

ANDRZEJ KIEŁBASA
PIOTR ŁUKASIEWICZ

MATURA
z
MATEMATYKI
2012 2013 2014

poziom
podstawowy i rozszerzony

CZĘŚĆ II

2000
WYDAWNICTWO

Konsultacja merytoryczna

JOANNA KIELBASA
EWA KOŁOSOWSKA

Korektor

RENATA DZIERŻKO

Projekt okładki

JOANNA PRZYBYLSKA

Redaktor techniczny

PAWEŁ DEMBSKI

ISBN 978 - 83 - 929490 - 2 - 2 całość

ISBN 978 - 83 - 929490 - 3 - 9 (część II)

© WYDAWNICTWO „2000”
WARSZAWA 2011

Wydawnictwo „2000”
ul. Małego Rycerza 14 D
03 - 289 Warszawa
tel. (22) 674 15 84, (22) 448 42 71

Skład oraz Druk
EMC PRINT s.c.
Warszawa
tel./fax: (22) 842 52 50

Niniejszy zbiór zadań powstał po dokonaniu wnikliwej analizy tego, co w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki dla ucznia i nauczyciela jest najważniejsze, czyli opisu wymagań egzaminacyjnych opracowanych przez OKE i CKE i zamieszczonych w *Informatorze o egzaminie maturalnym* dla osób zdających maturę od 2010 roku. Niektóre sformułowania cytowanych w książce wymagań egzaminacyjnych zaczerpnięte zostały z *Informatora o egzaminie maturalnym* opracowanego dla zdających maturę z matematyki w latach 2008 – 2009.

Zbiór zadań wydany został w dwóch częściach. Każdy z rozdziałów *Części II* (z wyjątkiem rozdziałów 8 i 9) składa się z trzech części:

1. **CZĘŚĆ TEORETYCZNA** zawiera niektóre definicje oraz wszystkie te wzory i twierdzenia, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań maturalnych.
Na uwagę zasługuje podział wiadomości teoretycznych na te, które wymagane są od każdego maturzysty oraz te, które wymagane są tylko na poziomie rozszerzonym.
2. **ZADANIA WPROWADZAJĄCE** to seria prostych rachunkowo zadań, starannie dobranych pod kątem poszczególnych haseł zawartych w opisie *wymagań egzaminacyjnych*. Analiza tych zadań da uczniowi pewność, że nie pominął w przygotowaniach do matury żadnego zagadnienia, które może pojawić się na egzaminie maturalnym.
Aby ułatwić maturzystę samodzielne przygotowanie do egzaminu, do większości zadań wprowadzających podano rozwiązania lub wskazówki.
Poważne podejście do zadań z tej części rozdziału jest podstawą, a zarazem gwarancją sukcesu na egzaminie maturalnym.
3. **ZADANIA MATURALNE** to zadania formą i skalą trudności odpowiadające tym, których możemy się spodziewać na egzaminie maturalnym.
Aby ułatwić korzystanie ze zbioru, ta część rozdziału została podzielona na podrozdziały i sekcje.

Cechą charakterystyczną zbioru jest taki układ zadań, który od ucznia rozwiązującego zadania z danego działu, nie wymaga znajomości zagadnień z działów następnych. Jest to duże udogodnienie, szczególnie dla tych maturzystów, którzy mają poważne braki w wymaganej wiedzy.

Duża liczba zadań zamieszczonych w książce wymaga wypracowania odpowiedniego trybu pracy. Maturzystom zdającym matematykę tylko na poziomie podstawowym radzimy, aby pomijali zadania przeznaczone dla poziomu rozszerzonego. Natomiast osobom zdającym maturę na obu poziomach proponujemy, aby zapoznali się z treścią wszystkich zadań, ale rozwiązywali przede wszystkim te, które w ich ocenie mogą sprawić jakiś problem.

Jesteśmy przekonani, że pozycja ta zainteresuje również tych uczniów klas młodszych, którzy już myślą o egzaminie maturalnym z matematyki.

Informujemy, że w *Części I* książki znalazły się rozdziały:

- | | |
|---|--|
| 1. Wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności algebraiczne. | 7. Funkcje wymierne. |
| 2. Liczby rzeczywiste. Zbiory. | 8. Funkcja wykładnicza. |
| 3. Funkcje. | 9. Funkcja logarytmiczna. |
| 4. Funkcja liniowa. | 10. Trygonometria. |
| 5. Funkcja kwadratowa. | 11. Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania. |
| 6. Wielomiany. | |

PRZYJĘTE W KSIĄŻCE OZNACZENIA

- ⇒ – wiadomości teoretyczne wymagane na obu poziomach
⇒ – wiadomości teoretyczne wymagane tylko na poziomie rozszerzonym

Wymagania egzaminacyjne (zamieszczone w ramach w części rozdziału ZADANIA WPROWADZAJĄCE) odnoszące się do poziomu rozszerzonego wyróżnione zostały wytłuszczoną czcionką w kolorze czerwonym.

