7^2 = 6^2 + 9{,}9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9{,}9\cos\alpha$
$49 = 36 + 98{,}01 - 118{,}8\cos\alpha$
$118{,}8\cos\alpha = 85{,}01 \quad /:118{,}8$
$\cos\alpha = \frac{85{,}01}{118{,}8} = \frac{8501}{11880} \approx 0{,}72$

Aby obliczyć x, najpierw wyznaczamy cosinus kąta α – kata PAB wykorzystując twierdzenie cosinusów w trójkącie o bokach y, 6, 7.

$x^2 = y^2 + 12^2 - 2y \cdot 12\cos\alpha$
$x^2 = (9{,}9)^2 + 144 - 24 \cdot 9{,}9 \cdot 0{,}72 = 98{,}11 + 144 - 171{,}07$
$x^2 = 70{,}94$
$\underline{x \approx 8{,}4 \text{ cm}}$

Obliczamy x, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta o bokach x, y, 12 i znając $\cos\alpha$.

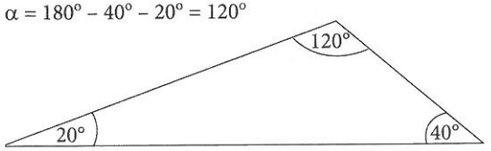
Odpowiedź: Zamocowane odciągi mają długość 8,4 m i 9,9 m.

ZADANIE 4

Oblicz pole koła opisanego na trójkącie, gdy najdłuższy jego bok ma długość 10 cm, a kąty mają miarę 20° i 40°.

ROZWIĄZANIE

$\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$



Obliczamy trzeci, brakujący kąt trójkąta. Jest to trójkąt rozwartokątny i kąt 120° leży naprzeciwko najdłuższego boku. Korzystamy z twierdzenia sinusów. R – promień okręgu opisanego na trójkącie.

$2R = \frac{10}{\sin 120^\circ} \quad /:2 \qquad R = \frac{5}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ cm}$

$P = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{100}{3} = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2$

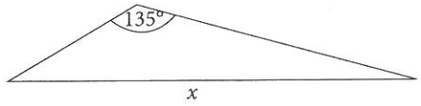
Odpowiedź: Pole koła wynosi $\frac{100\pi}{3}$ cm^2.

ZADANIE 5

Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm ma miarę 135°. Jaką długość ma najdłuższy bok tego trójkąta?

ROZWIĄZANIE

$R = 6$ cm $\quad \alpha = 135^\circ$



Najdłuższy bok kata leży naprzeciwko kąta rozwartego.
Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$\frac{x}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{x}{\sin 135^\circ} = 2 \cdot 6 \qquad x = 12\sin(180^\circ - 45^\circ) = 12\sin 45^\circ = \frac{12}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

Odpowiedź: Najdłuższy bok trójkąta ma długość $6\sqrt{2}$ cm.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA NIERÓWNOŚCI I UKŁADU NIERÓWNOŚCI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Nierównością liniową z jedną niewiadomą przedstawiamy na osi liczbowej, a nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi w układzie współrzędnych. Wykonujemy wykres prostej i zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę. Gdy interpretujemy układ nierówności, to wszystkie zaznaczamy w jednym układzie współrzędnych.

Aby wyznaczyć zbiór punktów spełniających nierówność, należy:
- narysować prostą – prosta podzieliła płaszczyznę na dwie części: nad prostą i pod
- sprawdzić, czy dla dowolnie wybranego punktu (nad prostą lub pod prostą), np. (0, 0) nierówność jest prawdziwa. Jeśli jest prawdziwa – zaznaczamy ten obszar, jeśli nie jest prawdziwa – zaznaczamy obszar, do którego ten punkt nie należy.

ZADANIE 1

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówności:

a) $3x - 4y - 4 \geq 0$ **b)** $x < 14 - 7y$

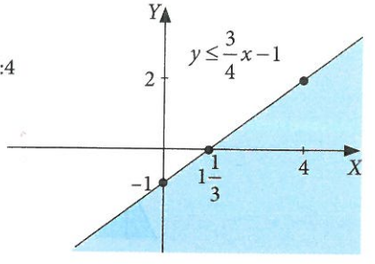
ROZWIĄZANIE

Ad a)

$3x - 4y - 4 \geq 0 \qquad -4y \geq -3x + 4 \quad /\cdot(-1) \qquad 4y \leq 3x - 4 \quad /:4$

$y \leq \frac{3}{4}x - 1 \qquad y = \frac{3}{4}x - 1$

x	0	$\frac{4}{3}$	4
y	−1	0	2



Ad b)

$x < 14 - 7y$ $\qquad 7y < -x + 14 \quad /:7$

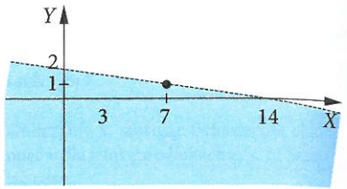
$y < -\frac{1}{7}x + 2$ $\qquad y = -\frac{1}{7}x + 2$

x	0	14	7
y	2	0	1

$0 = -\frac{1}{7}x + 2$ $\qquad \frac{1}{7}x = 2 \quad /\cdot 7$

$x = 14$

Gdy znak nierówności jest ostry, to prosta nie należy do rozwiązania i rysujemy ją przerywaną linią.



ZADANIE 2

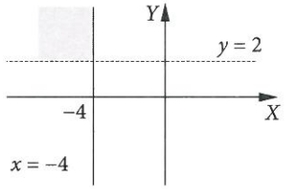
Zaznacz na płaszczyźnie rozwiązanie układu nierówności:

a) $\begin{cases} x \le -4 \\ y > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x < 3 \\ y < 2x - 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \le -x + 4 \\ 3x - 5y + 15 \ge 0 \\ x + 5y \ge -5 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x \le -4$ i $y > 2$



Rysujemy proste $x = -4$ i $y = 2$ i zakreskowujemy obszar, który spełnia równocześnie obie nierówności.

Ad b)

$x < 3$ i $y < 2x - 5$

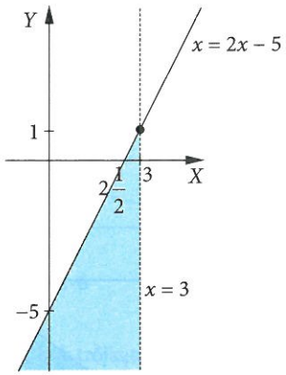
$y = 2x - 5$

x	0	$2\frac{1}{2}$	3
y	−5	0	1

$0 = 2x - 5$

$-2x = -5 \quad /:(-2)$

$x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$



Ad c)

1) $y \le -x + 4$

$y = -x + 4$

x	0	4	2
y	4	0	2

$0 = -x + 4$

$x = 4$

2) $3x - 5y + 15 > 0$

$-5y > -3x - 15 \quad /:(-5)$

$y \le \frac{3}{5}x + 3$

$y = \frac{3}{5} + 3$

x	0	−5	5
y	3	0	6

$0 = \frac{3}{5}x + 3$

$-\frac{3}{5}x = 3 \quad /:\left(-\frac{3}{5}\right)$

$x = -\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} = -5$

3) $x + 5y > -5$

$5y > -5 \quad /:5$

$y \ge -\frac{1}{5}x - 1$

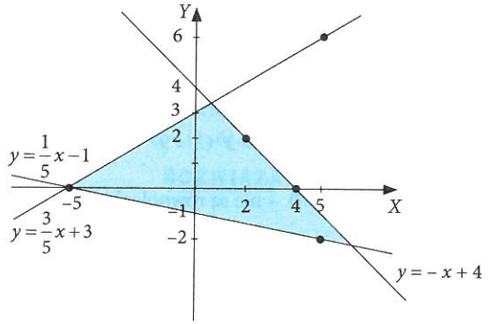
$y = -\frac{1}{5}x - 1$

x	0	−5	5
y	−1	0	−2

$0 = -\frac{1}{5}x - 1$

$\frac{1}{5}x = -1 \quad /:\left(\frac{1}{5}\right)$

$x = -5$



PROSTA W POSTACI OGÓLNEJ. ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$, gdy A i B nie są równocześnie równe 0, czyli $A^2 + B^2 \neq 0$.

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi OX, a jeżeli $B = 0$, to jest równoległa do osi OY, a jeśli $C = 0$, to prosta przechodzi przez **początek układu współrzędnych**.

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ **są równoległe**, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, a **prostopadłe**, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Odległość od punktu $P = (x_o, y_o)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ obliczamy ze wzoru: $d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ZADANIE 1

Określ położenie prostej:

a) $-3x + 2y = 0$ **b)** $2x - 5 = 0$ **c)** $-4y + 7 = 0$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$-3x + 2y = 0$ $A = -3,\ B = 2$ i $C = 0$ – ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych

Ad b)

$2x - 5 = 0$ $A = 2,\ B = 0,\ C = -5$ – jest to prosta równoległa do osi OY

Ad c)

$-4y + 7 = 0$ $A = 0,\ B = -4,\ C = 7$ – jest to prosta równoległa do osi OX

ZADANIE 2

Korzystając z własności równoległości i prostopadłości prostych danych w postaci ogólnej, określ położenie prostych:

a) $-3x + y - 2 = 0$ i $x + 3y + 9 = 0$ **b)** $3x + 2y - 2 = 0$ i $2x + 3y + 9 = 0$

c) $2x + 4y - 16 = 0$ i $-4x - 8y - 4 = 0$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$-3x + y - 2 = 0$ $x + 3y + 9 = 0$

$A_1 = -3\ \ B_1 = 1\ \ C_1 = -2$ $A_2 = 1\ \ B_2 = 3\ \ C_2 = 9$

Są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

$A_1B_2 - A_2B_1 = -3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -9 - 1 = -10 \neq 0$ – nie są równoległe

Są prostopadłe, gdy: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

$A_1A_2 + B_1B_2 = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = -3 + 3 = 0$

Odpowiedź: Proste są prostopadłe.

Ad b)

$3x + 2y - 2 = 0$ $2x + 3y + 9 = 0$

$A_1 = 3\ \ B_1 = 2\ \ C_1 = -2$ $A_2 = 2\ \ B_2 = 3\ \ C_2 = 9$

$A_1B_2 - A_2B_1 = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 9 - 4 = 5 \neq 0$ – nie są równoległe

$A_1A_2 + B_1B_2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = 12$ – nie są prostopadłe

Odpowiedź: Są to proste przecinające się.

Ad c)

$2x + 4y - 16 = 0 \quad / :2$ $-4x - 8y - 4 = 0 \quad / : (-4)$

$x + 2y - 8 = 0$ $x + 2y + 1 = 0$

$A_1 = 1\ \ B_1 = 2\ \ C_1 = -8$ $A_2 = 1\ \ B_2 = 2\ \ C_2 = 1$

$A_1B_2 - A_2B_1 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$

Odpowiedź: Są to proste równoległe.

Gdy współczynniki A i B obu prostych są tą samą wielokrotnością, to takie proste są równoległe $A_1 = kA$, $k \in R$, $B_1 = kB$

ZADANIE 3

Wyznacz odległość punktu $C = (3, -6)$ od prostej AB, gdy $A = (0, 2)$, $B = (4, 7)$.

ROZWIĄZANIE

$A = (0, 2)\quad B = (4, 7)$

Równanie prostej AB:

$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$

$(y - 2)(4 - 0) - (7 - 2)(x - 0) = 0$

$(y - 2) \cdot 4 - 5x = 0$

$4y - 8 - 5x = 0$

$-5x + 4y - 8 = 0 \quad / \cdot (-1)$

$5x - 4y + 8 = 0$ – równanie prostej w postaci ogólnej

$A = 5\ \ B = -4\ \ C = 8$ $C = (3, -6)$ $x_0 = 3\ \ y_0 = -6$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 3 - 4(-6) + 8|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{|15 + 24 + 8|}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{|47|}{\sqrt{41}} = \frac{47}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{47\sqrt{41}}{41}$$

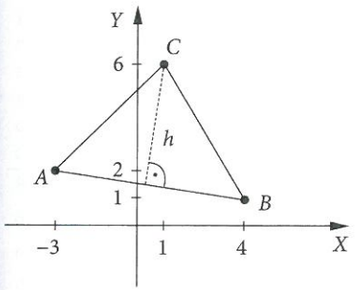
Równanie prostej można obliczyć, korzystając z postaci kierunkowej, rozwiązując układ równań lub zastosować wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

Odpowiedź: Odległość punktu C od prostej AB wynosi $\frac{47\sqrt{41}}{41}$.

ZADANIE 4

Oblicz wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C, gdy trójkąt ten jest wyznaczony przez współrzędne: $A = (-3, 2)$, $B = (4, -1)$ i $C = (1, 6)$.

ROZWIĄZANIE



$A = (-3, 2)\quad B = (4, -1)$

$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$

$(y - 2)(4 + 3) - (-1 - 2)(x + 3) = 0$

$(y - 2) \cdot 7 - (-3)(x + 3) = 0$

$(y - 2) \cdot 7 + 3(x + 3) = 0$

$7y - 14 + 3x + 9 = 0$

$3x + 7y - 5 = 0$ $C = (1, 6)$

$A = 3\ \ B = 7\ \ C = -5$ $x_0 = 1\ \ y_0 = 6$

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 7 \cdot 6 - 5|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{|3 + 42 - 5|}{\sqrt{9 + 49}} = \frac{|40|}{\sqrt{58}} = \frac{40}{\sqrt{58}} \cdot \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{58}} = \frac{40\sqrt{58}}{58} = \frac{20\sqrt{58}}{29}$$

Długość wysokości h poprowadzonej z wierzchołka C to odległość punktu C od prostej AB.
Trzeba znaleźć równanie prostej AB w postaci ogólnej i skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej.

Odpowiedź: Wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość $\frac{20\sqrt{58}}{29}$.

OKRĄG W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ – równanie okręgu o środku $S(x_0, y_0)$ i promieniu r.

ZADANIE 1

Napisz równanie okręgu, znając jego środek i promień:

a) $S = (-3, 4)$, $r = 2$

b) $S = (2, -5)$, $r = \frac{4}{3}$

c) $S = (-2, -6)$, $r = 3$

d) $S = (1, 2)$, $r = 2{,}5$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

Ad b) $(x - 2)^2 + (y + 5) = \frac{16}{9}$

Ad c) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 9$

Ad d) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$

ZADANIE 2

Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień, znając równanie okręgu:

a) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

b) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 5$

c) $(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 20$

d) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{49}{16}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $S = (1, -3)$, $r = 5$

Ad b) $S = (-2, 6)$, $r = \sqrt{5}$

Ad c) $S = (-4, -7)$, $r = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Ad d) $S = (3, 1)$, $r = \frac{7}{4}$

ZADANIE 3

Napisz równanie okręgu:

a) o promieniu 3 stycznego do obu osi układu,

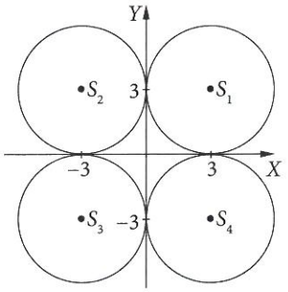
b) o środku $S = (2, -3)$ i stycznego do osi odciętych,

c) o środku $S = (-4, 5)$ i stycznego do osi rzędnych,

d) przechodzącego przez punkt $P = (8, 9)$ i stycznego do obu osi.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

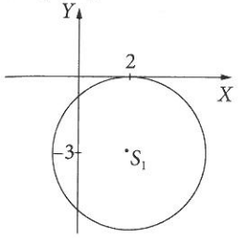


$S_1 = (3, 3)$	$r = 3$	$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
$S_2 = (-3, 3)$	$r = 3$	$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
$S_3 = (-3, -3)$	$r = 3$	$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$
$S_4 = (3, -3)$	$r = 3$	$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

Odpowiedź: Są cztery okręgi, które spełniają warunki zadania. Ich równania to:
$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 - (y - 3)^2$, $(x + 3)^2 + (y + 3) = 9$, $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Ad b)

$S = (2, -3)$

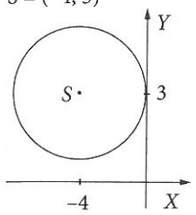


Oś odciętych to oś $0x$. Odległość punktu S od osi odciętych to 3 jednostki, więc promień okręgu ma długość 3.
$S = (2, -3)$ $r = 3$

Odpowiedź: Równanie okręgu ma postać: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Ad c)

$S = (-4, 5)$



Oś rzędnych to oś $0y$. Odległość punktu S od osi $0y$ wynosi 4, więc $r = 4$.

Odpowiedź: Równanie okręgu ma postać: $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

Ad d)

Jeżeli okrąg ma być styczny do obu osi i przechodzić przez punkt z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych, to obie współrzędne środka okręgu muszą być takie same:
$S = (a, a)$, promień okręgu ma również długość a.
Jeżeli punkt P należy do okręgu, to podstawiamy współrzędne tego punktu do równania okręgu i obliczamy a.

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ $P = (8, 9)$

$8^2 - 2 \cdot 8 \cdot a + a^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot a + a^2 = a^2$

$64 - 16a + a^2 + 81 - 18a = 0$

$a^2 - 34a + 145 = 0$

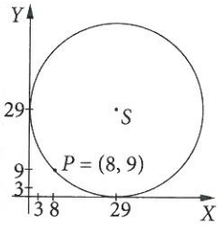
$\Delta = (-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 145 = 1156 - 580 = 576$ $\sqrt{\Delta} = 24$

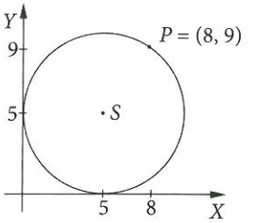
$a_1 = \frac{34 - 24}{2} = 5$ $a_2 = \frac{34 + 24}{2} = 29$

Odpowiedź: Otrzymujemy dwa okręgi o równaniach: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ oraz $(x - 29)^2 + (y - 29)^2 = 841$.

Sprawdzamy poprawność obliczeń na rysunkach:

$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ $P = (8, 9)$ $(x - 29)^2 + (y - 29)^2 = 841$ $P = (8, 9)$





ZADANIE 4

Oblicz współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 10y = -28$ **b)** $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $\quad r^2 = a^2 + b^2 - c$ $\quad S = (a, b)$

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$

$-2a = -8$ $\quad -2b = -10$ $\quad c = 28$

$a = 4$ $\quad b = 5$

$S = (4, 5)$ $\quad r^2 = 4^2 + 5^2 - 28 = 16 + 25 - 28 = 13$ $\quad r = \sqrt{13}$

Odpowiedź: Środek okręgu ma współrzędne $S = (4, 5)$, a promień równy $\sqrt{13}$.

Ad b)

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $\quad r^2 = a^2 + b^2 - c$ $\quad S = (a, b)$

$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

$-2a = -6$ $\quad -2b = 0$ $\quad c = -16$

$a = 3$ $\quad b = 0$ $\quad r^2 = 3^2 + 0^2 - (-16) = 25$ $\quad r = 5$

Odpowiedź: Środek okręgu ma współrzędne $S = (3, 0)$, a promień równy 5.