Zadania i podpunkty zadań przeznaczonych dla zdających matematykę także na poziomie rozszerzonym wyróżnione zostały kolorem czerwonym.

- W – do zadania podano wskazówkę
R – do zadania podano rozwiązanie
* – zadanie o podwyższonej skali trudności

NIKTÓRE SYMBOLE (OZNACZENIA) MATEMATYCZNE

Symbol (oznaczenie)	Czytamy
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
$A \cup B$	suma zdarzeń A i B
$A \cap B$	iloczyn zdarzeń A i B
$A \setminus B$	różnica zdarzeń A i B
$A \subset B$	zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B
$ \Omega $	liczba wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego
$ A $	liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$\angle ABC$	kąt ABC
$o(S, r)$	Okrag o srodoku w punkcie S i promieniu dlugosci r
$\triangle ABC \equiv \triangle KLM$	trójkąty ABC i KLM są przystające
$\triangle ABC \sim \triangle KLM$	trójkąty ABC i KLM są podobne

1. CIĄGI

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

OZNACZENIA

- ⇒ (a_n) – ciąg, którego wyrazami są liczby $a_1, a_2, a_3, \dots$
⇒ a_n – n -ty wyraz ciągu (a_n) , np. a_3 – trzeci wyraz ciągu (a_n) .

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

- ⇒ Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).
⇒ Ciąg (a_n) jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

CIĄG ARYTMETYCZNY

- ⇒ Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba r , że $a_{n+1} - a_n = r$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.
⇒ Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) : $a_n = a_1 + (n-1)r$.
⇒ Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) : $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ lub $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$.
⇒ Związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) : $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

CIĄG GEOMETRYCZNY

- ⇒ Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba q , że $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.
⇒ Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) : $a_n = a_1 q^{n-1}$.
⇒ Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) : $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, gdy $q \neq 1$ i $S_n = na_1$, gdy $q = 1$.
⇒ Związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n) : $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

PROCENT SKŁADANY

- ⇒ Kapitał K_n po n okresach kapitalizacji wyraża się wzorem $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, gdzie
 K_0 – kapitał początkowy, $p\%$ – stopa procentowa (taka sama w każdym okresie),
 n – liczba okresów kapitalizacji (miesiące, kwartały, lat itp.).

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi • wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym

1.1 Wyznacz trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym

- a) $R \ a_n = \frac{4n+13}{2n-1}$; b) $a_n = (3n-2)^2$; c) $a_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$;
d) $a_n = (-1)^n \cdot n$; e) $a_n = 2^{n-2}$; f) $R \ a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

1.2 R Sprawdź, czy istnieją takie wyrazy ciągu (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 2n^2 - 9n + 11$, które są równe 7.

- 1.3 R Ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 89, jeśli n -ty wyraz tego ciągu jest równy $4n-5$?
- 1.4 R Ile wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 7n - 30$ jest liczbami ujemnymi?
- 1.5 R Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2$. Wyraż, w zależności od n , różnicę a) $a_{n+1} - a_n$; b) $a_{2n} - a_n$.
- 1.6 Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2n+5}{n+2}$. Zbadaj znak różnicy $a_{n+1} - a_n$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, a następnie określ monotoniczność ciągu (a_n) .

Zdający potrafi • określać ciąg wzorem ogólnym

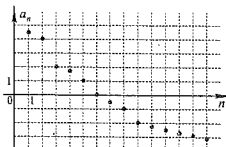
- 1.7 Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) określonego w następujący sposób:
a) ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych dodatnich liczb parzystych;
b) n -ty wyraz ciągu (a_n) jest odwrotnością liczby n ;
c) ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1.

- 1.8 Podaj wzór pięciowyrazowego ciągu a) 1, 8, 27, 64, 125; b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}$; c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$.

- 1.9 R Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 5n + 1$.
a) Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) .
b) Oblicz drugi wyraz ciągu (a_n) .
c) Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) , dla $n \geq 2$.

Zdający potrafi • podawać własności ciągu na podstawie jego wykresu

- 1.10 Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym. Korzystając z przedstawionego fragmentu wykresu ciągu (a_n) , odpowiedz na poniższe pytania.



- a) Który wyraz ciągu (a_n) jest równy -2 ?
b) Ile wyrazów ciągu (a_n) jest większych od -1 ?
c) R Czy liczba $a_{2000} - a_{1000}$ jest dodatnia czy ujemna?

- 1.11 Sporządź wykres ciągu (a_n) , jeśli a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = \frac{12}{n+1}$ i $n \leq 8$; c) $a_n = 0,5n^2 - 3,5n + 2$ i $n \leq 7$.

Zdający potrafi • badać czy ciąg jest arytmetyczny

- 1.12 Zbadaj, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeśli jest określony wzorem
a) $R a_n = 2n$; b) $a_n = 2$; c) $R a_n = n^2$; d) $a_n = \sqrt{5} - \sqrt{2}n$;
e) $a_n = an + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$; f) $a_n = \log_2 3^{2n+1}$.

- 1.13 Sprawdź, czy liczby a, b, c tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny.
a) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{6}$; b) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{12}$; c) $R a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}-1$.

- 1.14 Wyznacz te wartości x , dla których poniższe liczby tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny.
a) $R 2x+1, 4x-1, x+7$; b) $3x-4, x^2+1, x^2+2x$;
c) $2, \log_4(x-3), 3$; d) $R \frac{1}{\cos x}, 0,5\lg x, -\cos x$.

Zdający potrafi

- wyznaczać ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych
- obliczać sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego
- stosować własności ciągu arytmetycznego w zadaniach (także tekstowych)

- 1.15 R Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 7 i jest dwa razy mniejszy od wyrazu szóstego.
a) Znajdź różnicę ciągu.
b) Oblicz dwudziesty pierwszy wyraz ciągu.
c) Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .

- 1.16 R Drugi wyraz ciągu arytmetycznego (b_n) jest równy 8, a suma wyrazów piątego i siódmego wynosi 40.
a) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (b_n) .
b) Znajdź wzór na n -ty wyraz ciągu (b_n) .

- 1.17 R Oblicz sumę a) $1+2+3+\dots+49$; b) $20+21+22+\dots+60$; c) $1+4+7+10+\dots+55$.

- 1.18 R Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 4, a jego różnica równa jest 0,5. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 189. Oblicz liczbę wyrazów ciągu (a_n) .

- 1.19 R Pierwszy wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 3, a iloczyn wyrazów czwartego i piątego równy jest 15.
a) Oblicz różnicę ciągu (a_n) .
b) Oblicz sumę czternastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- 1.20 R Do obsługi gości na przyjęciu weselnym zatrudniono dwóch kelnerów. Kelnerzy za pierwszą godzinę pracy dostali po 10 zł, a za każdą następną godzinę młodszy otrzymał o 5 zł więcej, a starszy o 10 zł więcej niż za poprzednią. Przy wypłacie okazało się, że starszy kelner zarobił o 60% więcej niż młodszy. Wiedząc, że czas trwania przyjęcia wyraża się całkowitą liczbą godzin, oblicz
a) ile godzin trwało przyjęcie?
b) ile zarobił każdy z kelnerów?

Zdający potrafi • badać czy ciąg jest geometryczny

- 1.21 Zbadaj, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, jeśli n -ty wyraz tego ciągu jest równy
a) $R a_n = 3^n$; b) $R a_n = 3n$; c) $a_n = 3$; d) $a_n = n^3$;
e) $a_n = 2^{3n-2}$; f) $a_n = \frac{4^{n+1}}{5^{2n-3}}$; g) $a_n = b \cdot c^n$, gdzie $b, c \in \mathbb{R}$; h) $a_n = \cos n\pi$.

- 1.22 Sprawdź, czy liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego
a) $R a = 18, b = -12, c = 8$; b) $a = \sqrt{2}-1, b = 1, c = \sqrt{2}+1$; c) $R a = \sqrt{3}+1, b = 3+\sqrt{3}, c = 3\sqrt{3}+1$.

- 1.23 Znajdź takie liczby rzeczywiste x , aby poniższe liczby tworzyły (w podanej kolejności) ciąg geometryczny.
a) $R 2, x, 18$; b) $R x-3, 2x-6, 4x$; c) $R x^{-1}, x^2, 5x^3-4x$; d) $\cos x, \sin x, \lg x$.