ZADANIE 5

Określ położenie prostej $6x + 8y - 15 = 0$ względem okręgu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

ROZWIĄZANIE

$S = (1, -2)$ – środek okręgu

$r = 3$ – promień

Obliczamy odległość prostej od środka okręgu.

$A = 6 \quad B = 8 \quad C = -15 \quad x_0 = 1 \quad y_0 = -2$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) - 15|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|6 - 16 - 15|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|-25|}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

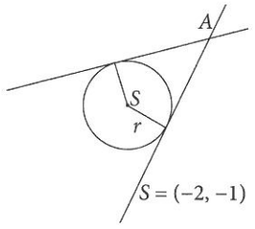
Odległość prostej od środka wynosi 2,5, a promień ma długość 3.

Odpowiedź: Prosta przecina okrąg w dwóch punktach.

ZADANIE 6

Z punktu $A = (2, 3)$ poprowadzono styczne do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$. Napisz równania stycznych.

ROZWIĄZANIE



$S = (-2, -1) \quad r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$y = ax + b$ $\quad A = (2, 3)$

Napiszmy równanie kierunkowe stycznej przechodzącej przez punkt A, a następnie skorzystajmy z odległości r prostej od środka okręgu.

$3 = a \cdot 2 + b$

$b = 3 - 2a$

$\boldsymbol{y = ax + 3 - 2a}$ – postać kierunkowa prostej.

$1 - ax + y + 2a - 3 = 0$ – postać ogólna prostej.

$A = -a \quad B = 1 \quad C = 2a - 3 \quad S = (-2, -1) \quad x_0 = -2 \quad y_0 = -1 \quad d = r = 2\sqrt{2}$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{|-a \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 2a - 3|}{\sqrt{(-a)^2 + 1}} = 2\sqrt{2}$$

$|4a - 4| = 2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + 1} \quad |()^2$

Obie strony równania są nieujemne, więc można je podnieść do kwadratu.

$(4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 4 + 16 = 4 \cdot 2\,(a^2 + 1)$

$16a^2 - 32a + 16 = 8a^2 + 8 \qquad 8a^2 - 32a + 8 = 0 \quad /:8$

$\underline{a^2 - 4a + 1 = 0}$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$a_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} = 2 - \sqrt{3} \qquad a_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$y = ax + 3 - 2a$

$y = a_1 x + 3 - 2a_1$

Otrzymamy dwie styczne.

$y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 3 - 2(2 - \sqrt{3}) \qquad y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 3 - 4 + 2\sqrt{3}$

$y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} - 1$ – jedna styczna

$y = a_2 x + 3 - 2a_2$

$y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x + 3 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right) \qquad y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x + 3 - 4 - 2\sqrt{3}$

$y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x - 2\sqrt{3} - 1$ – druga styczna

Odpowiedź: Styczne do okręgu to proste o równaniach $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} - 1$ oraz $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x - 2\sqrt{3} - 1$.

ZADANIE 7

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ prostopadłych do prostej $y = \frac{1}{2}x - 13$.

ROZWIĄZANIE

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad r^2 = a^2 + b^2 - c$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

$-2a = -2 \qquad -2b = 6$

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 5 \qquad r^2 = 1^2 + (-3)^2 - 5 = 1 = 9 - 5 = 5$

$S = (1, -3) \qquad r = \sqrt{5}$ – środek i promień okręgu

$y = ax + b$ – równanie stycznej

Współczynniki kierunkowe prostych prostopadłych są równe -2 z warunku prostopadłości prostych.

$\boldsymbol{a = -2} \qquad y = -2x + b$

$2x + y - b = 0$

$A = 2 \qquad B = 1 \qquad C = -b \qquad x_0 = 1 \qquad y_0 = -3 \qquad r = \sqrt{5}$

$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5}$ — Odległość stycznej od środka okręgu jest równa promieniowi.

$\frac{|2\cdot1+1\cdot(-3)-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ — Rozwiązujemy równanie z bezwzględną wartością.

$|-b-1|=5$

$-b-1=5$ lub $-b-1=-5$

$-b=6$ $-b=-4$

$b_1=-6$ $b_2=4$ $a=-2$ — Otrzymujemy dwie styczne.

Odpowiedź: Proste styczne mają równania $y=-2x-6$ oraz $y=-2x+4$.

ZADANIE 8

Dla jakich wartości m prosta o równaniu $x-y+m=0$ jest dla okręgu o równaniu $(x-3)^2+y^2=18$
a) styczną, **b)** sieczną, **c)** prostą zewnętrzną?

ROZWIĄZANIE

$S=(3,0)$ $r=\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot2}=3\sqrt{2}$

$x-y+m=0$ $A=1$ $B=-1$ $C=m$ — Odległość d prostej od środka okręgu jest równa promieniowi.

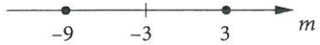
Ad a) styczna

$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=d=r$

$\frac{|1\cdot3+1(-1)\cdot0+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$ $\frac{|m+3|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ $/\cdot\sqrt{2}$

$|m+3|=3\cdot2$

$|m+3|=6$



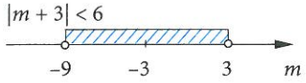
$m_1=-9$ $m_2=3$

Odpowiedź: Prosta jest styczna dla $m=-9$ lub $m=3$.

Ad b) sieczna $d<r$

$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<3\sqrt{2}$ — Aby prosta miała z okręgiem dwa punkty wspólne, odległość prostej siecznej od środka okręgu musi być mniejsza od promienia.

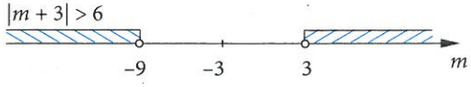
$|m+3|<6$



Odpowiedź: Prosta jest sieczną dla $m\in(-9;3)$.

Ad c) prosta zewnętrzna $d>r$

$|m+3|>6$



Odpowiedź: Prosta leży na zewnątrz okręgu, gdy $m\in(-\infty;-9)\cup(3;\infty)$.

ZADANIE 9

Oblicz długość cięciwy okręgu o równaniu $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ zawartej w prostej $7x+y-14=0$.

ROZWIĄZANIE

$\begin{cases}x^2+y^2+4x-6y-12=0\\ y=-7x+14\end{cases}$ — Obliczamy punkty wspólne okręgu i prostej. Prostą zapisujemy w postaci kierunkowej.

$x^2+(14-7x)^2+4x-6(14-7x)-12=0$

$x^2+196-196x+49x^2+4x-84+42x-12=0$

$50x^2-150x+100=0$ $/:50$

$x^2-3x+2=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1$ $\sqrt{\Delta}=1$

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ $x_2=\frac{3+1}{2}=2$

$y_1=-7x_1+14=-7\cdot1+14=-7+14=7$ $A=(1,7)$

$y_2=-7x_2+14=-7\cdot2+14=-14+14=0$ $B=(2,0)$

$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(0-7)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=5\sqrt{2}$ — Cięciwa to odcinek łączący punkty A i B. Obliczamy długość odcinka AB.

Odpowiedź: Cięciwa ma długość $5\sqrt{2}$.

ZADANIE 10

Określ wzajemne położenie okręgów: $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ i $x^2+y^2-10x-4y+28=0$.

ROZWIĄZANIE

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ $r^2=a^2+b^2-c$

$x^2+y^2-4x+4y-8=0$ $x^2+y^2-10x-4y+28=0$

$-2a=-4$ $-2b=4$ $-2a=-10$ $-2b=-4$

$a=2$ $b=-2$ $c=-8$ $a=5$ $b=2$ $c=28$

$S_1=(2,-2)$ $S_2=(5,2)$

$r_1^2=2^2+(-2)^2+8=4+4+8=16$ $r_2^2=5^2+2^2-28=25+4-28=1$

$r_1=4$ $r_2=1$

$|S_1S_2|=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ — Odległość środków okręgów jest równa sumie ich promieni.

$r_1+r_2=5$

Odpowiedź: Okręgi są zewnętrznie styczne.

ZADANIE 11

Oblicz, dla jakiej wartości m okręgi o równaniach $x^2+(y-m)^2=4$ i $x^2+y^2=9$ są styczne wewnętrznie.

ROZWIĄZANIE

$x^2+(y-m)^2=4$ $S_1=(0,m)$ $r_1=2$

$x^2+y^2=9$ $S_2=(0,0)$ $r_2=3$

$|S_1S_2| = |r_2 - r_1|$ $\sqrt{(0-0)^2+(0-m)^2} = |3-2|$

$\sqrt{m^2} = 1$ $|m| = 1$ $m = 1$ lub $m = -1$

Odpowiedź: Okręgi są styczne wewnętrznie dla $m = -1$ lub $m = 1$.

ZADANIE 12

Przedstaw w układzie współrzędnych figurę opisaną nierównością:

a) $(x+5)^2 + (y-1)^2 < 9$ **b)** $x^2 + (y-1)^2 \geq 4$.

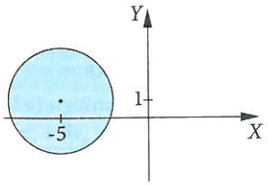
ROZWIĄZANIE

Ad a)

$(x+5)^2 + (y-1)^2 < 9$

$S = (-5, 1)$ $r = 3$

Jest to wnętrze koła.

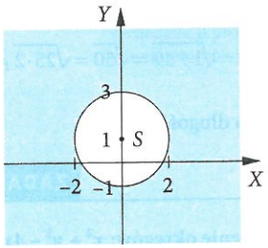


Ad b)

$x^2 + (y-1)^2 \geq 4$

$S = (0, 1)$ $r = 2$

Jest to zewnętrze koła razem z jego brzegiem.



ZADANIE 13

Narysuj w układzie współrzędnych figurę opisaną układem warunków: $\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ y \leq 2x \\ y > x \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

1) $x^2 + y^2 > 9$

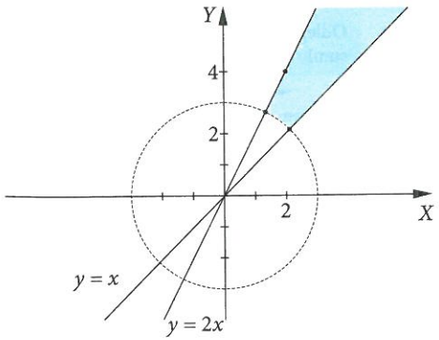
$S = (0, 0)$ $r = 3$

2) $y \leq 2x$

$A = (0, 0)$ $B = (2, 4)$

3) $y \geq x$

$A = (0, 0)$ $C = (2, 2)$



Jest to zewnętrze koła bez jego brzegu ograniczone prostymi należącymi do obszaru rozwiązania.

WIELOKĄT W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

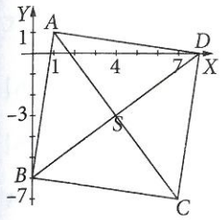
ZADANIE 1

Punkty $A = (1, 1)$ i $C = (7, -7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

a) oblicz pole i obwód kwadratu, **b)** wyznacz pozostałe wierzchołki kwadratu,

c) napisz równanie okręgu opisanego i wpisanego w kwadrat.

ROZWIĄZANIE



Ad a)

$d = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$ Obliczamy długość przekątnej kwadratu.

$d = \sqrt{(7-1)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$a\sqrt{2} = d$ Ze wzoru na przekątną kwadratu obliczamy a.

$a\sqrt{2} = 10 \quad / \cdot \sqrt{2}$

$2a = 10\sqrt{2} \quad / : 2$ $a = 5\sqrt{2}$ Obliczamy pole i obwód kwadratu.

$P = a^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$ $Ob = 4a$ $Ob = 4 \cdot 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$

Odpowiedź: Pole kwadratu wynosi 50, a obwód $20\sqrt{2}$.

Ad b)

$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{1-7}{2}\right) =$ Obliczamy współrzędne punktu S, który jest środkiem odcinka AC:

$= \left(\frac{8}{2}, \frac{-6}{2}\right) = (4, -3)$ – środek odcinka AC

$a_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-7-1}{7-1} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

$a = \frac{3}{4}$ współczynnik kierunkowy BD, $S = (4, -3)$ Szukamy równania przekątnej BD, prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez punkt S. Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC.

$y = ax + b$ $ax + b = y$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} + b = -3$ $3 + b = -3$ $b = -6$

$y = \frac{3}{4}x - 6$ – równanie przekątnej BD.

Punkty B i D należą do prostej $y=\frac{3}{4}x-6$ i należą do okręgu o środku w punkcie S i promieniu długości połowie przekątnej, czyli 5. Równanie okręgu: $(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y+3)^2=25\\ y=\frac{3}{4}x-6\end{cases}$$

$$(x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x-6+3\right)^2=25 \qquad (x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x-3\right)^2=25$$

$$x^2-2x\cdot 4+4^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}x\cdot\frac{3}{1}+3^2=25 \qquad x^2-8x+16+\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{2}x+9=25$$

$$1\frac{9}{16}x^2-8x-4\frac{1}{2}x=0 \qquad \frac{25}{16}x^2-12\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{2}x=0 \quad /\cdot 16 \qquad 25x^2-8\cdot 25x=0 \quad /:25$$

$$x^2-8x=0 \qquad x(x-8)=0$$

$x_1=0$ lub $x-8=0$, $x_2=8$

$$y_1=\frac{3}{4}x_2-6 \qquad y_2=\frac{3}{4}x_2-6$$

$$y_1=\frac{3}{4}\cdot 0-6=-6 \qquad y_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{1}-6=6-6=0$$

$B=(0,-6)$ $\qquad$ $D=(8,0)$

Odpowiedź: Współrzędne wierzchołków wynoszą: $B=(0,-6)$ i $D=(8,0)$.

Ad c)

Równanie okręgu opisanego na kwadracie: $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

Okrąg wpisany ma ten sam środek i promień równy połowie długości boku, czyli $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

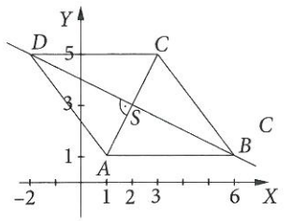
$$(x-4)^2+(y+3)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \qquad (x-4)^2+(y+3)^2=\frac{25\cdot 2}{4}$$

Odpowiedź: Równanie okręgu wpisanego w kwadrat wyraża się wzorem $(x-4)^2+(y+3)^2=\frac{25}{2}$, a opisanego $(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

ZADANIE 2

Przeciwległe wierzchołki rombu, którego pole wynosi 20, mają współrzędne $A=(1,1)$ i $C=(3,5)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D.

ROZWIĄZANIE



Przekątne w rombie są prostopadłe. Wierzchołki B i D należą do prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez punkt S.

$$S=\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1+3}{2},\frac{1+5}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)$$

Obliczamy współrzędne punktu S.

$S=(2,3)$ – środek odcinka AC.

Szukamy równania prostej prostopadłej do AC.

$$a_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{5-1}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

$a=-\frac{1}{2}$ – współczynnik kierunkowy prostej BD, $S=(2,3)$

$y=ax+b$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2+b=3 \qquad -1+b=3 \qquad b=3+1=4$$

$y=-\frac{1}{2}x+4$ – prosta, do której należą punkty B i D

$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

Obliczamy długość odcinka $|AC|$.

$$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$P=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|$

Obliczamy długość odcinka BD, korzystając ze wzoru na pole.

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot|BD|=20 \qquad \sqrt{5}|BD|=20 \quad /:\sqrt{5}$$

$$|BD|=\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$

Punkt S jest środkiem odcinka BD, więc $|BS|=|DS|=2\sqrt{5}$.

Punkty D i S należą do prostej $y=-\frac{1}{2}x+4$ oraz do okręgu o środku w punkcie S i promieniu $2\sqrt{5}$.

Równanie okręgu: $(x-2)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{5})^2$.

$$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+4\\ (x-2)^2+(y-3)^2=20\end{cases}$$

$$(x-2)^2+\left(-\frac{1}{2}x+4-3\right)^2=20 \qquad (x-2)^2+\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2=20$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+1-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=20 \qquad x^2-4x+4+1-x+\frac{1}{4}x^2-20=0$$

$$1\frac{1}{4}x^2-5x-15=0 \qquad \frac{5}{4}x^2-5x-15=0 \quad /\cdot 4 \qquad 5x^2-20x-60=0 \quad /:5$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-12)=16+48=64 \qquad \sqrt{\Delta}=8$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-8}{2\cdot 1}=\frac{-4}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+8}{2\cdot 1}=\frac{12}{2}=6$$

$$y_1=-\frac{1}{2}x_1+4=-\frac{1}{2}\cdot(-2)+4=1+4=5 \qquad y_2=-\frac{1}{2}x_2+4=-\frac{1}{2}\cdot 6+4=-3+4=1$$

$D=(-2,5)$ $\qquad$ $B=(6,1)$

Odpowiedź: Współrzędne wierzchołków rombu wynoszą: $B=(6,1)$ i $D=(-2,5)$.

ZADANIE 3

Punkty $A = (0, 4)$ i $D = (3, 5)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego ABCD. Podstawy trapezu są prostopadłe do prostej o równaniu $x - y - 6 = 0$, do której należy punkt C. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu i oblicz jego pole.

ROZWIĄZANIE

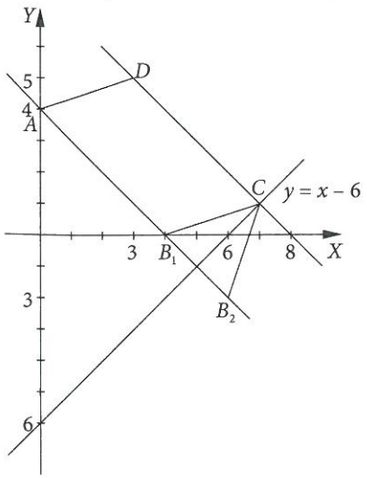
Obliczamy współrzędne punktów należących do danej prostej i wykonujemy rysunek.

$x - y - 6 = 0 \qquad 1 - y = -x + 6 \quad /\cdot(-1) \qquad y = x - 6$

x	0	6	3
y	−6	0	−3

Zapisujemy prostą w postaci kierunkowej.

dla $x = 0$: $y = 0 - 6 = -6$ dla $y = 0$: $0 = x - 6 \quad x = 6$ dla $x = 3$: $y = 3 - 6 = -3$



Bok AD nie jest prostopadły do prostej, więc jest ramieniem trapezu. Podstawy tego trapezu zawierają się w prostych prostopadłych do prostej $y = x - 6$ i przechodzą odpowiednio przez punkt A i D.

$a = -1 \quad A = (0, 4) \quad y = ax + b$

$ax + b = y$

$-1 \cdot 0 + b = 4$

$b = 4 \qquad y = -x + 4$ – równanie prostej AB

Szukamy równania prostej AB, prostopadłej do prostej $y = x - 6$.

x	0	4	2
y	4	0	2

dla $x = 0$: $y = -0 + 4 = 4$ dla $y = 0$: $0 = -x + 4 \quad x = 4$ dla $x = 2$: $y = -2 + 4 = 2$

$a = -1 \quad D = (3, 5) \quad y = ax + b$

$ax + b = y$

$-1 \cdot 3 + b = 5 \qquad b = 5 + 3 = 8$

$y = -x + 8$ – równanie prostej DC

Szukamy równania prostej DC, równoległej do prostej $y = -x + 4$.

x	0	8	4
y	8	0	4

dla $x = 0$: $y = -0 + 8 = 8$ dla $y = 0$: $0 = -x + 8 = 8 \quad x = 8$ dla $x = 4$: $y = -4 + 8 = 4$

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

Punkt C należy do prostej $y = x - 6$ oraz do prostej $y = -x + 8$. Obliczamy jego współrzędne.