Zdający potrafi

- wyznaczać ciąg geometryczny na podstawie wskazanych danych
- obliczać sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego
- stosować własności ciągu geometrycznego w zadaniach (także tekstowych)

- 1.24 R Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 6, a iloraz dziesiątego wyrazu i wyrazu szóstego równy jest 16. Wiedząc, że ciąg (a_n) nie jest monotoniczny
- a) znajdź jego iloraz; b) oblicz jego szósty wyraz; c) wyznacz wzór na wyraz ogólny tego ciągu.
- 1.25 Oblicz sumę wiedząc, że kolejne składniki są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego
- a) $1+2+4+\dots+512+1024$; b) $R \quad \frac{81}{32} - \frac{27}{16} + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$.
- 1.26 R Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\frac{1}{3}$, a suma jego pięciu początkowych wyrazów wynosi -605 .
- a) Znajdź pierwszy wyraz ciągu (a_n) . b) Określ monotoniczność ciągu (a_n) .
- 1.27 R Kaucukową piłeczkę upuszczono z wysokości 2,43 m. Za każdym razem po odbiciu od podłoża piłeczka wznosi się na wysokość równą dwóm trzecim wysokości, z której poprzednio spadała. Znajdź największą wysokość, na której znalazła się piłka pomiędzy piątym i szóstym odbiciem.

Zdający potrafi

- stosować procent składany w zadaniach również dotyczących oprocentowania lokat i kredytów

- 1.28 R W 2000 roku zbiory zbóż w gospodarstwie pana Kargula wyniosły 25 ton. W czterech kolejnych latach zbiory zbóż były o 20% większe od zbiorów z roku poprzedniego. Ile ton zbóż zebrał pan Kargul w 2004 roku? Wynik podaj po zaokrągleniu do jedności.
- 1.29 R Przedsiębiorca pożyczył od kolegi pewną kwotę, z zamiarem zainwestowania pieniędzy w bardzo ryzykowne przedsięwzięcie. Panowie umówili się, że pożyczka nie będzie spłacana w ratach, ale cała kwota wraz z odsetkami zostanie zwrócona jednorazowo. Ustalono, że oprocentowanie pożyczki wynosić będzie 50% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotę pożyczył przedsiębiorca, jeżeli po pięciu latach zwrócił koledze 243 000 zł?
- 1.30 R Pan José Borrego wpłacił do banku w Buenos Aires 200 000 \$ na czteroletnią lokatę o stałym oprocentowaniu, z roczną kapitalizacją odsetek. Po czterech latach stan jego konta wyniósł 414 720 \$. Jakie było oprocentowanie tej lokaty?

Zdający potrafi

- wyznaczać wyrazy ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie

- 1.31 Oblicz drugi i trzeci wyraz ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie
- a) $R \quad a_1 = 1 \text{ i } a_{n+1} = 3a_n - 1 \text{ dla } n \geq 1$; b) $R \quad a_1 = 2 \text{ i } a_{n+1} = a_n + n \text{ dla } n \in \mathbb{C}_+$;
- c) $a_1 = 3 \text{ i } a_n = a_{n-1}^2 - 3 \text{ dla } n \geq 2$; d) $a_1 = 4 \text{ i } a_{n+1} = na_n - n^2 \text{ dla } n \geq 1$.
- 1.32 Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym
- a) $R \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \pi \\ a_n = \cos a_{n-1} + \cos a_{n-2} \text{ dla } n \geq 3 \end{cases}$.

ZADANIA MATURALNE

RÓŻNE SPOSOBY OKREŚLANIA CIĄGU

1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^3 + 20n + 4$.
- a) Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) .
- b) O ile procent trzeci wyraz ciągu (a_n) jest większy od wyrazu drugiego?
2. R Dany jest ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 3n - 1$.
- a) Podaj współrzędne dwóch punktów, które należą do wykresu ciągu (b_n) .
- b) Ile wyrazów ciągu (b_n) należy do przedziału $(20; 49)$?
3. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+15}{n}$.
- a) Sprawdź, czy istnieje wyraz ciągu (a_n) , który jest równy 1,6.
- b) R Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest większych od 3.
- c) R Wyznacz wszystkie te wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami naturalnymi.
4. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 3n - 54$.
- a) Trójmian $n^2 - 3n - 54$ zapisz w postaci iloczynowej.
- b) Nie korzystając z kalkulatora, rozstrzygnij, czy pięćdziesiąty ósmy wyraz ciągu (a_n) jest kwadratem liczby naturalnej.
- c) R Znajdź ten wyraz ciągu (a_n) , który jest o 20 większy od wyrazu poprzedniego.
5. Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób: n -ty wyraz ciągu (a_n) jest równy liczbie liczb pierwszych nie większych od n .
- a) Podaj trzynasty wyraz ciągu (a_n) .
- b) Które wyrazy ciągu (a_n) są równe 4?
- c) Sporządź wykres ciągu (a_n) dla $n \leq 8$.
6. Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób: $a_1 = 1$, zaś n -ty wyraz ciągu (a_n) , gdy $n \geq 2$, jest największym dzielnikiem liczby n mniejszym od n .
- a) Wyznacz a_{44} i a_{51} .
- b) Naskicuj wykres ciągu (a_n) dla $n \leq 10$.
- c) Dla jakich n zachodzi równość $a_n = 1$?
- d) Ile wyrazów ciągu (a_n) jest równych 2? Odpowiedź uzasadnij.
7. R Oblicz sumę dziewięćdziesięciu dziewięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \log \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.
8. R Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób: dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyraz a_n jest równy sumie kwadratów n początkowych dodatnich liczb całkowitych. Ciąg (b_n) określa równość $b_n = a_{n+2} - a_n$. Który wyraz ciągu (b_n) równy jest 85?

9. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3n - 4$. Znajdź takie liczby k , aby kwadrat wyrazu a_k był o 28 większy od różnicy kwadratów wyrazów z nim sąsiadujących.
10. W Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^3$.
 a) Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) . b) Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) .
 c) Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) dla $n \geq 2$.
11. Definicja. Ciąg, którego dwa początkowe wyrazy są równe 1, a każdy następny jest sumą dwóch wyrazów poprzednich, nazywamy ciągiem Fibonacciego.
 a) Oblicz trzeci i piąty wyraz ciągu Fibonacciego.
 b) W Jaką liczbą, parzystą czy nieparzystą, jest pięćset dwudziesty ósmy wyraz ciągu Fibonacciego? Odpowiedź uzasadnij.
 c) Zapisz ciąg Fibonacciego wzorem rekurencyjnym.
12. W Suma ilu początkowych wyrazów ciągu (a_n) , określonego wzorem $a_n = 2n^2 - 17n - 42$, jest najmniejsza?
13. Ciągi (a_n) i (b_n) są dwuwyzrazowe. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2$ dla każdego $n \in \{1, 2, \dots, 200\}$, a ciąg (b_n) określa równość $b_n = a_{201-n}$.
 a) Oblicz sto dziewięćdziesiąty wyraz ciągu (b_n) .
 b) Znajdź taką liczbę k , aby wyraz a_k był cztery razy większy niż wyraz b_k .
14. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 + pn + p$, gdzie $p \in \mathbb{R}$.
 a) Które wyrazy ciągu (a_n) są równe -9 , jeżeli $p = -5$.
 b)* W Wykaż, że nie istnieje taka liczba całkowita p , że dwa wyrazy ciągu (a_n) są równe -3 .
15. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n - 3n + 1$ dla $n \geq 1$.
 a) Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) . b) R Określ monotoniczność ciągu (a_n) .
16. R Wyznacz te wartości parametru p , dla których ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 + pn$ jest rosnący.
17. R Który wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n^3 - 39n^2 + 504n - 150$ jest równy jego dwunastemu wyrazowi?
- 18.* R Rozstrzygnij, czy istnieją takie dwa wyrazy ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^3 + 10n + 2010$, które różnią się o 219.

CIĄG ARYTMETYCZNY

19. Liczby 55, 51, 47 są początkowymi wyrazami malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) .
 a) R Oblicz szesnasty wyraz ciągu (a_n) .
 b) Podaj wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) .
 c) Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

20. Suma pierwszego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 18. Trzydziesty wyraz ciągu (a_n) jest o 12 większy od wyrazu czternastego. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) oraz różnicę tego ciągu.
21. R Suma szóstego i szesnastego wyrazu rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 5, a iloczyn wyrazu ósmego i dwunastego równy jest 3. Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .
22. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2n + 5$.
 a) Uzasadnij (na podstawie definicji), że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
 b) Suma ilu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa -140 .
23. Trzy początkowe wyrazy malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$.
 a) Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.
 b) Oblicz sumę $a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{37}$.
24. Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 6. Obliczymy sumę siedmiu jego kolejnych wyrazów, poczynając od wyrazu piątego.
 • Niech r oznacza różnicę ciągu (a_n) . Wówczas $a_5 = a_8 - 3r$, $a_6 = a_8 - 2r$, $a_7 = a_8 - r$, $a_9 = a_8 + r$, $a_{10} = a_8 + 2r$, $a_{11} = a_8 + 3r$.
 • Zatem $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = a_8 - 3r + a_8 - 2r + a_8 - r + a_8 + a_8 + r + a_8 + 2r + a_8 + 3r = 7a_8 = 42$.
 Pięćdziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego (b_n) jest równy 5. Wykorzystując przedstawioną metodę, oblicz
 a) $b_{49} + b_{50} + b_{51}$; b) sumę dziewięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) ;
 c) $S_{60} - S_{39}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (b_n) .
25. Suma dziesiątego, dwudziestego i trzydziestego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 30. Oblicz sumę trzydziestu dziewięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
26. R Uzasadnij, że liczby $a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}(1-\sqrt{6})$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.
27. R Uzasadnij, że liczby $a = 32^{10}$, $b = 17 \cdot 8^{15}$, $c = 4^{23}$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
28. Uzasadnij, że liczby $\log_3 \lg 60^\circ$, $\log_5 \lg 45^\circ$, $\log_2 \sin 45^\circ$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
29. Sprawdź, czy liczby $\log_3 2$, $\log_3 (\sqrt{3}-1)$, $\log_3 (2-\sqrt{3})$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
30. Liczby $2x^3 - 5x$, $x^2 + x$, $3x + 4$ (w podanej kolejności) są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych.
 a) Oblicz x .
 b) Podaj wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