$x - 6 = -x + 8$

$2x = 14 \quad /:2$

$x = 7 \qquad y = 7 - 6 = 1 \qquad C = (7, 1)$

Obliczamy współrzędne punktu B, który należy do okręgu o środku w punkcie C i promieniu AD. Obliczamy długość odcinka AD.

$|AD| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$

$r = |AD| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Równanie okręgu:

$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2 \qquad (x-7)^2 + (y-1)^2 = 10$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ (x-7)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases}$$

Punkt B należy do okręgu oraz prostej $y = -x + 4$.

$(x-7)^2 + (-x+4-1)^2 = 10 \qquad (x-7)^2 + (3-x)^2 = 10$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 10 \qquad x^2 - 14x + 49 + 9 - 6x + x^2 - 10 = 0$

$2x^2 - 20x + 48 = 0 \quad /:2$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 = 4 \qquad \sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10-2}{2 \cdot 1} = 4 \qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10+2}{2} = 6$

$y_1 = -x_1 + 4 = -4 + 4 = 0 \qquad y_2 = -x_2 + 4 = -6 + 4 = -2$

$B_1 = (4, 0) \qquad B_2 = (6, -2)$

Pole równoległoboku AB_1CD:

$P_{AB_1CD} = 2P_{\Delta ADC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} |(x_D - x_A)(y_C - y_A) - (y_D - y_A)(x_C - x_A)|$

$A = (0, 4), \; C = (7, 1), \; D = (3, 5)$

$P_{AB_1CD} = |(3-0)(1-4) - (5-4)(7-0)| = |3 \cdot (-3) - 1 \cdot 7| = |-9-7| = 16$

Pole trapezu równoramiennego AB_2CD:

$P_{\square AB_2CD} = P_{\square AB_1CD} + P_{\Delta B_1B_2C}$

$P_{\Delta B_1B_2C} = \dfrac{1}{2} |(x_{B_2} - x_{B_1})(y_C - y_{B_1}) - (y_{B_2} - y_{B_1})(x_C - x_{B_1})|$

$B_1 = (4, 0), \quad B_2 = (6, -2), \quad C = (7, 1)$

$P_{\Delta B_1B_2C} = \dfrac{1}{2} |(6-4)(1-0) - (-2-0)(7-4)| = \dfrac{1}{2} |2+6| = 4$

$P_{\square AB_2CD} = 16 + 4 = 20$

Odpowiedź:
Pole równoległoboku wynosi 16, a trapezu równoramiennego 20. Wierzchołek C ma współrzędne $C = (7, 1)$, a wierzchołek B ma współrzędne $B_1 = (4, 0)$ lub $B_2 = 6, -2)$.

JEDNOKŁADNOŚĆ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

W jednokładności i środku w początku układu współrzędnych i skali s różnej od zera każdy punkt $A = (x, y)$ jest przekształcony na punkt $A' = (sx, sy)$.

ZADANIE 1

Wyznacz obrazy punktów $A = (3, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (-2, 2)$ i $D = (3, -1)$ w jednokładności o środku w początku układu współrzędnych i skali $-\frac{2}{3}$.

ROZWIĄZANIE

$A = (3, 0)$ $\quad A' = \left(-\frac{2}{3}\cdot 3, -\frac{2}{3}\cdot 0\right) = (-2, 0)$

$B = (0, 2)$ $\quad B' = \left(-\frac{2}{3}\cdot 0, -\frac{2}{3}\cdot 2\right) = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$C = (-2, 2)$ $\quad C' = \left(-\frac{2}{3}\cdot(-2), -\frac{2}{3}\cdot 2\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$D = (3, -1)$ $\quad D' = \left(-\frac{2}{3}\cdot 3, -\frac{2}{3}\cdot(-1)\right) = \left(-2, \frac{2}{3}\right)$

ZADANIE 2

Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty: $A = (-4, -2)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-2, 3)$. Narysuj obraz tego trójkąta w jednokładności o środku w punkcie $0 = (0, 0)$ i skali $-\frac{3}{2}$. Oblicz pola obu trójkątów.

ROZWIĄZANIE

$A = (-4, -2)$ $\quad A' = \left(-\frac{3}{2}\cdot(-4), -\frac{3}{2}\cdot(-2)\right) = (6, 3)$

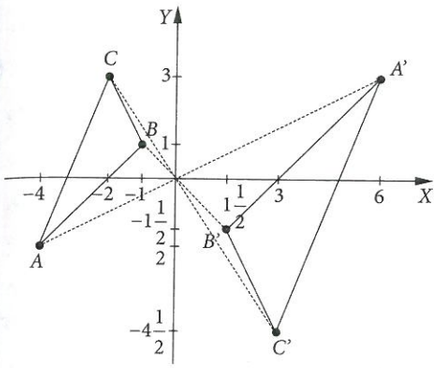
$B = (-1, 1)$ $\quad B' = \left(-\frac{3}{2}\cdot(-1), -\frac{3}{2}\cdot 1\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$

$C = (-2, 3)$ $\quad C' = \left(-\frac{3}{2}\cdot(-2), -\frac{3}{2}\cdot 3\right) = \left(3, -\frac{9}{2}\right) = \left(3, -4\frac{1}{2}\right)$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-1+4)(3+2) - (1+2)(-2+4)\right| = \frac{1}{2}\left|3\cdot 5 - 3\cdot 2\right| = \frac{1}{2}\left|15-6\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{1} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$P_{\triangle A'B'C'} = s^2 \cdot P_{\triangle ABC} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4}\cdot\frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$$



Pole trójkąta ABC obliczamy ze wzoru na pole, gdy znamy wierzchołki trójkąta. Figury jednokładne są podobne, więc pole obrazu figury to pole trójkąta pomnożone przez kwadrat skali.

Odpowiedź: Pole trójkąta ABC wynosi $4\frac{1}{2}$, a jego obraz $20\frac{1}{4}$.

ZADANIE 3

Obrazem punktu $A = (-1, 3)$ w jednokładności o środku $O = (0, 0)$ jest punkt $A' = (2, -6)$. Oblicz skalę jednokładności.

ROZWIĄZANIE

$A = (-1, 3)$ $\quad A' = (2, -6)$

$A' = (s \cdot x_A,\ s \cdot y_A)$

$s \cdot (-1) = 2$ $\quad -s = 2$ $\quad \underline{s = -2}$

$s \cdot y_A = -2 \cdot 3 = -6$ $\quad y_{A'} = -6$

Obliczamy skalę s, porównując pierwsze współrzędne, i sprawdzamy poprawność drugich współrzędnych.

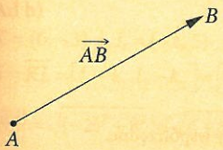
Odpowiedź: Skala jednokładności wynosi -2.

WEKTORY

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Wektor to uporządkowana para punktów, z których pierwszy jest początkiem wektora, a drugi końcem. Każdy wektor posiada kierunek, zwrot i długość.

Np.



A – początek wektora
B – koniec wektora
$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ – oznaczenia wektora
kierunek prostej AB, zwrot od A do B oraz długość wektora to odległość od punktu A do B.

Gdy $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne: $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Wektory możemy dodawać i odejmować oraz mnożyć wektor przez liczbę. Jeśli dane są wektory: $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to $\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$, $\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2]$

Jeśli a jest liczbą, to $a \cdot \vec{u} = [au_1, au_2]$.

Jeżeli znamy współrzędne wektora, to możemy takich wektorów narysować nieskończenie wiele. Jest to **wektor swobodny**.

Wektor $\overrightarrow{BA}$ jest przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$ – ma taki sam kierunek i długość, ale przeciwny zwrot.

Długość wektora obliczamy tak samo, jak odległość dwóch punktów, jak długość odcinka:

$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Gdy $\vec{u} = [u_1, u_2]$, to $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

ZADANIE 1

Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, mając dane $A = (7, 16)$ i $B = (-5, 12)$.

ROZWIĄZANIE

$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [-5-7, 12-16] = [-12, -4]$

Odpowiedź: $\overrightarrow{AB} = [-12, -4]$.

ZADANIE 2

Wyznacz współrzędne końca wektora, mając dane współrzędne wektora i jego początku:

$\overrightarrow{AB} = [-7, 17]$ i $A = (4, -8)$.

ROZWIĄZANIE

$B = ?$ $[b_1 - a_1, b_2 - a_2] = \overrightarrow{AB}$

$[b_1 - 4, b_2 + 8] = [-7, 17]$

Przyrównujemy pierwsze i drugie współrzędne.

$b_1 - 4 = -7$ i $b_2 + 8 = 17$

$b_1 = -3$ $b_2 = 9$

$B = [-3, 9]$

Odpowiedź: Koniec wektora ma współrzędne $B = [-3, 9]$.

ZADANIE 3

Wyznacz współrzędne początku wektora, znając współrzędne wektora i jego końca:

$\overrightarrow{CD} = [-6, 1]$ $D = (11, -10)$.

ROZWIĄZANIE

$C = ?$ $[d_1 - c_1, d_2 - c_2] = \overrightarrow{CD}$

$[11 - c_1, -10 - c_2] = [-6, 1]$

Porównujemy współrzędne.

$11 - c_1 = -6$ i $-10 - c_2 = 1$

$-c_1 = -6 - 11$ $-c_2 = 1 + 10$

$-c_1 = -17$ $-c_2 = 11$

$c_1 = 17$ $c_2 = -11$

$C = (17, -11)$

Odpowiedź: Początek wektora ma współrzędne $C = (17, -11)$.

ZADANIE 4

Dane są wektory: $\vec{a} = [-2, 1]$, $\vec{b} = [3, -2]$ i $\vec{c} = [-1, -2]$. Oblicz:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{b} - \vec{c}$ **c)** $3\vec{c}$ **d)** $4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 5\vec{c}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ $\vec{a} + \vec{b} = [-2+3, 1-2] = [1, -1]$

Aby dodać wektory, dodajemy ich współrzędne.

Ad b)

$\vec{b} - \vec{c} = [b_1 - c_1, b_2 - c_2]$ $\vec{b} - \vec{c} = [3+1, -2+2] = [4, 0]$

Odejmując wektory, odejmujemy ich współrzędne.

Ad c)

$k\vec{c} = k \cdot [c_1, c_2] = [kc_1, kc_2]$

$3\vec{c} = 3 \cdot [-1, -2] = [3 \cdot (-1), 3 \cdot (-2)] = [-3, -6]$

Mnożąc wektor przez liczbę, mnożymy każdą współrzędną przez tą liczbę.

Ad d)

$$4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 5\vec{c} = 4[-2, 1] - \frac{1}{2}[3, -2] + 5[-1, -2] = [4 \cdot (-2), 4 \cdot 1] - \left[\frac{1}{2} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot (-2)\right] + [5 \cdot (-1), 5 \cdot (-2)] =$$

$$= [-8, 4] - \left[1\frac{1}{2}, -1\right] + [-5, -10] = \left[-8 - 1\frac{1}{2} - 5, 4 + 1 - 10\right] = \left[-14\frac{1}{2}, -5\right]$$

Odpowiedź: Suma wektorów to wektor o współrzędnych [1, –1], różnica [4, 0], potrojona wartość wektora $\vec{c}$, to [4, 0], a wynikiem działania jest wektor $\left[-14\frac{1}{2}, -5\right]$.

ZADANIE 5

Oblicz długość wektora: **a)** $\vec{a}$, gdy $\vec{a} = [-3, -4]$ **b)** $\overrightarrow{KL}$, gdy $K = (0, -3)$ i $L = (-2, 5)$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Ad b)

$K = (0, -3)$ i $L = (-2, 5)$

$\vec{a} = \overrightarrow{KL} = [l_1 - k_1, l_2 - k_2] = [-2 - 0, 5 + 3] = [-2, 8]$

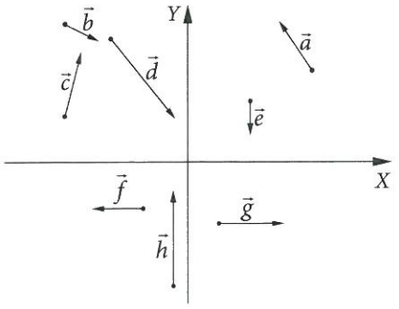
$|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}$

Odpowiedź: Długości wektorów wynoszą odpowiednio 5 i $2\sqrt{17}$.

ZADANIE 6

Narysuj w układzie współrzędnych wektory: $\vec{a} = [-2, 3]$, $\vec{b} = [2, 1]$, $\vec{c} = [1, 4]$, $\vec{d} = [-4, -5]$, $\vec{e} = [0, -2]$, $\vec{f} = [-3, 0]$, $\vec{g} = [4, 0]$, $\vec{h} = [0, 6]$.

ROZWIĄZANIE

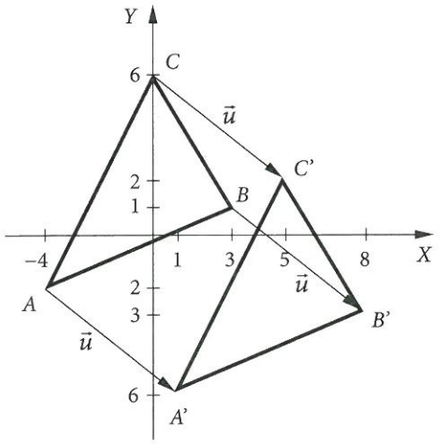


Gdy mamy podane współrzędne wektora, to możemy w układzie współrzędnych narysować takich wektorów nieskończenie wiele. Sami wybieramy punkt, który jest początkiem wektora. Początek wektora przesuwamy w lewo lub w prawo zgodnie z pierwszą współrzędną i w górę lub w dół w zależności od wartości drugiej współrzędnej.

ZADANIE 7

Przesuń trójkąt o wierzchołkach $A = (-4, -2)$, $B = (3, 1)$ i $C = (0, 6)$ o wektor $\vec{u} = [5, -4]$. Podaj współrzędne wierzchołków otrzymanego trójkąta.

ROZWIĄZANIE



Współrzędne punktów po przecięciu obliczamy, dodając współrzędne wektora.

$A = (-4, -2)$ $\quad \vec{u} = [5, -4]$
$A' = (-4 + 5, -2 - 4) = (1, -6)$
$B = (3, 1)$
$B' = (3 + 5, 1 - 4) = (8, -3)$
$C = (0, 6)$
$C' = (0 + 5, 6 - 4) = (5, 2)$

Odpowiedź: Wierzchołki trójkąta po przecięciu mają współrzędne: $A' = (1, -6)$, $B' = (8, -3)$ i $C' = (5, 2)$.

ZADANIE 8

Odcinek AB, gdzie $A = (-3, 2)$ i $B = (2, 1)$, przesunięto o wektor $\vec{u}$ i otrzymano odcinek $A'B'$, w którym $A' = (1, -1)$, a $B' = (6, 2)$. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$.

ROZWIĄZANIE

$A = (-3, 2)$ $\quad \vec{u} = [u_1, u_2]$ $\quad A' = (1, -1)$
$A' = (-3 + u_1, 2 + u_2) = (1, -1)$
$-3 + u_1 = 1$ $\qquad$ i $\qquad 2 + u_2 = -1$
$u_1 = 4$ $\qquad\qquad\qquad u_2 = -3$
$\vec{u} = [4, -3]$

Porównujemy współrzędne.

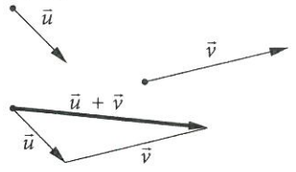
Odpowiedź: Współrzędne wektora wynoszą: $\vec{u} = [4, -3]$.

ZADANIE 9

Mając dane na płaszczyźnie dwa dowolne wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, znajdź ich sumę, obie różnice oraz $3\vec{u}$ i $-2\vec{v}$.

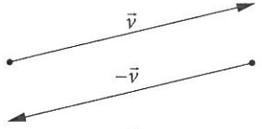
ROZWIĄZANIE

Dane:

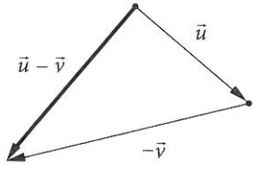


Do końca wektora $\vec{u}$ doczepiamy $\vec{v}$ i wektor o początku wektora $\vec{u}$ i końcu wektora $\vec{v}$ jest sumą tych wektorów.

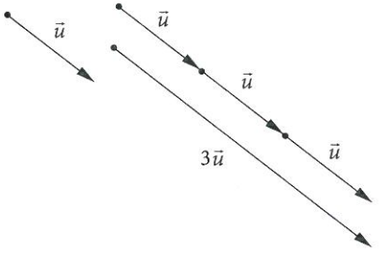
$\vec{u} - \vec{v}$:



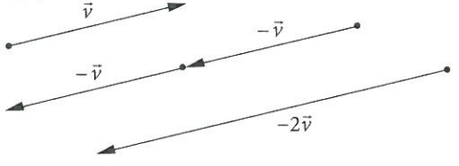
Odjąć wektor to znaczy dodać wektor przeciwny.



$3\vec{u}$:



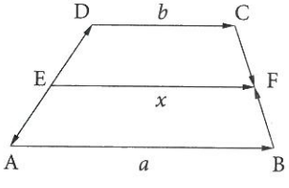
$-2\vec{v}$:



ZADANIE 10

Udowodnij, że długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest połową sumy długości jego podstaw.

ROZWIĄZANIE



Oznaczamy wierzchołki trapezu oraz punkty E i F. Korzystamy z działań na wektorach, wyznaczając wektor $\overrightarrow{EF}$ jako sumy wektorów.

Mamy udowodnić, że: $x=\frac{a+b}{2}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$ i $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED}$ i $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF}$

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CF}\\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\end{cases}$

$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC} \quad /:2$

$\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$

$\overrightarrow{EF}=\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|}{2}$

$x=\frac{a+b}{2}$

Odpowiedź: Długość łączącego środki ramion trapezu jest połową długości sumy jego podstaw.

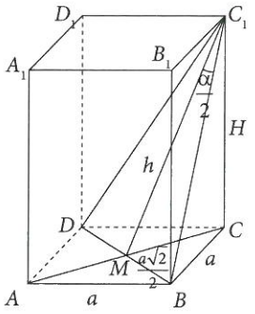
STEREOMETRIA

GRANIASTOSŁUPY

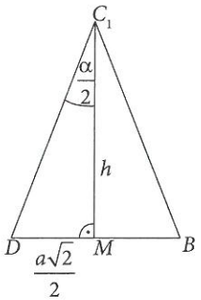
ZADANIE 1

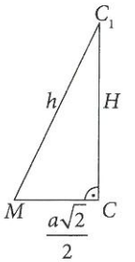
W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez przekątną podstawy dolnej i jeden z wierzchołków podstawy górnej. W przekroju otrzymano trójkąt równoramienny o polu S i kącie między ramionami o mierze α. Oblicz objętość prostopadłościanu.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.





Dane:
S – pole trójkąta
α – kąt między ramionami
Obliczyć:
$V=?$
$a=?,\ H=?$

1) $\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot h=S$

$\sqrt{2}ah=2S \quad /\cdot\sqrt{2}$

$ah=\sqrt{2}S$

$\frac{\sqrt{2}ah}{2}=S \quad /\cdot 2$

$2ah=2\sqrt{2}S \quad /:2$

2) $\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{h}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \frac{a\sqrt{2}}{2h}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad /:2h$

$a\sqrt{2}=2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad /\cdot\sqrt{2}$ $\qquad 2a=2\sqrt{2}h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad /:2$

$a=\sqrt{2}h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, wyznaczamy a i h, a po ich wyznaczeniu z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy H.

$\sqrt{2}h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot h=\sqrt{2}S \quad /:\sqrt{2}$ $\qquad h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=S \quad /:\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$h^2=\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad h=\sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$

Podstawiamy do 1).

$a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2S\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$

Zapisujemy wszystko pod jednym pierwiastkiem.

$a=\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=h^2$

Obliczamy H z tw. Pitagorasa.

$H^2=h^2-\frac{2a^2}{4}=h^2-\frac{a^2}{2}=\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 2S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{S-S\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{S\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$H=\sqrt{\frac{S\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$

$V=a^2H$

Obliczamy objętość.

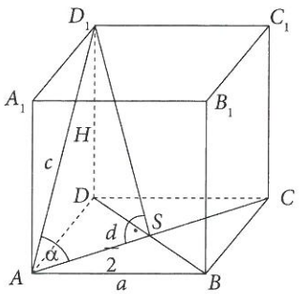
$V=2S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{S\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=2S\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot S\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=2S\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}$

Odpowiedź: Objętość prostopadłościanu wynosi $2S\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

ZADANIE 2

W czworokątnym graniastosłupie prawidłowym przekątna podstawy ma długość d i tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącej z tego samego wierzchołka kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$\cos\alpha=\frac{\frac{d}{2}}{c}=\frac{d}{2c}$ $\qquad c=\frac{d}{2\cos\alpha}$

Trójkąt ASD_1 jest prostokątny. Znajdujemy cosinus danego kąta i długość przekątnej c.

$d=a\sqrt{2}$ $\qquad a=\frac{d}{\sqrt{2}}$

Korzystając ze wzoru na długość przekątnej podstawy i wyznaczamy a.

$H^2+a^2=c^2$

$H^2=c^2-a^2=\frac{d^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{d^2}{2}=d^2\cdot\left(\frac{1}{4\cdot\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}\right)$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ADD_1.

$H=d\cdot\sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}}$

$V=a^2\cdot H=\frac{1}{2}d^3\cdot\sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}}$

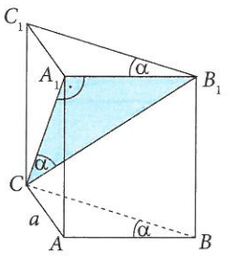
Obliczamy objętość bryły.

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa wynosi $V=\frac{1}{2}d^3\cdot\sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}}$.

ZADANIE 3

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α i boku długości a leżącym naprzeciw tego kąta. Przekątne ścian bocznych wychodzące z wierzchołka drugiego kąta ostrego podstawy tworzą również kąt α. Oblicz objętość graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{AB}$ $\qquad AB=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Obliczamy długość boku AB trójkąta w podstawie graniastosłupa.

$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{A_1C}{A_1B_1}$ $\qquad A_1C=\frac{A_1B_1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\qquad A_1C=\frac{a}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

Trójkąt zacieniowany jest prostokątny, boki $AB=A_1B_1$, zatem:

$AC^2 + AA_1^2 = A_1C^2 \qquad AA_1^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^4\alpha} - a^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć długość wysokości graniastosłupa.

$AA_1 = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^4\alpha} - 1}$

$V = \frac{1}{2}a^3 \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\alpha}}{\operatorname{tg}^3\alpha}$

Obliczamy objętość graniastosłupa.

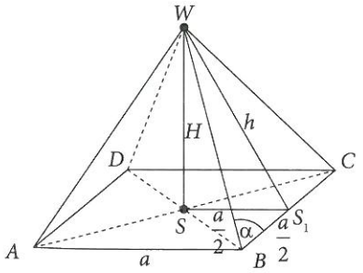
Odpowiedź: Objętość graniastosłupa wynosi $V = \frac{1}{2}a^3 \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4\alpha}}{\operatorname{tg}^3\alpha}$.

OSTROSŁUPY

ZADANIE 1

W ostrosłupie prawidłowym o podstawie kwadratowej krawędź podstawy ma długość a, zaś kąt nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy wychodzącej z tego samego wierzchołka jest równy α. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

W trójkącie BS_1W mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} \qquad h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, należy wyznaczyć wysokość ściany bocznej.

$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha =$

$= a^2 + a^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = a^2(1 + \operatorname{tg}\alpha)$

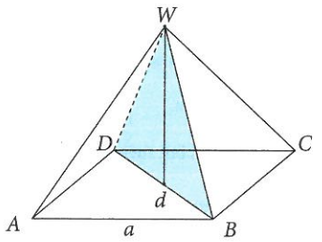
Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Odpowiedź: Pole całkowite wynosi $a^2(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

ZADANIE 2

Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek jest trójkątem równobocznym o polu S. Oblicz objętość ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$S = \frac{d^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \qquad d = 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego i obliczamy długość jego boku d.

$H = \frac{d \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{S\sqrt{3}}$

Wysokość ostrosłupa jest wysokością danego trójkąta równobocznego.

$P_p = a^2 \qquad d = a\sqrt{2} \qquad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

$P_p = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$

Wyznaczamy pole podstawy.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot \sqrt{S\sqrt{3}} = \frac{2S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}$

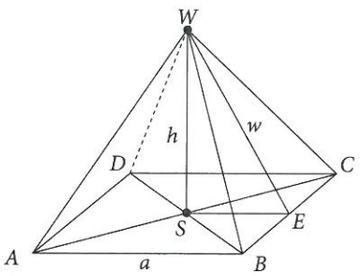
Obliczamy objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{2S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}$.

ZADANIE 3

Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d, zaś stosunek długości krawędzi bocznej ostrosłupa do krawędzi podstawy jest równy 5 : 1. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$d = a\sqrt{2} \qquad a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Oznaczamy długość boku podstawy AB literą a. Długość krawędzi bocznej, np. BW, to $5a$. Ze wzoru na długość przekątnej kwadratu obliczamy a.

$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (5a)^2$

$h^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{25d^2}{2} \qquad h^2 = \frac{50d^2}{4} - \frac{d^2}{4}$

Wysokość ostrosłupa obliczamy, stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SBW.

$h = \frac{7}{2}d$

$$w^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}d^2 + \frac{d^2}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{99}{8}d^2 \qquad w = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}d$$

Do obliczenia pola powierzchni bocznej będziemy potrzebowali długości wysokości ściany bocznej w; obliczamy ją, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie SEW.

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\cdot\frac{d^2}{2}\cdot\frac{7}{2}d = \frac{7d^3}{12}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$P_b = 4\cdot\frac{aw}{2} = 2aw = 2\cdot\frac{d}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}d = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$$

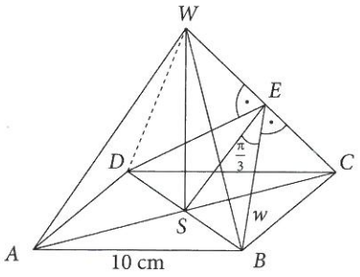
Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{7d^3}{12}$, a pole jego powierzchni bocznej $\frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$.

ZADANIE 4

Bok podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego ma długość 10 cm. Kąt między ścianami bocznymi ma miarę $\frac{2\pi}{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

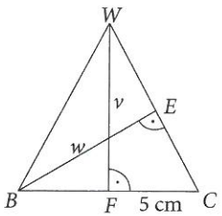
ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym kąt $\sphericalangle BED$ (między wysokościami BE i DE ścian bocznych BCW i DCW) jest kątem między ścianami bocznymi.

$$\frac{SB}{w} = \sin\frac{\pi}{3}, \qquad w = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Wysokość ściany bocznej w obliczamy jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego BES, w którym znamy kąt przy wierzchołku E oraz przeciwległą przeciwprostokątną (jest nią połowa przekątnej podstawy).



Aby obliczyć pole ściany bocznej, która jest trójkątem równoramiennym o podstawie 10 cm, wyznaczamy wysokość $v = WF$ (patrz rysunek obok).

$$\frac{v}{FC} = \frac{WF}{FC} = \frac{BE}{EC} = \frac{w}{EC} \qquad v = \frac{FC\cdot w}{EC} = \frac{5w}{EC}$$

Dla obliczenia wysokości v wykorzystamy podobieństwo trójkątów WFC i BEC.

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = 10^2 - w^2 =$$

$$= 100 - \left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3} \qquad EC = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Długość odcinka EC obliczamy na podstawie twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BCE.

$$v = \frac{5w}{EC} = 5w\cdot\frac{1}{EC} = 5\cdot\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{10} = 5\sqrt{2}$$

Obliczamy wysokość v.

$$P_b = 4\cdot\frac{BC\cdot v}{2} = 2\cdot BC\cdot v = 2\cdot 10\cdot 5\sqrt{2} = 100\sqrt{2}$$

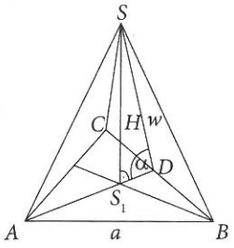
Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi $100\sqrt{2}$ cm^2.

ZADANIE 5

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości H każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy ostrosłupa kąt α. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym kąt α jest kątem nachylenia ściany bocznej do podstawy.

$$w = \frac{H}{\sin\alpha}, \qquad S_1D = H\cdot\operatorname{tg}^{-1}\alpha$$

Z trójkąta prostokątnego SS_1D obliczymy wysokość w ściany bocznej oraz długość odcinka S_1D będącego trzecią częścią wysokości trójkąta równobocznego leżącego w podstawie ostrosłupa.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{6S_1D}{\sqrt{3}} = \frac{6H}{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

Obliczamy długość boku podstawy, znając trzecią część wysokości podstawy.

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{36H^2\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{H}{4} = \frac{H^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{aw}{2} = \frac{36H^2}{3\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cdot 6H}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{H}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3H^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{9H^2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3H^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{3H^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}H^2}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

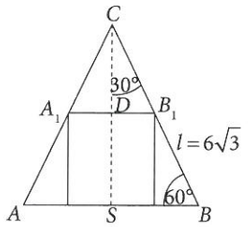
Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{H^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, a pole powierzchni całkowitej $\frac{3H^2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)$.

BRYŁY OBROTOWE

ZADANIE 1

W stożek, którego tworząca ma długość $6\sqrt{3}$ cm, a jego kąt rozwarcia ma miarę 60°, wpisano walec. Wysokość walca ma trzykrotnie większą długość niż jego promień podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek, na którym przedstawiamy przekrój osiowy stożka z wpisanym walcem.

$\sin 60^\circ = \frac{CS}{CB} = \frac{3r + r\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$ — Rozważamy trójkąt SBC.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3r + r\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \quad r \cdot (6 + 2\sqrt{3}) = 18$

$r = \frac{9}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3(3 - \sqrt{3})}{2}$

$P_b = 6\pi r^2 = \frac{27\pi(3 - \sqrt{3})^2}{2}$ — Obliczamy pole powierzchni bocznej walca.

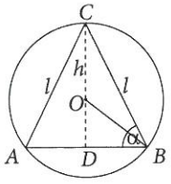
$V_w = 3\pi r^3 = \frac{81\pi(3 - \sqrt{3})^3}{8}$ — Obliczamy objętość walca.

Odpowiedź: Pole boczne walca wynosi $\frac{27\pi(3 - \sqrt{3})^2}{2}\text{cm}^2$, a objętość $\frac{81\pi(3 - \sqrt{3})^3}{8}\text{cm}^3$.

ZADANIE 2

W stożku kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy ma miarę α. Na stożku opisano kulę o promieniu *R*. Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ROZWIĄZANIE



Sporządzamy pomocniczy rysunek.

$\frac{l}{\sin\alpha} = 2R \quad l = 2R\sin\alpha$ — Do obliczenia tworzącej stosujemy twierdzenie sinusów.

$\sin\alpha = \frac{h}{l} \quad h = l \cdot \sin\alpha$ — W trójkącie ADC mamy:

$h = 2R \cdot \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{r}{l} \quad r = l \cdot \cos\alpha$

$r = 2R \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2R\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha$ — Obliczamy objętość stożka.

$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi R^2 \sin^2 2\alpha + \pi R \sin 2\alpha \cdot 2R\sin\alpha =$ — Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka.

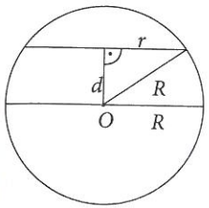
$= \pi R^2 \sin 2\alpha(\sin 2\alpha + 2\sin\alpha)$

Odpowiedź: $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2\alpha$, $P_c = \pi R^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sin 2\alpha + 2\sin\alpha)$.

ZADANIE 3

Oblicz długość przekroju sfery o promieniu *R*, oddalonego od środka sfery o *d*, gdzie $d < R$.

ROZWIĄZANIE



R – promień sfery
d – odległość przekroju od środka sfery
r – promień okręgu będącego przekrojem sfery.

$r^2 = d^2 = R^2$
$r^2 = R^2 - d^2$ — Korzystamy z tw. Pitagorasa.

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$L = 2\pi r$ — Długość okręgu.

$L = 2\pi\sqrt{R^2 - d^2}$

Odpowiedź: Długość okręgu będącego przekrojem sfery o promieniu R wynosi $2\pi\sqrt{R^2 - d^2}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

ELEMENTY KOMBINATORYKI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Zadania z kombinatoryki możemy rozwiązywać bez używania wzorów, jednak w bardziej skomplikowanych przypadkach są one bardzo użyteczne.

Permutacje
Liczba wszystkich permutacji bez powtórzeń zbioru n elementowego jest równa:

$$P_n = n!$$

Pojęcie n! (en silnia): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n$

Liczba wszystkich permutacji z powtórzeniami zbioru n elementowego jest równa:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k}$$

Wariacje
Liczba k wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n elementowego jest równa:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Liczba k wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n elementowego jest równa:

$$W_n^k = n^k$$

Wariacje stosujemy, gdy tworzymy ciągi elementów ze zbioru n elementowego. Stąd w wariacjach ważna jest kolejność elementów.

Kombinacje
Liczba k wyrazowych kombinacji zbioru n elementowego jest równa:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(c-k)!}$$

W kombinacjach nie jest ważna kolejność elementów. $\binom{n}{k}$ – czytamy „n po k”.

ZADANIE 1

Na ile różnych sposobów można ustawić w szeregu 6 osób?

ROZWIĄZANIE

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Odpowiedź: Sześć osób można ustawić w szeregu na 720 sposobów.

Pierwszą osobę można ustawić na 6 sposobów, drugą na 5 itd., czyli jest to permutacja bez powtórzeń.

ZADANIE 2

W urnie jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy kolejno bez zwracania wszystkie kule i zapisujemy ich numery w kolejności losowania. Ile otrzymamy liczb większych od 20000, ale mniejszych od 40000?

ROZWIĄZANIE

$2P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$

Liczby muszą się zaczynać cyfrą 2 lub 3, więc na pierwszym miejscu mamy 2 możliwości. Na pozostałych 4 miejscach układ może być dowolny, więc jest to czteroelementowa permutacja bez powtórzeń.

Odpowiedź: Otrzymamy 48 liczb.

ZADANIE 3

Ile różnych słów mających sens lub nie możemy utworzyć z liter wyrazu MATEMATYKA?

ROZWIĄZANIE

$n = 10$ – liczba wszystkich liter
$n_1 = 2$ – liczba powtórzeń litery M
$n_2 = 3$ – liczba powtórzeń litery A
$n_3 = 2$ – liczba powtórzeń litery T

Gdyby się one nie powtarzały, można by utworzyć 10! słów, ale litery się powtarzają, więc jest to permutacja z powtórzeniami.

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 30 \cdot 56 \cdot 90 = 2700 \cdot 56 = 151200$$

Odpowiedź: Z liter wyrazu MATEMATYKA możemy utworzyć 151200 wyrazów.

ZADANIE 4

W plebiscycie Przeglądu Sportowego na dziesięciu najlepszych sportowców zgłoszono 17 kandydatów. Wygrał Ryszard Szurkowski. Ile istniało sposobów przyznania dalszych miejsc, wykluczając możliwość zdobycia tego samego miejsca przez więcej niż jednego zawodnika?

ROZWIĄZANIE

16 zawodników i 9 miejsc

Tworzymy dziewięcioosobowe ciągi ze zbioru 16 zawodników – jest to wariacja bez powtórzeń.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_{16}^9 = \frac{16!}{(16-9)!} = \frac{16!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{7!} = 4151347200$$

Odpowiedź: Istniało 4151347200 sposobów dalszych miejsc.

ZADANIE 5

Ze zbioru cyfr losujemy kolejno bez zwracania 4 z nich i zapisujemy powstałe liczby czterocyfrowe. Ile takich liczb możemy otrzymać?

ROZWIĄZANIE

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – zbiór 10 cyfr

Na pierwszym miejscu nie może stać zero, a na pozostałych miejscach dowolne 3, z wyjątkiem cyfry stojącej na pierwszym miejscu.

$$9\cdot V_9^3 = 9\cdot\frac{9!}{(9-3)!} = 9\cdot\frac{9!}{6!} = 9\cdot\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6!} = 63\cdot 72 = 4536$$

Odpowiedź: Możemy otrzymać 4536 liczb czterocyfrowych.

ZADANIE 6

Każdej z dziesięciu osób przyporządkowujemy:

a) miesiąc jej urodzin

b) dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest takich przyporządkowań?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

Każda z 10 osób mogła się urodzić w dowolnym z 12 miesięcy. Jest to 10 elementowa wariacja z powtórzeniami zbioru 12 elementowego.

$$W_n^k = n^k$$

$$W_{12}^{10} = 12^{10}$$

Odpowiedź: Jest 12^{12} przyporządkowań miesiąca urodzin.

Ad b)

Jest to 10 elementowa wariacja z powtórzeniami zbioru 7 elementowego.

$$W_n^k = n^k$$

$$W_7^{10} = 7^{10}$$

Odpowiedź: Jest 7^{10} przyporządkowań dnia tygodnia urodzin.

ZADANIE 7

Z klasy, w której jest 17 dziewczynek i 14 chłopców, wybieramy trzyosobową delegację. Na ile sposobów możemy ją wybrać, by w składzie delegacji:

a) był jeden chłopiec **b)** była grupa mieszana **c)** były dowolne 3 osoby?