31. R Dla pewnych liczb x, y wartości wyrażeń $x+y$, $4x-y$, $3x+4y+1$, $9x-4y+1$ są początkowymi, kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
- Wyznacz x i y .
 - Oblicz, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć, aby ich suma była większa od 20100.
32. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_3 = 15$ oraz $a_{11} = -17$.
- Wyznacz pierwszy wyraz, różnicę ciągu i wzór na wyraz ogólny tego ciągu.
 - Dla jakich n zachodzi równość $7a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$?
 - Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych ujemnych wyrazów ciągu (a_n) , które są podzielne przez 3.
33. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe n takie, że liczba n , jej podwojona cyfra jedności i jej podwojona cyfra dziesiątek są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
34. R Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $a_n + a_{n+1} = 5n - 1$. Znajdź wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .
35. R Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n - 6$. Zsumowano 10 kolejnych wyrazów tego ciągu, otrzymując liczbę 310. Które wyrazy zsumowano?
36. Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n + 3$. Suma trzech końcowych wyrazów tego ciągu jest równa 69. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .
37. R Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 165, a suma wyrazów o nieparzystych numerach równa jest 88. Z ilu wyrazów składa się ciąg (a_n) ?
38. Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n + 3$. Wzięto kilka końcowych wyrazów tego ciągu. Ich suma jest równa 145, a suma najmniejszego i największego z wziętych wyrazów równa jest 58. Z ilu wyrazów składa się ciąg (a_n) ?
39. R Taras widokowy znajduje się na wysokości 9 m i 35 cm nad powierzchnią ziemi. Schody prowadzące na taras zostały tak zaprojektowane, że wysokość pierwszego stopnia jest równa 32 cm, a każdy następny stopień jest o 0,5 cm niższy od poprzedniego.
- Jaka jest wysokość jedenastego stopnia?
 - Jak wysoko nad ziemią znajduje się powierzchnia dwudziestego stopnia?
 - Ile stopni mają te schody?
40. Koszt wykopania przez firmę *Odwiert* pierwszego metra studni wynosi 70 zł, a za wykopanie każdego następnego metra trzeba zapłacić o 10 zł więcej niż za wykopanie poprzedniego.
- Jaki jest koszt wykopania piętnastego metra?
 - Jaki jest koszt wykopania studni o głębokości 9 metrów?
 - Pan Marek zlecił firmie *Odwiert* wykopanie studni na swojej działce. Okazało się, że średni koszt wykopania jednego metra wyniósł 120 zł. Oblicz głębokość studni na działce pana Marka.

41. Przedsiębiorca kupił koparkę za 263 500 zł i oszacował, że przy maksymalnym wykorzystaniu koparki, w pierwszym miesiącu eksploatacji zarobi 10 000 zł, a w każdym kolejnym miesiącu zarobi o 100 zł mniej niż w miesiącu poprzednim (zwiększeniu ulegają koszty eksploatacji). Po jakim czasie zwróci się koszt zakupu koparki?
42. W amfiteatrze jest dwadzieścia rzędów ponumerowanych krzesełek. W pierwszym rzędzie jest 37 krzesełek, a w każdym następnym rzędzie są o trzy miejsca więcej niż w poprzednim. Miejsca w pierwszym rzędzie mają numery od 1 do 37, w drugim od 38 do 77 itd.
- Ile miejsc znajduje się w dwunastym rzędzie?
 - Jakie numery mają miejsca w ostatnim rzędzie?
 - W amfiteatrze odbędzie się koncert Kasi Kowalskiej. Ela kupiła na ten koncert bilet z numerem miejsca 666. W którym rzędzie będzie siedziała Ela?
43. W sklepie z artykułami RTV można kupować sprzęt na raty. Przy zakupie zestawu kina domowego kosztującego 4200 zł pierwsza rata wynosi 420 zł, a każda następna rata jest o 20 zł niższa od poprzedniej. Oblicz, na ile rat rozłożona jest spłata oraz oblicz wysokość ostatniej raty.
44. Samochód S_p , jadący pod górę, w pierwszej sekundzie pokonał 25 m, a w każdej następnej o pół metra mniej niż w poprzedniej. W tym samym momencie, gdy S_p rozpoczął podjazd, zjazd z góry rozpoczął samochód S_z , będący w odległości 360 m od S_p . Samochód S_z w pierwszej sekundzie przebył drogę 9 m, a w każdej następnej o 2 m więcej niż w poprzedniej. Jaką odległość pokonał samochód S_p do chwili minięcia z samochodem S_z ?
45. R Pan Nowak zaciągnął kredyt samochodowy w wysokości 15 000 zł. Oprocentowanie kredytu wynosiło 12% (w skali roku). Kredyt spłacony został w dwunastu miesięcznych ratach. Miesięczne raty składały się z równych rat kapitałowych (a więc 1/12 pożyczonej kwoty) i całości odsetek naliczonych w danym miesiącu od pozostającego do spłacenia kapitału.
- Oblicz wysokość pierwszej i drugiej raty.
 - Oblicz wysokość ostatniej raty.
 - Oblicz łączną kwotę odsetek.
 - Jaki procent pożyczonej kwoty stanowi łączna kwota odsetek?
46. R Jednym z pierwiastków trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ jest -0.2 . Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma wynosi 24. Oblicz drugi pierwiastek tego trójmianu.
47. Znajdź tę wartość parametru m , dla której równanie $x^2 + (m-3)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki a i b takie, że ciąg (a, ab, b) jest arytmetyczny.
48. R Dwa początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) są miejscami zerowymi funkcji $g(x) = x^2 + 2x - m^2$. Suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 88. Znajdź najmniejszą wartość funkcji g .
49. Pierwszy i ostatni wyraz dwudziestowyrazowego ciągu arytmetycznego (a_n) są miejscami zerowymi funkcji g określonej wzorem $g(x) = x^2 + 2(m+1)x + m(m+2)$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 100. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji g .

50. R Liczby $x = \log_2(a-4)$, $y = \log_2 2a$, $z = \log_2 a^2$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu i sumę dwudziestu początkowych jego wyrazów.
51. Iloczyn pierwszego i szóstego wyrazu malejącego ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych jest równy 100. Przy dzieleniu wyrazu drugiego przez wyraz szósty otrzymujemy 3 i resztę 2. Oblicz, o ile jest mniejsza suma dwustu początkowych wyrazów o numerach parzystych od sumy dwustu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
52. R Liczby $x+y$, $3x+2y+1$, $x^2+5x+4y$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te wartości x , dla których ciąg ten jest rosnący.
53. R Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyraża się wzorem $S_n = n^2 - 2n$.
a) Oblicz piąty wyraz ciągu (a_n) .
b) Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych: $a_1 + a_3 + \dots + a_{199}$.
54. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ określona jest wzorem $S_n = 2n^2 - 14n$.
a) R Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) Wykaż, że jeżeli suma n początkowych wyrazów ciągu dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ określona jest wzorem $S_n = 2n^2 - 14n + 1$, to ciąg ten nie jest arytmetyczny.
55. Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi równość $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$, gdzie S_k oznacza sumę k początkowych wyrazów ciągu.
56. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. P_m oznacza sumę m początkowych wyrazów o parzystych numerach tego ciągu. Znajdź wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) , jeśli $P_m = 2m^2 - 3m$.
- 57.* W Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których istnieje takie x , że liczby $5^{1+x} + 5^{1-x}$, $\frac{m}{2}$, $25^x + 25^{-x}$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
- 58.* W Wszystkie wyrazy skończonego malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) są liczbami naturalnymi. Wybrano pewne dwa kolejne wyrazy ciągu (a_n) . Znajdź te wyrazy wiedząc, że różnica ich kwadratów jest równa 11.
- 59.* R Każda z liczb k , m , n , x jest dodatnia i różna od 1, zaś liczby $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wykaż, że $n^2 = (km)^{\log_k m}$.
- 60.* R Wykaż, że jeżeli liczby a^2 , b^2 , c^2 tworzą ciąg arytmetyczny, który nie jest stały, to liczby $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ również tworzą ciąg arytmetyczny.