ROZWIĄZANIE

Ad a)

1 chłopiec i 2 dziewczynki $C_{14}^1\cdot C_{17}^2$

Są to kombinacje. Wybieramy 1 chłopca z 14 i 2 dziewczynki z 17.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{14}^1\cdot C_{17}^2 = \binom{14}{1}\cdot\binom{17}{2} = \frac{14!}{1!(14-1)!}\cdot\frac{17!}{2!(17-2)!} = \frac{14!}{13!}\cdot\frac{17!}{2!\cdot 15!} = \frac{13!\cdot 14}{13!}\cdot\frac{15!\cdot 16!\cdot 17}{2\cdot 15!} = 14\cdot 8\cdot 17 = 1904$$

Odpowiedź: Delegację można wybrać na 1904 sposoby.

Ad b)

1 chłopiec i 2 dziewczynki lub 1 dziewczynka i 2 chłopców

Jeżeli delegacja ma być mieszana, to w jej skład muszą wchodzić chłopcy i dziewczynki – 1d i 2ch lub 2d i 1ch.

Korzystamy z faktu, że $\binom{n}{1} = n$ oraz z obliczeń w punkcie a).

$$C_{14}^1\cdot C_{17}^2 + C_{14}^2 + C_{17}^1 = 1904 + \frac{14!}{2!(14-2)!}\cdot 17 =$$

$$= 1904 + \frac{14!}{2!\cdot 12!}\cdot 17 = = 1904 + \frac{12!\cdot 13\cdot 14}{2\cdot 12!}\cdot 17 =$$

$$= 1904 + 13\cdot 7\cdot 17 = 1904 + 1547 = 3451$$

Odpowiedź: Delegację możemy wybrać na 3451 sposobów.

Ad c)

17 + 14 = 31 3 osoby z 31

$$C_{31}^3 = \binom{31}{3} = \frac{31!}{3!(31-3)!} = \frac{31!}{3!28!} = \frac{28!\cdot 29\cdot 30\cdot 31}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 28!} = 29\cdot 5\cdot 31 = 4495$$

Odpowiedź: Delegację można wybrać na 4495 sposobów.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Obliczając prawdopodobieństwo, korzystamy ze znanej klasycznej definicji prawdopodobieństwa oraz korzystamy ze wzorów kombinatorycznych.
Możemy również skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe oraz całkowite.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych Ω, zdarzenia A i B, które zawierają się w zbiorze zdarzeń elementarnych oraz $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B, nazywamy liczbę:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

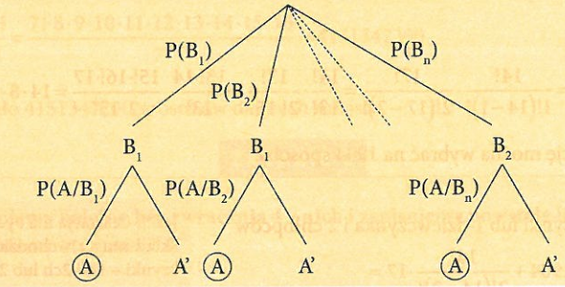
Wzór na prawdopodobieństwo całkowite stosujemy, gdy mamy doświadczenie wieloetapowe, w którym od wyników wcześniejszych etapów zależy nasze działanie w kolejnym etapie.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączone i ich suma obejmuje cały zbiór zdarzeń elementarnych Ω oraz prawdopodobieństwa wszystkich tych zdarzeń są większe od zera, to dla każdego zdarzenia A zawarto go w zbiorze zdarzeń elementarnych:

$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A/B_n) \cdot P(B_n)$

Twierdzenie to najczęściej dużo prościej jest ilustrowane za pomocą drzewka.



ZADANIE 1

Ze zbioru $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy kolejno bez zwracania trzy cyfry i układamy z nich, w kolejności losowania, liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że tak wylosowana liczba jest parzysta.

ROZWIĄZANIE

Ω – zbiór wszystkich liczb trzycyfrowych.

Kolejność losowanych elementów odgrywa rolę.

$|\Omega| = V_8^3 - V_7^2 = 294$

Obliczamy moc Ω przy pomocy wariacji bez powtórzeń, pamiętając o tym, by na pierwszym miejscu nie znalazło się zero.

A – zbiór liczb trzycyfrowych parzystych.

Obliczamy zdarzenie losowe A.

$|A| = V_7^2 + 3 \cdot V_6^2 + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 7 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 5 + 18 =$

$= 42 + 180 + 18 = 240$

Obliczamy ilość elementów zdarzenia A.

$P(A) = \frac{240}{294} = \frac{40}{49}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest parzysta, wynosi $\frac{40}{49}$.

ZADANIE 2

Z klasy, w której jest 13 chłopców i 7 dziewczyn, wybrano trzyosobową delegację. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w jej skład wejdzie jeden chłopiec i dwie dziewczyny?

ROZWIĄZANIE

Ω to zbiór wszystkich trzyosobowych delegacji.

W opisanym losowaniu kolejność nie odgrywa roli.

$|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$

Obliczamy ilość elementów zbioru Ω, stosując wzór na liczbę kombinacji.

A to zbiór trzyosobowych delegacji, w których występuje jeden chłopiec i dwie dziewczynki.

Opisujemy zdarzenie losowe A.

$|A| = C_{13}^1 \cdot C_7^2 = 273$

Obliczamy ilość elementów zdarzenia A.

$P(A) = \frac{273}{1140} \approx 0{,}239$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że w skład delegacji wejdzie jeden chłopiec i dwie dziewczyny, wynosi 0,239.

ZADANIE 3

Sześciu pasażerów wsiada do tramwaju złożonego z trzech wagonów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu?

ROZWIĄZANIE

Ω to zbiór wszystkich sześciowyrazowych ciągów, których wyrazami są wagony.

Opisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

$|\Omega| = W_3^6 = 3^6 = 729$

Obliczamy Ω, stosując wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami.

A to zbiór takich sześciowyrazowych ciągów, których wyrazy są identyczne w obrębie danego ciągu. Są trzy takie ciągi.

Opisujemy zdarzenie losowe A i obliczamy ilość jego elementów.

$P(A) = \frac{3}{729} = \frac{1}{243}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wszyscy pasażerowie wsiądą do jednego wagonu, wynosi $\frac{1}{243}$.

ZADANIE 4

Każdy z pięciu pasażerów windy wybiera losowo jedno z 8 pięter i wysiada na nim. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?

ROZWIĄZANIE

Ω to zbiór wszystkich pięciowyrazowych ciągów, których wyrazami są piętra.

Opisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

$|\Omega| = W_8^5 = 8^5 = 32768$

Obliczamy moc Ω, stosując wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami.

Jest to zbiór ciągów, których wszystkie wyrazy są różne w obrębie danego ciągu.

Opisujemy zdarzenie losowe A.

$|A| = V_8^5 = 6720$

Obliczamy moc zdarzenia A, korzystając z wariacji bez powtórzeń (wszystkie elementy ciągu muszą być różne).

$P(A) = \frac{6720}{32768} \approx 0{,}205$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że każdy pasażer wysiądzie na innym piętrze, wynosi 0,205.

ZADANIE 5

Z talii 52 kart losujemy jednocześnie 13 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart znajdą się trzy damy i dwa asy?

ROZWIĄZANIE

Ω to zbiór wszystkich trzynastoelementowych podzbiorów zbioru wszystkich kart z danej talii.

Opisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych. Ponieważ kolejność nie odgrywa roli, tworzymy podzbiory.

$$|\Omega| = C_{52}^{13}$$

Obliczamy Ω, stosując wzór na liczbę kombinacji bez powtórzeń.

A to zbiór podzbiorów zbioru Ω, w których znajdują się trzy damy, dwa asy i dziewięć kart, które nie są asami i damami.

Opisujemy zdarzenie losowe A.

$$|A| = C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_{44}^8$$

Obliczamy ilość elementów zdarzenia A.

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_{44}^8}{C_{52}^{13}}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{44}{8}}{\binom{52}{13}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{44!}{8!\cdot 36!}}{\frac{52!}{13!\cdot 39!}} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!1\cdot 2}\cdot\frac{3!\cdot 4}{3!\cdot 1}\cdot\frac{44!}{8!36!}\cdot\frac{13!\cdot 39!}{52!} =$$

$$= \frac{3\cdot 4\cdot 4\cdot 44!\cdot 8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 36!\cdot 37\cdot 38\cdot 39}{2\cdot 8!\cdot 36!\cdot 44!\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52} =$$

Skracamy3 ·4 ·4 z 48, 9 ·10 z 2 ·45, 13 z 52.

$$= \frac{11\cdot 12\cdot 37\cdot 38\cdot 39}{46\cdot 47\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 4} =$$

Skracamy 12 = 3 ·4 i 51 i 38 z 46.

$$= \frac{11\cdot 37\cdot 19\cdot 39}{23\cdot 47\cdot 49\cdot 50\cdot 17} = \frac{301587}{45023650} \approx 0{,}0067$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wśród 13 kart znajdą się trzy damy i dwa asy, jest bardzo małe i wynosi 0,0067.

ZADANIE 6

Wielokąt wypukły ma n wierzchołków, z których losujemy jednocześnie dwa. Ile powinno wynosić n, aby prawdopodobieństwo, że wylosowane wierzchołki utworzą przekątną tego wielokąta, było równe 0,9?

ROZWIĄZANIE

Ω to zbiór wszystkich podzbiorów dwuelementowych utworzonych ze zbioru n wierzchołków.

$$|\Omega| = C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2!\cdot(n-2)!} =$$

Obliczamy moc Ω.

$$= \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Kolejność wyboru elementów nie odgrywa roli. Opisujemy „omegę".

Jest to zbiór podzbiorów dwuelementowych, takich, że wybrane punkty są końcami przekątnych wielokąta wypukłego.

Opisujemy zdarzenie losowe A.

$$|A| = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

Obliczamy $|A|$.

$$P(A) = \frac{\frac{n\cdot(n-3)}{2}}{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} = \frac{n-3}{n-1}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A.

$$\frac{n-3}{n-1} = \frac{9}{10} \qquad 10n-30 = 9n-9 \qquad n = 21$$

Układamy równanie i obliczamy n.

Odpowiedź: Dany wielokąt musi mieć 21 wierzchołków.

ZADANIE 7

Ze zbioru liczb {1, 2, … , 12} losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby nieparzystej, jeżeli wiadomo, że otrzymano liczbę pierwszą.

ROZWIĄZANIE

$|\Omega| = 12$ A – wylosowanie liczby nieparzystej,
B – wylosowano liczbę pierwszą: {2, 3, 5, 7, 11}
$A \cap B$ – wylosowano liczbę pierwszą nieparzystą: {3, 5, 7, 11}
$|B| = 5$ $|A \cap B| = 4$

Jest to prawdopodobieństwo warunkowe. Określamy zdarzenia A, B i część wspólną obu zdarzeń.

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{12} \qquad P(A\cap B) = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

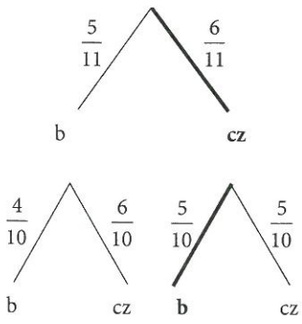
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania liczby nieparzystej, wiedząc, że była to liczba pierwsza, wynosi 0,8.

ZADANIE 8

Z pojemnika, w którym znajduje się pięć kul białych i sześć czarnych, losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w drugim losowaniu kuli białej, jeżeli wiadomo, że w pierwszym losowaniu otrzymaliśmy kulę czarną.

ROZWIĄZANIE

A – otrzymanie w drugim losowaniu kuli białej
B – otrzymanie w pierwszym losowaniu kuli czarnej
$A \cap B$ – otrzymanie w pierwszym losowaniu kuli czarnej i w drugim białej



$$P(B)=\frac{6}{11}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{11}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania w drugim losowaniu kuli białej, jeśli w pierwszym otrzymaliśmy kulę czarną, wynosi 0,5.

ZADANIE 9

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek większego od siedmiu, jeśli wiadomo, że suma otrzymanych oczek jest równa sześć.

ROZWIĄZANIE

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Dwukrotny rzut kostką najłatwiej jest przedstawić za pomocą tabelki.

A – iloczyn oczek większy od 7
B – suma oczek wynosi 6
$A\cap B$ – suma oczek wynosi 6 i iloczyn jest większy od 7
$|\Omega|=36 \quad |B|=5 \quad |A\cap B|=3$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{36}\cdot\frac{36}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek większego od siedmiu, jeśli suma oczek wynosi sześć, to 0,6.

ZADANIE 10

Z talii pięćdziesięciodwukartowej losujemy pięć kart. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch pików, jeśli wiadomo, że wśród wylosowanych kart:

a) jest as kier **b)** są dokładnie dwa kiery

ROZWIĄZANIE

Ad a)
A – otrzymanie dwóch pików
Ω – wylosowanie dowolnych pięciu kart

Jest to prawdopodobieństwo warunkowe.

$$|\Omega|=\binom{52}{5}$$

Losujemy 5 kart z 52.

B – wylosowano asa kier

$$|B|=\binom{1}{1}\binom{51}{4}$$

Losujemy asa kier – taka karta jest jedna oraz dowolne 4 z 51.

$A\cap B$ – wylosowanie dwóch pików i asa kier

$$|A\cap B|=\binom{13}{2}\binom{1}{1}\binom{38}{2}$$

Losujemy 2 piki z 13, asa kier oraz 2 dowolne karty z pozostałych 38.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}}=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{\binom{13}{2}\binom{1}{1}\binom{38}{2}}{\binom{1}{1}\binom{51}{4}}=\frac{\binom{13}{2}\binom{38}{2}}{\binom{51}{4}}=\frac{13!}{2!\cdot 11!}\cdot\frac{38!}{2!\cdot 36!}\cdot\frac{4!\cdot 47!}{51!}=$$

$$=\frac{11!\cdot 12\cdot 13}{2\cdot 11!}\cdot\frac{36!\cdot 37\cdot 38}{2\cdot 36!}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 47!}{47!\cdot 48\cdot 49\cdot 50\cdot 51}=\frac{6\cdot 13\cdot 37\cdot 19}{2\cdot 49\cdot 50\cdot 51}=\frac{13\cdot 37\cdot 19}{49\cdot 50\cdot 17}=\frac{9139}{41650}\approx 0{,}219$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch pików, gdy wśród wylosowanych kart jest as kier, wynosi 0,219.

Ad b)
A – otrzymanie dwóch pików $|\Omega|=\binom{52}{5}$

B – wylosowanie dokładnie dwóch kierów

$$|B|=\binom{13}{2}\binom{39}{3}$$

Losujemy dwa kiery z 13 i 3 dowolne karty z pozostałych 39.

$A\cap B$ – wylosowanie dwóch pików i dwóch kierów

$$|A\cap B|=\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{26}{1}$$

Losujemy 2 piki z 13, 2 kiery z 13 i jedną dowolną kartę z pozostałych 26.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}}=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{26}{1}}{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}=\frac{\binom{13}{2}\binom{26}{1}}{\binom{39}{3}}=\frac{13!}{2!11!}\cdot 26\cdot\frac{3!\cdot 36!}{39!}=$$

$$=\frac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 26}{2\cdot 11!}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 36!}{36!\cdot 37\cdot 38\cdot 39}=\frac{6\cdot 13\cdot 26\cdot 3}{37\cdot 19\cdot 39}=\frac{6\cdot 26}{37\cdot 19}=\frac{156}{703}\approx 0{,}222$$

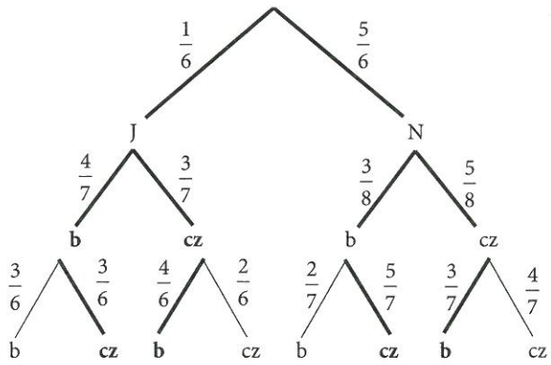
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch pików, gdy wiadomo, że wylosowano dwa kiery, wynosi 0,222.

ZADANIE 11

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym są cztery kule białe i trzy czarne, w drugim trzy białe i pięć czarnych. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wyrzucimy jeden, to losujemy dwie kule z pierwszego pojemnika, a w przeciwnym przypadku dwie kule z drugiego pojemnika. Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką otrzymano jedno oczko, jeżeli otrzymano kule różnych kolorów.

ROZWIĄZANIE

A – otrzymano jedno oczko w rzucie kostką
B – otrzymano kule różnych kolorów
$A\cap B$ – otrzymano jedno oczko na kostce i kule różnych kolorów
$P(B)=?$ $P(A\cap B)=?$



Aby obliczyć potrzebne prawdopodobieństwo, rysujemy drzewko – jest to prawdopodobieństwo całkowite.

Rzucamy kostką
J – jedno oczko
N – inna liczba

$$P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{21}+\frac{25}{112}+\frac{25}{112}=\frac{2}{21}+\frac{25}{56}=\frac{2}{3\cdot7}+\frac{25}{7\cdot8}=$$

$$=\frac{2\cdot8}{3\cdot7\cdot8}+\frac{25\cdot3}{7\cdot8\cdot3}=\frac{16}{168}+\frac{75}{168}=\frac{91}{168}\qquad P(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{21}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{21}\cdot\frac{168}{91}=\frac{2}{7}\cdot\frac{56}{91}=\frac{16}{91}$$

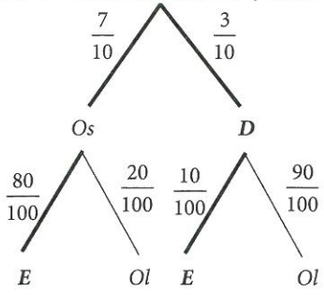
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką otrzymamy jedno oczko, gdy wiemy, że otrzymaliśmy kule różnokolorowe, wynosi $\frac{16}{91}$.

ZADANIE 12

Stacja benzynowa obsługuje samochody osobowe i dostawcze. Stosunek liczby samochodów osobowych do dostawczych pobierających paliwo wynosi 7:3. Etylinę tankuje 80% samochodów osobowych i 10% dostawczych. Pozostałe tankują olej napędowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że podjechał samochód dostawczy, jeżeli wiadomo, że tankował etylinę.

ROZWIĄZANIE

A – podjechał samochód dostawczy
B – samochód tankował etylinę $P(B)=?$
$A\cap B$ – samochód dostawczy tankował etylinę $P(A\cap B)=?$



Aby obliczyć $P(B)$ i $P(A\cap B)$, rysujemy drzewko – jest to prawdopodobieństwo całkowite.

Jeżeli stosunek samochodów osobowych do dostawczych wynosi 7:3, to prawdopodobieństwo, że podjechał osobowy, wynosi $\frac{7}{10}$, a dostawczy $\frac{3}{10}$.

Zamieniamy procenty na ułamki.

$$P(B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{56}{100}+\frac{3}{100}=\frac{59}{100}=0{,}59\qquad P(A\cap B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{100}=0{,}03$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}03}{0{,}59}=\frac{3}{59}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe.

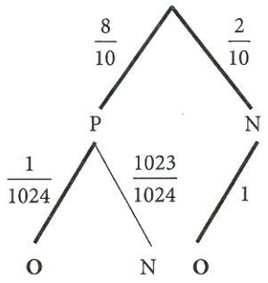
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że podjechał samochód dostawczy, jeśli wiadomo, że tankował etylinę, wynosi $\frac{3}{59}$.

ZADANIE 13

Wśród dziesięciu monet dwie mają orły po obu stronach, a pozostałe są prawidłowe. Losowo wybraną monetą rzucamy dziesięć razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano monetę prawidłową, jeżeli w wyniku doświadczenia otrzymano dziesięć razy orła.

ROZWIĄZANIE

A – wylosowano monetę prawidłową
B – otrzymano dziesięć razy orła $P(B)=?$
$A\cap B$ – otrzymano 10 razy orła i wylosowano monetę prawidłową $P(A\cap B)=?$



Gdy rzucamy zwykłą monetą 10 razy, to prawdopodobieństwo, że wyrzucimy orła, wynosi $\frac{1}{1024}$, bo $2^{10}=1024$.

Jeżeli moneta ma po obu stronach orła, prawdopodobieństwo jest równe 1.

$$P(B)=\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{1024}+\frac{2}{10}\cdot1=\frac{1}{1280}+\frac{1}{5}=\frac{1}{1280}+\frac{256}{1280}=\frac{257}{1280}$$

$$P(A\cap B)=\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{1024}=\frac{1}{1280}\qquad P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{1280}\cdot\frac{1280}{257}=\frac{1}{257}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wylosowano monetę prawidłową, jeżeli otrzymano w dziesięciu rzutach dziesięć razy orła, wynosi $\frac{1}{257}$.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

GRANICA FUNKCJI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Jeżeli obliczamy granicę funkcji f w punkcie x_0, a funkcja jest wielomianem, to granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Jeżeli funkcja f jest wymierna, to najlepiej rozpocząć od określenia dziedziny funkcji. Jeśli obliczamy granicę w punkcie x_0 należącym do dziedziny, to granica ta również jest równa wartości funkcji w tym punkcie. Jeśli po podstawieniu w miejsce x wartości x_0 otrzymamy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$, to ułamek możemy przekształcić, skrócić i obliczyć granicę. Jest to wartość x_0, która nie należy do dziedziny. W tym przypadku możemy również otrzymać symbol $\left[\frac{\text{liczba}}{0}\right]$ i wtedy obliczamy granice jednostronne. Gdy x zbliża się do x_0 liczbami mniejszymi od x_0, to jest to granica lewostronna, a jeśli liczbami większymi, to prawostronna. W przypadku symbolu $\left[\frac{\text{liczba}}{0}\right]$ granicą jest zawsze ∞ lub $-\infty$. Są to granice niewłaściwe.

Jeżeli $\lim_{x\to x_0} f(0) = g$ oraz $\lim_{x\to x_0} h(x) = p$, to granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu tych funkcji jest równa odpowiednio sumie, różnicy, iloczynowi i ilorazowi granic:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+h(x)\right) = g+p \qquad \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot h(x)\right) = g\cdot p$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-h(x)\right) = g-p \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g}{p}, \quad p\neq 0.$$

Granicę, gdy x dąży do ∞ lub $-\infty$, obliczamy podobnie jak granicę ciągu. W funkcji wielomianowej wyłączamy najwyższą potęgę x przed nawias, a w funkcji wymiernej w liczniku i mianowniku najwyższą potęgę x z mianownika.

ZADANIE 1

Oblicz granice: a) $\lim_{x\to -1} 3x^3$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x+4}{x^2+6x+2}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $\lim_{x\to -1} 3x^3 = 3\cdot(-1)^3 = -3$

Ad b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x+4}{x^2+6x+2} = \frac{0^3-5\cdot 0+4}{0^2+6\cdot 0+2} = \frac{4}{2} = 2$

Są to przykłady, w których granica funkcji w punkcie jest równa wartości funkcji w tym punkcie:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

ZADANIE 2

Oblicz granice: a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3+x-10}$

ROZWIĄZANIE

Ad a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \left[\frac{1^2-2\cdot 1+1}{1^2-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$

D: $x^2 - 1 \neq 0$
$(x+1)(x-1) \neq 0$
$x \neq -1 \qquad x \neq 1 \qquad D = R \setminus \{-1, 1\}$

Otrzymaliśmy symbol nieoznaczony, co oznacza, że funkcję można przekształcić. Określamy dziedzinę funkcji.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ad b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3+x-10} = \left[\frac{2^3-3\cdot 2-2}{2^3+2-10}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$

D: $x^3 + x - 10 \neq 0 \quad x \neq 2$

$$\begin{array}{l} x^2+2x+5 \\ (x^3+x-10):(x-2) \\ \underline{-x^3+2x^2} \\ 2x^2+x-10 \\ \underline{-2x^2+4x} \\ 5x-10 \\ \underline{-5x+10} \\ = \quad = \end{array}$$

Określamy dziedzinę. Trzeba rozłożyć wielomian na czynniki, wiemy, że miejscem zerowym jest 2.

$x^2 + 2x + 5 \neq 0 \qquad \Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -16$
To wyrażenie jest zawsze dodatnie.
$D = R \setminus \{2\}$
$x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2+2x+5)$

Postać iloczynowa mianownika.

$x^3 - 3x - 2 = x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2-1) - 2(x+1) =$
$= x(x+1)(x-1) - 2(x+1) = (x+1)[x(x-1) - 2] =$
$= (x+1)(x^2-x-2) \qquad \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$

Rozkładamy na czynniki licznik.

$\sqrt{\Delta} = 3 \qquad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2)$

Licznik ułamka został rozłożony na czynniki.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+5}=\frac{(2+1)^2}{2^2+2\cdot 2+5}=\frac{9}{13}$$

Odpowiedź: Granica funkcji w punkcie 2 wynosi $\frac{9}{13}$.

ZADANIE 3

Oblicz granice: a) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$ b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2-52}{x^3+8}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-1}=\left[\frac{1}{0}\right]$$

Jeżeli otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{\text{liczba}}{0}$, to obliczamy granice jednostronne.

$D=\{(-\infty;1)\cup(1,\infty)\}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x}=\left[\frac{1}{0^-}\right]-\infty$$

Gdy x zbliża się do jedynki z lewej strony, to jest zawsze mniejsze od 1, czyli $1-x$ jest dodatnie i $\frac{x}{1-x}$ dąży do ∞.

Gdy x zbliża się do jedynki z prawej strony, granicą jest $-\infty$. Są to granice niewłaściwe.

Ad b)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2-52}{x^3+8}=\left[\frac{(-2)^3+4\cdot(-2)^2-52}{(-2)^3+8}\right]=\left[\frac{-8+16-52}{-8+8}\right]=\left[\frac{-44}{0}\right]$$

$D=\{(-\infty;-1)\cup(-1,+\infty)\}$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3+4x^2-52}{x^3+8}=\left[\frac{-44}{0^-}\right]=\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^3+4x^2-52}{x^3+8}=\left[\frac{-44}{0^+}\right]=-\infty$$

ZADANIE 4

Oblicz granice funkcji w podanym punkcie x_0:

a) $f(x)\begin{cases}3x+7 & \text{dla } x\le 1\\ 5x^2+2x+3 & \text{dla } x>1\end{cases}$ $x_0=1$ b) $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x-8 & \text{dla } x\le 0\\ 5x^3+8x-1 & \text{dla } x>0\end{cases}$ $x_0=0$

Ad a)

$$\lim_{x\to 1^-}(3x+7)=3\cdot 1+7=10 \qquad \lim_{x\to 1^+}(5x^2+2x+3)=5+2+3=10$$

Odpowiedź: W punkcie $x_0=1$ granica lewostronna jest taka sama jak prawostronna, więc granica funkcji wynosi 10.

Ad b)

$$\lim_{x\to 0^-}(3x^2-4x-8)=-8$$
$$\lim_{x\to 0^+}(5x^3+8x-1)=-1$$

Odpowiedź: Nie istnieje granica funkcji w punkcie $x_0=0$, funkcja posiada tylko granice jednostronne.

ZADANIE 5

Oblicz granice:

a) $\lim_{x\to -\infty}(-5x^3+4x+11)$ b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2+8x}{5x+3}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x-1}{-3x^2+1}$ d) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+5}{3x^3-2}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$\lim_{x\to -\infty}(-5x^3+4x+11)=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}x^3\left(-5+\frac{4}{x^2}+\frac{11}{x^3}\right)=\lim_{x\to -\infty}(-5x^3)=\infty$$

Ułamki $\frac{1}{x^n}$, gdy x dąży do ∞ lub $-\infty$, zawsze dążą do zera.

Ad b)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2+8x}{5x+3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x(3x+8)}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+8}{5}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}\right)=\lim_{x\to -\infty}x\left(\frac{3}{5}+\frac{8}{5x}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{5}x\right)=-\infty$$

Wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę x z mianownika.

Ad c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x-1}{-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{9}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{0}{-3}=0$$

Ad d)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+5}{3x^3-2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{2}{3}$$

POCHODNA FUNKCJI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

Iloraz różnicowy

Gdy funkcja f jest określona w przedziale (a i b), do którego należy x i x_0, gdzie $x\neq x_0$, to $h=x-x_0$ nazywamy przyrostem argumentu funkcji f, a $f(x)-f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$ przyrostem wartości funkcji f.

Iloraz $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazywamy ilorazem różnicowym o przyroście h funkcji f w punkcie x_0.

Często stosuje się również oznaczenia: $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, gdzie $\Delta x=x-x_0$

Definicja pochodnej funkcji w punkcie

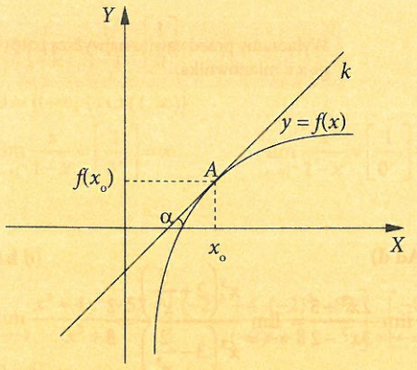
Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale (a i b) i $x_0\in(a;b)$ oraz istnieje skończona granica ilorazu różnicowego $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, gdy h – przyrost zmiennej x dąży do zera, to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy symbolicznie:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Jeżeli funkcja ma pochodną w x_o, to mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie x_o, a jeżeli ma pochodną w każdym punkcie przedziału $(a\,;b)$, to jest różniczkowalna w przedziale $(a\,;b)$. Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie $x_o \in (a\,;b)$, to funkcję g, która każdemu elementowi $x \in (a\,;b)$ przyporządkowuje pochodną funkcji f nazywamy pochodną funkcji f, co zapisujemy $g(x) = f'(x)$. Pochodna funkcji f w punkcie x_o jest liczbą, a określona w każdym punkcie należącym do dziedziny jest funkcją.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_o, to styczną do wykresu funkcji f w punkcie $A = (x_o, f(x_o))$ nazywamy prostą przechodzącą przez punkt A, której współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_o)$.



k – prosta styczna
A – punkt styczności
α – kąt nachylenia prostej do osi x

W interpretacji geometrycznej pochodna funkcji f w punkcie x_o jest równa tangensowi kąta α, jaki tworzy z osią x styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_o\,; f(x_o))$.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_o)$$

Interpretacja fizyczna pochodnej funkcji

Prędkość $v(t_o)$ w chwili t_o jest pochodną drogi względem czasu.

$v_{śr} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ – średnia prędkość to stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu

$$v_{śr} = \frac{s(t_o+\Delta t)-s(t_o)}{\Delta t}$$

$$v(t_o) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{s(t_o+\Delta t)-s(t_o)}{\Delta t} = s'(t_o) = \frac{ds}{dt}$$

$$\boldsymbol{v(t_o) = s'(t_o)}$$

Przyspieszenie w chwili jest pochodną prędkości względem czasu.

$$\alpha_{śr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_o+\Delta t)-v(t_o)}{\Delta t} \qquad \alpha(t_o) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{v(t_o+\Delta t)-v(t_o)}{\Delta t} = v'(t_o)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t_o) = v'(t_o) = \frac{dv}{dt}}$$

Natężenie prądu elektrycznego jest pochodną przepływającego ładunku elektrycznego przez przekrój przewodnika względem czasu.

$i = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ – natężenie prądu elektrycznego to stosunek przepływającego ładunku elektrycznego do czasu przepływu tego ładunku.

$$i(t_o) = \frac{q(t_o+\Delta t)-q(t_o)}{\Delta t} \qquad i(t_o) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{q(t_o+\Delta t)-q(t_o)}{\Delta t} = q'(t_o)$$

$$\boldsymbol{i(t_o) = q'(to) = \frac{dq}{dt}}$$

Pochodne niektórych funkcji

Gdy $f(x) = c$, to $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ – pochodna stałej wynosi 0

Gdy $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\boldsymbol{f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$, w szczególności gdy $f(x) = \sqrt{x}$, to $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Twierdzenia o sumie, różnicy, iloczynie i ilorazie pochodnej

Jeżeli funkcje f, g i cf, gdzie $c \in \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to:

$(cf)' = cf'$
$(f+g)' = f' + g'$
$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg + fg'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Stałą c wyłączamy przed pochodną. Pochodna sumy oraz różnicy jest równa odpowiednio sumie lub różnicy pochodnych.
Wzór na pochodną iloczynu.
Wzór na pochodną ilorazu.

ZADANIE 1

Korzystając z definicji ilorazu różnicowego, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_o, gdy:

a) $f(x) = -2x^2 + 3$; $x_o = -1$ **b)** $f(x) = \dfrac{5}{2x-3}$; $x_o = 2$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}, \quad f(x) = -2x^2+3, \quad x_o = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} =$$

Podstawiamy do wzoru w miejsce x wyrażenie $-1+h$ oraz $1-1$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[-2(-1+h)^2+3\right]-\left[-2\times(-1)^2+3\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[-2(h^2-2h+1)+3\right]-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h^2+4h-2+3-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h^2+4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-2h+4)}{h} = \lim_{h \to 0}(-2h+4) = -2\cdot 0 + 4 = 4$$

Odpowiedź: Pochodna funkcji w punkcie $x_o = -1$ wynosi 4.

Ad b)

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\qquad f(x)=\frac{5}{2x-3},\qquad x_0=2$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5}{2(2+0)-3}-\frac{5}{2\cdot 2-3}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{4+2h-3}-\frac{5}{4-3}\right)\cdot\frac{1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{2h+1}-5\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{2h+1}-\frac{5(2h+1)}{2h+1}\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5-5(2h+1)}{2h+1}\cdot\frac{1}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{5-10h-5}{2h+1}\cdot\frac{1}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-10h}{2h^2+h}=\lim_{h\to 0}\frac{-10h}{h(2h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-10}{2h+1}=\frac{-10}{2\cdot 0+1}=\frac{-10}{1}=-10$$

Odpowiedź: Pochodna funkcji w punkcie $x_0 = 2$ wynosi -10.

ZADANIE 2

Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x)=\sqrt[5]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^5}$ **b)** $f(x)=-3x^5+\frac{2}{3}x^3-x+5$ **c)** $f(x)=(1-x^2)(2x^3-1)$

d) $f(x)=\frac{3x-8}{2x^2+9}$ **e)** $f(x)=\frac{2x^2+5x}{3x^2-6}$ **f)** $f(x)=\frac{3x^2+2x}{x^2+8x+5}$.

ROZWIĄZANIE

Ponieważ pochodna funkcji jest również funkcją, więc przed obliczeniem pochodnej określamy dziedzinę funkcji, a po obliczeniu pochodnej dziedzinę pochodnej.

Ad a)

$f(x)=\sqrt[5]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^5}$ $D=(0;\infty)$

$f(x)=x^{\frac{4}{5}}\cdot x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{24}{30}}\cdot x^{\frac{25}{30}}=x^{\frac{24}{30}+\frac{25}{30}}$ $f(x)=x^{\frac{49}{30}}$

$f'(x)=\left(x^{\frac{49}{30}}\right)'=\frac{49}{30}x^{\frac{49}{30}-1}=\frac{49}{30}x^{\frac{19}{30}}$

$f'(x)=\frac{49\sqrt[30]{x^{19}}}{30}$ – pochodna funkcji

$D' = D$

Można skorzystać z pochodnej iloczynu, ale łatwiej doprowadzić funkcję do najprostszej postaci i skorzystać ze wzoru na pochodną potęgi.
Dziedzina pochodnej i dziedzina funkcji są takie same.

Ad b)

$f(x)=-3x^5+\frac{2}{3}x^3-x+5$ $D=R$

$f'(x)=\left(-3x^5+\frac{2}{3}x^3-x+5\right)'=(-3x^5)'+\left(\frac{2}{3}x^3\right)'-(x)'+(5)'=-3(x^5)'+\frac{2}{3}(x^3)-1=$

$=-3\cdot 5x^{5-1}+\frac{2}{3}\cdot 3x^{3-1}-1$

$f'(x)=-15x^4+2x^2-1$ – pochodna funkcji

$D = D'$

Przy sprawnym obliczaniu pochodnej dużą część obliczeń można wykonać w pamięci.
Dobrze jest zapamiętać, że $(x)' = 1$.

Ad c)

$f(x) = (1 - x^2)(2x^3 - 1)$ $D = R$

Można obliczyć pochodną, wykorzystując wzór na pochodną iloczynu.

I sposób: (pochodna iloczynu)

$f'(x) = (1 - x^2)' \cdot (2x^3 - 1) + (1 - x^2) \cdot (2x^3 - 1)' = [(1)' - (x^2)'] \cdot (2x^3 - 1) + (1 - x^2) \cdot [(2x^3)' - (1)'] =$

$= -2x(2x^3 - 1) + (1 - x^2) \cdot 6x^2 = -4x^4 + 2x + 6x^2 - 6x^4$

$f'(x) = -10x^4 + 6x^2 + 2x$ – pochodna funkcji

$D' = D$

II sposób: (przekształcanie funkcji)

Wyrażenie $2x^2 + 9$ jest zawsze dodatnie.

$f(x) = (1 - x^2)(2x^3 - 1) = 2x^3 - 1 - 2x^5 + x^2$

postaci.

$f(x) = -2x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$

$f'(x) = (-2x^5 + 2x^3 + x^2 - 1)' = (-2x^5)' + (2x^3)' + (x^2)' - (1)' = -2(x^5)' + 2(x^3)' + 2x = -2 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 3x^2 + 2x$

$f'(x) = -10x^4 + 6x^2 + 2x$ – pochodna funkcji

$D = D'$

Ad d)

$f(x)=\frac{3x-8}{2x^2+9}$ $D=R$

$f'(x)=\frac{(3x-8)'(2x^2+9)-(3x-8)(2x^2+9)'}{(2x^2+9)^2}=$

Stosujemy wzór na pochodną ilorazu $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

$=\frac{3(2x^2+9)-(3x-8)\cdot 4x}{(2x^2+9)^2}=\frac{6x^2+27-12x^2+32x}{(2x^2+9)^2}$

$f'(x)=\frac{-6x^2+32x+27}{(2x^2+9)^2}$ – pochodna funkcji

$D = D'$

Ad e)

$f(x)=\frac{2x^2+5x}{3x^2-6}$

D:

$3x^2 - 6 \neq 0 \quad /:3$ $x^2 - 2 \neq 0$ $x \neq -\sqrt{2}$ $x \neq \sqrt{2}$ $D = R - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$f'(x)=\frac{(2x^2+5x)'(3x^2-6)-(2x^2+5x)(3x^2-6)'}{(3x^2-6)^2}=\frac{(4x+5)(3x^2-6)-(2x^2+5x)\cdot 6x}{(3x^2-6)^2}=$

$=\frac{12x^3-24x-12x^3-30x^2}{(3x^2-6)^2}=\frac{-30x^2-24x}{[3(x^2-2)]^2}=\frac{3(-10x^2-8x)}{9(x^2-2)^2}=\frac{-10x^2-8x}{3(x^2-2)^2}$

$f'(x)=\frac{-10x^2-8x}{3(x^2-2)^2}$ – pochodna funkcji

$D = D'$

Ad f)

$f(x)=\frac{3x^3+2x}{x^2+8x+5}$

D: $x^2 + 8x + 5 \neq 0$ $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 64 - 20 = 44$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$

$x_1=\frac{-8-2\sqrt{11}}{2}=\frac{2(-4-\sqrt{11})}{2}=-4-\sqrt{11}$ $x_2=-4+\sqrt{11}$

$D = R - \{-4 - \sqrt{11}, -4 + \sqrt{11}\}$

$$f'(x) = \frac{(3x^3+2x)'(x^2+8x+5) - (3x^3+2x)(x^2+8x+5)'}{(x^2+8x+5)^2} =$$

$$= \frac{(9x^2+2)(x^2+8x+5) - (3x^3+2x)(2x+8)}{(x^2+8x+5)^2} = \frac{9x^4+72x^3+45x^2-6x^4-24x^3-4x^2-16x}{(x^2+8x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4+48x^3+41x^2-16x}{(x^2+8x+5)^2}$$ – pochodna funkcji

$D' = D$

ZADANIE 3

Oblicz miarę kąta, jaki tworzy styczna do wykresu funkcji f z osią x w punkcie o odciętej x_o, gdy:

a) $f(x) = -x^2 + 1$, $x_o = -2$ **b)** $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_o = -3$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$f(x) = -x^2 + 1$, $x_o = -2$ $\quad tg\alpha = f'(x_o)$ $\quad D = R$

$f'(x) = -2x$

$tg\alpha = f'(x_o) = -2x_o = -2 \cdot (-2) = 4$ $\quad tg\alpha = 4{,}0000$ $\quad \alpha \approx 76^\circ$

Odpowiedź: Kąt nachylenia stycznej ma miarę 76°.

Ad b)

$f(x) = \frac{6}{x}$ $\quad x_o = -3$ $\quad tg- = f'(x_o)$ $\quad D = R - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{(6)' x - 6 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-6}{x^2}$$

$$tg\alpha = f'(x_o) = \frac{-6}{x_o^2} = \frac{-6}{(-3)^2} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

$tg\alpha = -\frac{2}{3} \approx -0{,}6667$ $\quad tg\alpha \approx -tg34^\circ$

$tg\alpha = tg(-34^\circ)$ $\quad \alpha = -34^\circ + k\pi$ $\quad k \in C$

$\alpha = -34^\circ + k \cdot 180^\circ$ $\quad \alpha = 180^\circ - 34^\circ$ $\quad \alpha = 146^\circ$

Odpowiedź: Kąt nachylenia stycznej wynosi 146°.

Można skorzystać również z pochodnej potęgi lub zapamiętać wzór:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}, \text{ gdy } x \neq 0$$

Kąt α jest kątem rozwartym, czyli należy do drugiej ćwiartki układu współrzędnych.

Funkcja tangens ma okres równy 180°.

ZADANIE 4

Znajdź równanie stycznej do wykresu w funkcji f w punkcie o odciętej x_o, gdy:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$, $x_o = 2$ **b)** $f(x) = \frac{2}{x+3}$, $x_o = 3$

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$y = ax + b$ – równanie stycznej

$a = tg\alpha = f'(x_o)$ $\quad f(x) = -3x^2 + 4x - 1$, $x_o = 2$ $\quad D = R$

$P = (x_o, f(x_o))$ – punkt styczności

$f(x_o) = -3x_o^2 + 4x_o - 1$ $\quad f(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = -3 \cdot 4 + 8 - 1 = -12 + 7 = -5$ $\quad P = (2, -5)$

$f'(x) = (-3x^2 + 4x - 1)' = -6x + 4$

$f'(x) = -6x + 4$ $\quad D' = D$

$a = f'(x_o) = f'(2) = -6 \cdot 2 + 4 = -12 + 4 = -8$

$a = -8$, $P = (2, -5)$

$ax + b = y$

$-8 \cdot 2 + b = -5$

$b = -5 + 16 = 11$

$y = -8x + 11$

Odpowiedź: Styczna do wykresu funkcji ma wzór $y = -8x + 11$.

ZADANIE 5

Mając dane równanie, które opisuje ruch ciała – drogę w zależności od czasu, oblicz prędkość początkową, przyspieszenie oraz prędkość po 5 sekundach.

a) $s(t) = 10t + 2t^2$ **b)** $s(t) = 10 + 2t - 0{,}5t^2$ Wyniki podaj w jednostkach SI.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$s(t) = 10t + 2t^2$

$v(t) = s'(t) = 10 + 4t$

v_o – prędkość początkowa dla $t = 0$

$v(0) = 10 + 4 \cdot 0 = \underline{10}$ m/s

$v(t) = 10 + 4t$

$a = v'(t) = (10 + 4t)' = 4$

$\underline{a = 4}$ m/s²

$t = 5$ s

$v(5) = 10 + 4 \cdot 5 = \underline{30 \text{ m/s}}$

Korzystamy z fizycznej interpretacji pochodnej, która umożliwia rozwiązanie zadania bez znajomości wzorów fizycznych.
Prędkość jest pochodną drogi, a przyspieszenie jest pochodną prędkości.
Jest to ruch jednostajnie przyspieszony, więc przyspieszenie jest stałe.
Aby obliczyć wartość prędkości po 5 sekundach, wystarczy obliczyć $v(5)$.

Odpowiedź: Prędkość początkowa ciała wynosi 10 m/s, po 5 sekundach wzrośnie ona do 30 m/s, a przyspieszenie jest stałe i wynosi 4 m/s².

Ad b)

$s(t) = 10 + 2t - 0{,}5t^2$

$$v(t) = s'(t) = \left(10 + 2t - 0{,}5t^2\right)' = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2t$$

$v(t) = 2 - t$

$v \geq 0$ więc $2 - t \geq 0$ i $t \geq 0$

$t \leq 2$ i $t \geq 0$

$t \in \langle 0; 2 \rangle$

dla $t = 0$

$v(0) = 2 - 0 = 2$ m/s

$t = 5$ s

$v(t) = 2 - t$

$a = v'(t) = (2 - t)' = -1$ m/s²

Jest to ruch jednostajnie opóźniony, co oznacza, że prędkość ciała jest coraz mniejsza, aż osiągnie wartość zero, czyli ciało się zatrzyma.
To ciało zatrzyma się już po 2 sekundach.

Jest to prędkość początkowa. Jeżeli ciało zatrzyma się po 2 sekundach, to obliczenie prędkości po 5 sekundach jest niemożliwe.

W ruchu jednostajnie opóźnionym przyspieszenie jest ujemne.

Odpowiedź: Prędkość początkowa ciała wynosi 2 m/s, ciało zatrzyma się po 2 sekundach, a przyspieszenie w ruchu jednostajnie opóźnionym jest ujemne i wynosi -1 m/s².

MONOTONICZNOŚĆ I EKSTREMUM FUNKCJI

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

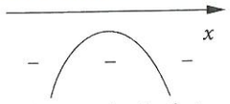
Jeżeli pochodna funkcji jest dodatnia, to funkcja jest rosnąca, a gdy ujemna, to malejąca.
Gdy $f'(x_0) = 0$, to w punkcie x_0 funkcja może posiadać **ekstremum** – minimum lub maksimum. Warunek $f'(x_0) = 0$ jest **warunkiem koniecznym** istnienia ekstremum, ale nie jest to warunek wystarczający. **Warunkiem wystarczającym** istnienia ekstremum jest zmiana znaku pochodnej w otoczeniu jej miejsca zerowego. Funkcja może posiadać kilka ekstremum – są to **ekstrema lokalne**. Określając monotoniczność funkcji i wyznaczając ekstrema, najłatwiej wykonać szkic wykresu pochodnej funkcji oraz tabelkę zmienności funkcji.

ZADANIE 1

Wykaż, że funkcja $f(x) = -5x^3 - 3x + 15$, gdzie D = R jest malejąca.

ROZWIĄZANIE

$f(x) = -5x^3 - 3x + 15$
$f'(x) = -5 \cdot 3x^2 - 3$
$f'(x) = -15x^2 - 3$



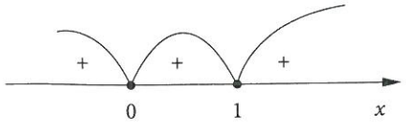
Odpowiedź: Pochodna funkcji jest zawsze ujemna, więc funkcja w całym zbiorze liczb rzeczywistych jest malejąca.

ZADANIE 2

Wykaż, że funkcja $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 17$ jest rosnąca w całej dziedzinie.

ROZWIĄZANIE

$f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 17$ D = R
$f'(x) = 6 \cdot 5x^4 - 15 \cdot 4x^3 + 10 \cdot 3x^2$
$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2$
$f'(x) = 30x^2 (x^2 - 2x + 1)$
$f'(x) = 30x^2 (x - 1)^2$
$x = 0$ $x = 1$



Pochodna funkcji jest wielomianem o dwóch podwójnych miejscach zerowych. W otoczeniu miejsc zerowych nie zmienia się znak pochodnej, więc nie zmienia się monotoniczność funkcji.

Odpowiedź: Funkcja jest rosnąca w całej dziedzinie.

ZADANIE 3

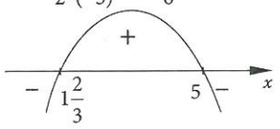
Wyznacz przedziały, w których funkcja jest rosnąca.

a) $f(x) = -x^3 + 10x^2 - 25x + 13$, **b)** $f(x) = \frac{5x}{1-x^2}$

ROZWIĄZANIE

Ad a)
$f(x) = -x^3 + 10x^2 - 25x + 13$ D = R
$f'(x) = -3x^2 + 20x - 25$
$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-25) = 400 - 300 = 100$ $\sqrt{\Delta} = 10$

$x_1 = \frac{-20-10}{2 \cdot (-3)} = \frac{-30}{-6} = 5$ $x_2 = \frac{-20+10}{2 \cdot (-3)} = \frac{-10}{-6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$



$f'(x) > 0$ gdy $x \in \left(1\frac{2}{3}; 5\right)$

Odpowiedź: Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle 1\frac{2}{3}; 5\rangle$.

Ad b)

$f(x) = \frac{5x}{1-x^2}$ D = R \ {– 1; 1}

Korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu.

$f'(x) = \frac{(5x)' \cdot (1-x^2) - 5x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{5(1-x^2) - 5x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{5 - 5x^2 + 10x^2}{(1-x^2)^2}$

Licznik i mianownik tego ułamka jest zawsze dodatni, więc pochodna jest dodatnia i funkcja rosnąca w całej swej dziedzinie.

$f'(x) = \frac{5x^2 + 5}{(1-x^2)^2} > 0$ $D' = D$

$f'(x) > 0$, gdy $x \in \{(-\infty; -1) \cup (-1, 1) \cup (1; \infty)\}$

Odpowiedź: Funkcja f jest rosnąca dla $x \in \{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1; \infty)\}$.

ZADANIE 4

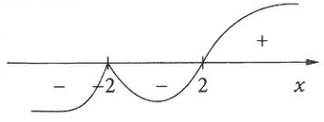
Wyznacz maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca:

a) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 96x + 17$, **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)
$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 96x + 17$
$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 8 \cdot 3x^2 - 24 \cdot 2x - 96$
$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 48x - 96$
$f'(x) = 12x^2 (x + 2) - 48 (x + 2)$
$f'(x) = (x + 2)(12x^2 - 48)$
$f'(x) = 12 (x + 2)(x^2 - 4) = 12 (x + 2)(x + 2)(x - 2)$
$f'(x) = 12 (x + 2)^2 (x - 2)$
$x = -2$ $x = 2$

Aby znaleźć miejsca zerowe, trzeba rozłożyć wielomian na czynniki.



$f'(x) < 0$, gdy $x \in (-\infty; -2)$

Odpowiedź: Funkcja jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2)$.

Ad b)

$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$ $\quad D = R \setminus \{-2, 2\}$

$f'(x)=\frac{(x^2+2x+1)'(x^2-4)-(x^2+2x+1)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{(2x+2)(x^2-4)-(x^2+2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=$

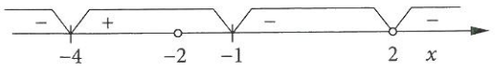
$=\frac{2x^3-8x+2x^2-8-2x^3-4x^2-2x}{(x^2-4)^2}$

Mianownik ułamka jest zawsze dodatni, więc znak pochodnej zależy tylko od znaku licznika. Obliczamy miejsce zerowe licznika i szkicujemy jego wykres.

$f'(x)=\frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$ $\quad D' = D$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 100 - 64 = 36$ $\quad \sqrt{\Delta} = 6$

$x_1=\frac{10-6}{2\cdot(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ $\qquad x_2=\frac{10+6}{-4}=\frac{16}{-4}=-4$



$f'(x) < 0$, dla $x \in \{(-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)\}$

Odpowiedź: Funkcja jest malejąca dla $x \in \{(-\infty; -4) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)\}$.

ZADANIE 5

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=\frac{5x^2}{(x+5)^2}$.

ROZWIĄZANIE

$f(x)=\frac{5x^2}{(x+5)^2}$ $\quad D = R - \{-5\}$

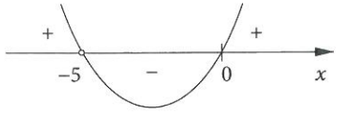
$f'(x)=\frac{(5x^2)'(x+5)^2-5x^2[(x+5)^2]'}{(x+5)^4}=\frac{10x(x^2+10x+25)-5x^2(x^2+10x+25)'}{(x+5)^4}=$

$=\frac{10x^3+100x^2+250x-5x^2(2x+10)}{(x+5)^4}=\frac{10x^3+100x^2+250x-10x^3-50x^2}{(x+5)^4}=\frac{50x^2+250x}{(x+5)^4}$

Ułamek można skrócić, ale wtedy jego znak zależeć będzie od znaku licznika i mianownika, więc lepiej pozostawić ten zapis i rozpatrzeć znak tylko licznika ułamka.

$f'(x)=\frac{50x(x+5)}{(x+5)^4}$ $\quad D' = D$

$x = 0$ $\qquad x = -5$



$f'(x) > 0$, gdy $x \in \{(-\infty; 5) \cup (0; \infty)\}$ $\qquad f'(x) < 0$, gdy $x \in (-5; 0)$

Odpowiedź: Funkcja jest rosnąca dla $x \in \{(-\infty; 5) \cup x \in (0; \infty)\}$, a malejąca dla $x \in (-5; 0)$.

ZADANIE 6

Wyznacz ekstrema funkcji *f*, gdy:

a) $f(x)=2x^6-\frac{12}{5}x^5+3x^4-4x^3+2$, $\qquad$ b) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-1}$, $\qquad$ c) $f(x)=\frac{x^4}{2-x^3}$.

ROZWIĄZANIE

Ad a)

$f(x)=2x^6-\frac{12}{5}x^5+3x^4-4x^3+2$ $\qquad D = R$

$f'(x) = 12x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 12x^2$ $\qquad D' = D$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $\qquad f'(x) = 0$

$12x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 12x^2 = 0$

$12x^2 (x^3 - x^2 + x - 1) = 0 \quad /:12$

$x^2 = 0$ lub $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x = 0$ $\qquad x^2 (x - 1) + (x - 1) = 0$

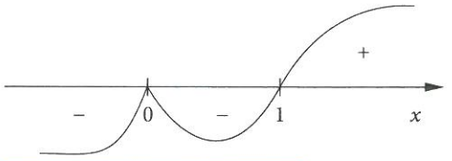
$(x - 1)(x^2 + 1) = 0$

$x - 1 = 0$ lub $x^2 + 1 = 0$ $\qquad$ wyrażenie zawsze dodatnie

$x = 1$

$x_1' = 0$ i $x_2' = 1$ – miejsca zerowe pochodnej

Warunek wystarczający istnienia ekstremum – zmiana znaku pochodnej w otoczeniu miejsc zerowych.



W otoczeniu zera nie zmienia się znak pochodnej, więc nie ma ekstremum dla $x = 0$.

x	...	1	...
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

$y_{min} = f(1) = 2 - \frac{12}{5} + 3 - 4 + 2 = -2\frac{2}{5} + 3 = \frac{3}{5}$

$y_{min} = f(1) = \frac{3}{5}$

Odpowiedź: Minimum funkcji wynosi $\frac{3}{5}$.

Ad b)

$f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-1}$ $\qquad D = R \setminus \{-1, 1\}$

$f'(x)=\frac{(x^2-3x)'(x^2-1)-(x^2-3x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{(2x-3)(x^2-1)-(x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$

$=\frac{2x^3-2x-3x^2+3-2x^3+6x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(x)=\frac{3x^2-2x+3}{(x^2-1)^2}$ $\qquad D' = D$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $\qquad f'(x) = 0$.

$3x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = -2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 - 36 = -32$

To wyrażenie jest zawsze dodatnie. Pochodna nie ma miejsc zerowych.

Odpowiedź: Funkcja nie posiada ekstremum.

Ad c)

$f(x)=\frac{x^4}{2-x^3}$ D: $2-x^3\neq 0$ $x^3\neq 2$ $x\neq\sqrt[3]{2}$ $D=R\setminus\{\sqrt[3]{2}\}$

$$f'(x)=\frac{\left(x^4\right)'\left(2-x^3\right)-x^4\left(2-x^3\right)'}{(2-x^3)^2}=\frac{4x^3\left(2-x^3\right)-x^4\cdot(-3x^2)}{(2-x^3)^2}=\frac{8x^3-4x^6+3x^6}{(2-x^3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^6+8x^3}{(2-x^3)^2} \qquad D=D'$$

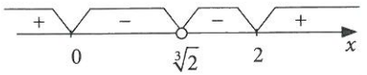
$f'(x)=0$ – warunek konieczny istnienia ekstremum

$-x^6+8x^3=0$ $/\cdot(-1)$ $x^6-8x^3=0$ $x^3(x^3-8)=0$

$x^3=0$ lub $x^3=8$

$x_1'=0$ $x_2'=2$ – miejsca zerowe pochodnej

Warunek wystarczający istnienia ekstremum – zmiana znaku pochodnej w otoczeniu miejsc zerowych.



W pochodnej współczynnik przy najwyższej potędze x jest ujemny, więc krzywą rysujemy od prawej strony do dołu i oba miejsca zerowe występują nieparzystą ilość razy.

x	...	0	...	$\sqrt[3]{2}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	−	×	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	×	↘	min	↗

Funkcja posiada minimum dla $x=0$ i maksimum dla $x=2$. Obliczamy ekstrema.

$y_{max}=f(0)=\frac{0^4}{2-0^3}=0$ $y_{min}=f(2)=\frac{2^4}{2-2^3}=\frac{16}{2-8}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$

Odpowiedź: Ekstrema funkcji to: $y_{max}=f(0)=0$ i $y_{min}=f(2)=-2\frac{2}{3}$.

ZADANIE 7

Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$. Wyznacz: miejsca zerowe, granice na krańcach przedziałów z dziedziny, przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji. Wykorzystując wszystkie informacje, naszkicuj wykres funkcji.

ROZWIĄZANIE

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$ D = R \ {−2, 2}

Miejsca zerowe funkcji

$f(x)=0$ $x^2-1=0$

$x_1=-1$ $x_2=1$

Granice

Zapisujemy dziedzinę za pomocą przedziałów.

D: $x\in\{(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)\}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=1$$

Obliczone wszystkie granice umieścimy na końcu w tabelce.

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{(-2)^2-1}{0^+}\right]=\left[\frac{3}{0^+}\right]=\infty \qquad \lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty \qquad \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-1}{x^2-4}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=\infty$$

Ekstrema i monotoniczność

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2-4\right)-(x^2-1)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{2x\left(x^2-4\right)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3+2x}{(x^2-4)^2}$$

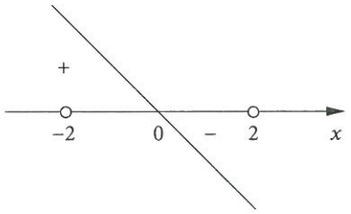
$$f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2} \qquad D'=D$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f'(x)=0$.

$-6x=0$

$x_1=0$ – miejsce zerowe pochodnej

Warunek wystarczający istnienia ekstremum – zmiana znaku pochodnej w otoczeniu miejsca zerowego.



x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

$y_{max}=f(0)=\frac{0^2-1}{0^2-4}=\frac{1}{4}$ – ekstremum

Monotoniczność

$f'(x)>0$, gdy $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)$

Funkcja jest rosnąca, gdy $x\in\{(-\infty;-2)\cup x\in(-2;0\rangle\}$.

$f'(x)<0$, gdy $x\in\{(0;2)\cup(2;\infty)\}$

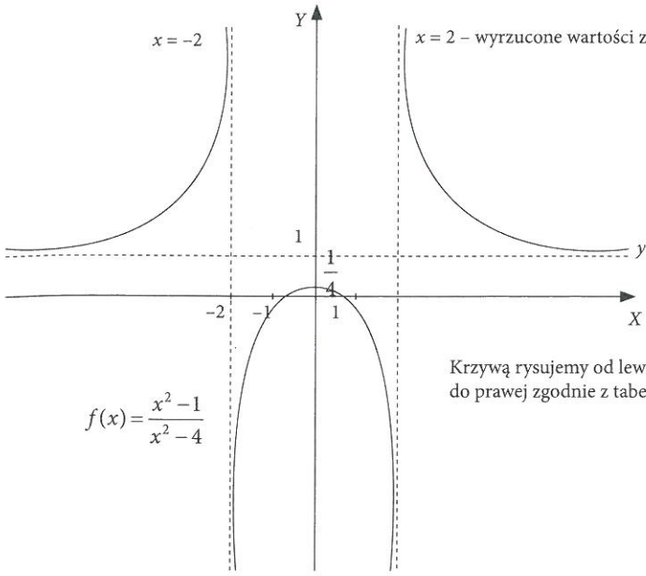
Funkcja jest malejąca, gdy $x\in\langle 0;2)$ oraz $x\in(2;\infty)$.

Wszystkie dane umieścimy w tabelce. W rubrykach przeznaczonych na wartości x umieszczamy miejsca zerowe funkcji, miejsca zerowe pochodnej i wszystkie wartości z dziedziny. Znak pochodnej bierzemy z wykresu, a przy strzałkach określających monotoniczność funkcji wpisujemy wartości granic. Pomiędzy wartościami x można wpisywać przedział liczbowy lub krócej wielokropek.

Tabelka

x	$-\infty$	...	−2	...	−1	...	0	...	1	...	2	...	∞
$f'(x)$	+	+	×	+	+	+	0	−	−	−	×	−	+
$f(x)$	1	$\nearrow^{\infty}$	×	$\nearrow^{\infty}$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	$\searrow_{-\infty}$	×	$\searrow_{-\infty}$	1

Wszystkie wpisane w rubryce f(x) symbole $-\infty$ i ∞ są zgodne z obliczonymi wcześniej wartościami granic odpowiednio z lewej i prawej strony liczb −2 i 2. Gdy x dąży do $-\infty$ oraz ∞ wartość funkcji zgodnie z obliczoną granicą dąży do 1.



Krzywą rysujemy od lewej strony do prawej zgodnie z tabelką.

ZASTOSOWANIE POCHODNEJ DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW OPTYMALIZACYJNYCH

■ UŻYTECZNE WZORY I INFORMACJE

W zadaniach optymalizacyjnych wskazana jest wielkość, która ma być największa lub najmniejsza. Korzystamy z danych i tworzymy funkcję. Dla danej funkcji szukamy ekstremum i zgodnie z treścią zadania zapisujemy odpowiedzi.
Jeżeli utworzona funkcja jest funkcją kwadratową, do obliczenia ekstremum nie musimy wykorzystywać pochodnej, ponieważ funkcja kwadratowa ma wartość największą lub najmniejszą w wierzchołku paraboli, który wystarczy obliczyć.

ZADANIE 1

Dodatnią liczbę m przedstaw w postaci sumy dwóch dodatnich składników, aby suma ich odwrotności była najmniejsza.

ROZWIĄZANIE

Dane: m

$x + y = m$ $\quad x = ?,\ y = ?,\ x > 0$ i $y > 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ – ma być najmniejsza

$y = m - x$

Tworzymy funkcję, wyznaczamy y z danej sumy i podstawiamy do powstałej funkcji.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{m-x} = \frac{m-x}{x(m-x)} + \frac{x}{x(m-x)} = \frac{m-x+x}{x(m-x)} = \frac{m}{x(m-x)}$$

m – dana dowolna liczba

D: $x > 0$ i $m - x > 0$

$x < m$ czyli $x \in (0; m)$

$$f(x) = \frac{m}{x(m-x)}$$

$$f'(x) = \frac{(m)' \cdot x(m-x) - m \cdot [x(m-x)]'}{[x(m-x)]^2} = \frac{0 \cdot x(m-x) - m(xm - x^2)'}{x^2(m-x)^2} = \frac{-m(m-2x)}{x^2(m-x)^2} = \frac{-m^2 + 2mx}{x^2(m-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2mx - m^2}{x^2(m-x)^2}$$ – pochodna funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f'(x) = 0$.

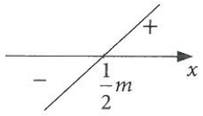
$2mx - m^2 = 0 \quad /:m$

$2x - m = 0$

$2x = m \quad /:2$

$x' = \frac{1}{2}m$ – miejsce zerowe pochodnej

Warunek wystarczający istnienia ekstremum – zmiana znaku pochodnej w otoczeniu miejsca zerowego.



Znak zależy od licznika pochodnej, w którym jest funkcja liniowa o dodatnim współczynniku kierunkowym.

x	...	$\frac{1}{2}m$	...
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

W najbliższym otoczeniu miejsca zerowego znak pochodnej przechodzi ze znaku minus w plus, więc funkcja osiąga minimum, co zgadza się z treścią zadania.

$y = m - x = m - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$

Obliczamy drugi składnik.

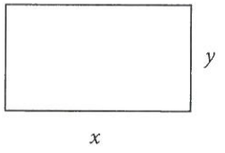
$x = \frac{1}{2}m \quad i \quad y = \frac{1}{2}m$

Odpowiedź: Suma odwrotności składników jest najmniejsza, gdy oba składniki są jednakowe i mają wartość $\frac{1}{2}m$.

ZADANIE 2

Wyznacz wymiary prostokąta o polu P tak, aby jego obwód był najmniejszy.

ROZWIĄZANIE



Dane: P

$x = ?,\ y = ?\ x > 0, y > 0$

Wzory: $P = xy \quad y = \frac{P}{x}$

Ob_{min}

$$Ob = 2x + 2y = 2x + \frac{2}{1}\cdot\frac{P}{x} = 2x + \frac{2P}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{2P}{x} = \frac{2x^2+2P}{x}$$

$$Ob = \frac{2(x^2+P)}{x} = 2\cdot\frac{x^2+P}{x}$$

Jeżeli w końcowym zapisie wzoru, w którym jest tylko jedna niewiadoma, można wyłączyć przed nawias dodatnią liczbę, to tworząc funkcję, możemy ją pominąć.

$$f(x) = \frac{x^2+P}{x} \qquad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+P)'x + (x^2+P)\cdot(x)'}{x^2} =$$

Pomimo że x jest długością buku i musi być dodatnie, do wykonania wykresu pochodnej zaznaczamy wszystkie miejsca zerowe, ale zmiana znaku interesuje nas tylko w najbliższym otoczeniu dodatniego miejsca zerowego.

$$= \frac{2x\cdot x - (x^2+P)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - P}{x^2}$$

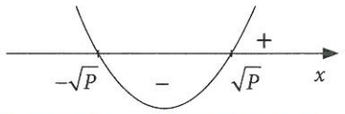
$$f'(x) = \frac{x^2-P}{x^2}$$ – pochodna funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f'(x) = 0$, $x > 0$.

$x^2 - P = 0$

$(x+\sqrt{P})(x-\sqrt{P}) = 0$

$x = -\sqrt{P}$ $\qquad$ $x = \sqrt{P}$



x	...	$\sqrt{P}$	...
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	min	↗

Warunek wystarczający istnienia ekstremum – zmiana znaku w otoczeniu miejsca zerowego.

$x = \sqrt{P}$

$$y = \frac{P}{x} = \frac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{P^2}{P}} = \sqrt{P} \qquad y = \sqrt{P}$$

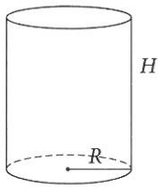
Obliczamy długość drugiego boku.

Odpowiedź: Obwód prostokąta jest najmniejszy, gdy prostokąt jest kwadratem o boku długości $\sqrt{P}$.

ZADANIE 3

Jakie wymiary powinna mieć puszka na konserwy w kształcie walca, mająca pole powierzchni całkowitej równe $216\pi\text{cm}^2$, aby jej pojemność była największa? Ile wyniesie ta pojemność?

ROZWIĄZANIE



Dane:
$P_c = 216\pi\ \text{cm}^2$
$R = ?\quad H = ?$
$V_{max} = ?$

Wzory:
$P_c = 2P_p + P_b$
$P_c = 2\pi R^2 + 2\pi RH$
$V = P_p H$
$V = \pi R^2 H$

$2\pi R^2 + 2\pi RH = 216\pi \quad /:2\pi$

$R^2 + RH = 108 \qquad RH = 108 - R^2 \quad /:R$

Wyznaczamy H i podstawiamy do wzoru na objętość.

$$H = \frac{108 - R^2}{R}$$ – wyznaczona wysokość

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{108 - R^2}{R} = \pi R\left(108 - R^2\right) = \pi(-R^3 + 108R)$$

Tworzymy funkcję z niewiadomą R, pomijając wyłączoną przed nawias liczbę π.

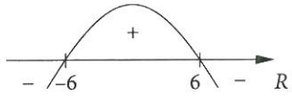
$f(R) = -R^3 + 108R \qquad f'(R) = -3R^2 + 108$

Warunek konieczny istnienia ekstremum: $f'(R) = 0$.

$-3R^2 + 108 = 0 \quad /:(-3) \qquad R^2 - 36 = 0$

$R_1 = -6 \qquad \underline{R = 6}$

Promień musi być dodatni.



R	...	6	...
$f'(R)$	+	0	-
$f(R)$	↗	max	↘

Warunek wystarczający istnienia ekstremum to zmiana znaku pochodnej w otoczeniu miejsca zerowego.

$$H = \frac{108 - R^2}{R} = \frac{108 - 6^2}{6} = \frac{108 - 36}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

$R = 6$ cm i $H = 12$ cm – wymiary puszki

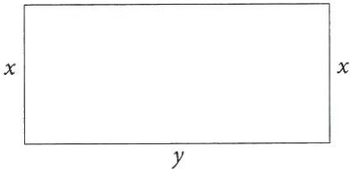
$V = \pi R^2 H = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 432\pi \approx 432 \cdot 3{,}14 = 1356{,}48\ \text{cm}^3 \approx 1{,}36$ [l]

Odpowiedź: Największą pojemność, wynoszącą 1,36 litra, będzie miała puszka w kształcie walca o promieniu 6 cm i wysokości 12 cm.

ZADANIE 4

Ratownik ma do dyspozycji linę o długości 100 metrów i chce przy brzegu plaży wytyczyć kąpielisko dla dzieci w kształcie prostokąta o największej powierzchni. Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko i jaką będzie miało powierzchnię?

ROZWIĄZANIE



$y = 100 - 2x$

$P = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x = 2(-x^2 + 50x)$

$f(x) = -x^2 + 50x$

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową, jej największa wartość jest w wierzchołku. Zadanie to możemy również rozwiązać z wykorzystaniem pochodnej.

$$x = p = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2\cdot(-1)} = 25\ \text{cm}$$

$y = 100 - 2x = 100 - 50 = 50$ m $\qquad P = xy = 25 \cdot 50 = 1250\ \text{m}^2$

Odpowiedź: Kąpielisko będzie miało długość 50 m, szerokości 25 m, a jego powierzchnia wyniesie $1250\ \text{m}^2$.

INDEKS POJĘĆ

B

bezwzględny błąd przybliżenia – 14
błąd przybliżenia – 14

C

ciąg arytmetyczny – 106
ciąg geometryczny – 113
ciąg liczbowy – 102
ciąg określony rekurencyjnie – 290
ciągi zbieżne do zera – 291
cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – 88
cotangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – 88

D

deltoid – 133
dziedzina wyrażenia wymiernego – 254

E

ekstrema lokalne – 370
ekstremum – 370

F

funkcja f – 36
funkcja liniowa – 45
funkcja logarytmiczna – 264
funkcja wykładnicza – 83
funkcje trygonometryczne – 88, 269

G

graniastosłup prawidłowy – 158
graniastosłup prosty – 158

I

iloraz ciągu geometrycznego – 113
iloraz różnicowy – 363
interpretacja fizyczna pochodnej – 364
interpretacja geometryczna pochodnej – 364

J

jednokładność – 307
jedynka trygonometryczna – 94

K

klasyczna definicja prawdopodobieństwa – 187

kombinacje – 349
kula – 174

L

logarytm $log_a c$ liczby $c > 0$ – 31

M

mediana – 181
miara łukowa kąta – 269
miejsce zerowe funkcji – 36, 39
moda (dominanta) danych – 180
monotoniczność funkcji – 36, 45

O

odchylenie standardowe – 181
ogólny wyraz ciągu arytmetycznego – 106
okręgi przecinające się – 126
okręgi rozłączne zewnętrznie – 126
okręgi styczne zewnętrznie – 126
okręgi wewnętrznie rozłączne – 126
okręgi wewnętrznie styczne – 126
okręgi współśrodkowe – 126

P

permutacje – 348
pierwiastek arytmetyczny – 18
pochodna funkcji w punkcie – 363
podstawa stożka – 174
postać iloczynowa funkcji kwadratowej – 58
postać kanoniczna funkcji kwadratowej – 57
postać ogólna funkcji kwadratowej – 57
prawdopodobieństwo całkowite – 352
prawdopodobieństwo warunkowe – 351
procent $p\%$ liczby a – 25
procent prosty – 119
procent składany – 119
proporcjonalność odwrotna – 78
proste prostopadłe – 138
proste równoległe – 138
prostopadłościan – 159
punkt procentowy – 25

R

romb – 132
równanie kierunkowe prostej – 138
równanie ogólne prostej – 138, 317
równoległobok – 132
równość wielomianu – 237

S

sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – 88
stopa procentowa – 119
stopień wielomianu $W(x)$ – 237
stożek – 174
styczna do okręgu – 126
symetria osiowa – 156
symetria środkowa – 156
sześcian – 159

Ś

średnia arytmetyczna – 180
średnia ważona – 180
środek ciężkości trójkąta – 132
środkowa trójkąta – 132

T

tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – 88
trapez – 132
twierdzenie cosinusów – 311
twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym – 352
twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa – 305
twierdzenie sinusów – 311
twierdzenie Talesa – 304

W

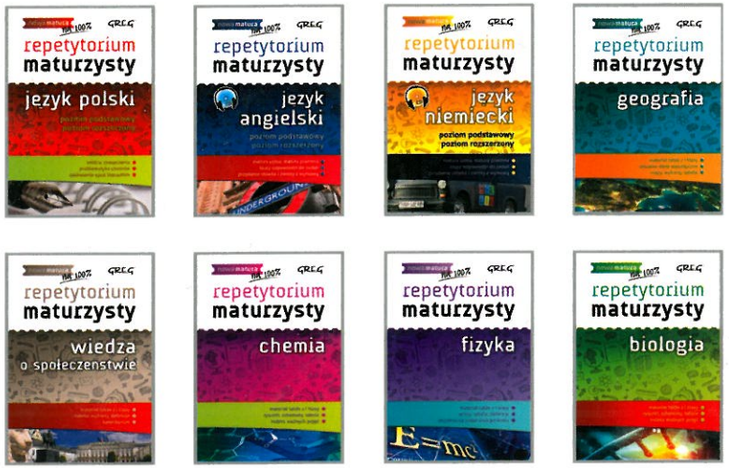
walec – 173
wariacje – 348
wariancja – 181

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x – 204
wektor – 333
wektor swobodny – 334
wielomian stopnia n zmiennej x – 237
własności podobieństwa – 186
współczynnik kierunkowy – 45
wyraz wolny (stały) – 45
wyrażenie wymierne – 254
wzory skróconego mnożenia – 15, 201
wzory Viete'a – 226

Z

zbiór X – 36
zbiór Y – 36

w serii ukazały się



Seria ***Repetytorium Maturzysty*** wydawnictwa Greg

- dostosowana do aktualnych standardów maturalnych
- zgodna z nową podstawą programową
- napisana zrozumiałym językiem
- zawierająca wszystkie konieczne wiadomości
- niezbędna w przygotowaniach do matury

wydawnictwo edukacyjne GREG

Wydawnictwo GREG
ul. Klasztorna 2B • 31-979 Kraków
www.greg.pl

ISBN 978-83-7517-541-7