- 61.* W Udowodnić, że jeżeli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$, gdzie $n \geq 2$, tworzą ciąg arytmetyczny i żadna z nich nie jest zerem, to
$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

62. Ciąg $36, 12\sqrt{6}, 24, \dots$ jest ciągiem geometrycznym.
a) Oblicz iloraz tego ciągu.
b) Zapisz n -ty wyraz tego ciągu w postaci ab^n .
c) Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
63. Pierwszy wyraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 48 i jest o 36 większy od wyrazu trzeciego.
a) R Oblicz iloraz ciągu (a_n) .
b) Oblicz ósmy wyraz ciągu (a_n) .
c) Suma kilku początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa $32\frac{1}{16}$. Oblicz, ile wyrazów zsumowano.
64. R Drugi wyraz malejącego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 36, a czwarty wyraz równy jest 16. Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .
65. Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) równy jest 3, a suma odwrotności wyrazu pierwszego i drugiego wynosi 18.
a) Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) .
b) Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .
66. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1}$.
a) Oblicz pierwszy i trzeci wyraz tego ciągu.
b) R Uzasadnij, korzystając z definicji ciągu geometrycznego, że ciąg (a_n) jest geometryczny.
67. R Ciągi o dodatnich wyrazach (a_n) i (b_n) są geometryczne. Uzasadnij, że ciąg (c_n) , taki, że $c_n = \sqrt{a_n b_n}$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n , jest również geometryczny.
68. Ósmy wyraz pewnego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 3. Obliczymy iloczyn pięciu jego kolejnych wyrazów, poczynając od wyrazu szóstego.
• Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Wówczas $a_6 = a_8 q^{-2}$, $a_7 = a_8 q^{-1}$, $a_9 = a_8 q$, $a_{10} = a_8 q^2$.
• Zatem $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} = a_8 q^{-2} \cdot a_8 q^{-1} \cdot a_8 \cdot a_8 q \cdot a_8 q^2 = a_8^5 = 243$.
Piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 2. Oblicz, wykorzystując przedstawioną metodę,
a) $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$; b) iloczyn dziewięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
69. R Iloczyn wyrazów piątego, szóstego i siódmego ciągu geometrycznego (a_n) równy jest 64, a suma pierwszego i szóstego wyrazu tego ciągu jest równa 4,125. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) .

70. R Ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach różnych od zera nie jest ciągiem arytmetycznym i każdy jego wyraz jest równy średniej arytmetycznej dwóch wyrazów następujących bezpośrednio po nim. Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) wiedząc, że jego pierwszy wyraz jest równy 5.
71. Pewne trzy kolejne wyrazy ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 3n + 8$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (b_n) . Wyznacz iloraz ciągu (b_n) .
72. R Pewne urządzenie w fabryce ulega szybkiemu zużyciu i jego wartość rynkowa jest równa połowie wartości sprzed roku. Oblicz cenę nowego urządzenia wiedząc, że po siedmiu latach eksploatacji jest warte 5 tys. złotych.
73. Po opublikowaniu sprawozdania finansowego przez firmę X , notowaną na giełdzie papierów wartościowych, cena akcji tej firmy spadła o 10% na czterech kolejnych sesjach giełdowych. Przed opublikowaniem sprawozdania jedna akcja kosztowała 123 zł.
 a) Jaka była cena akcji firmy X po tych czterech sesjach. Wynik zaokrąglij do setnej części złotego.
 b) O ile procent w ciągu tych czterech sesji giełdowych spadła cena akcji firmy X .
 c) O ile procent musiałaby wzrosnąć cena akcji tej firmy, aby ponownie wynosiła 123 zł.
 W punktach b) i c) wynik podaj po zaokrągleniu do pełnego procentu.
74. Teleturniej składa się z pewnej liczby etapów, a w każdym etapie uczestnik teleturnieju odpowiada na jedno pytanie. Począwszy od drugiego etapu, udzielając poprawnej odpowiedzi, uczestnik teleturnieju wygrywa kwotę dwa razy większą od kwoty wygranej w poprzednim etapie. Wiadomo, że w piątym etapie teleturnieju można wygrać 1200 zł, a w ostatnim 19 200 zł.
 a) Jaką kwotę można wygrać w pierwszym etapie teleturnieju? b) Z ilu etapów składa się teleturniej?
75. R Wielomian $W(x) = x^3 + 21x^2 + ax + b$ ma trzy pierwiastki, które są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie 2. Znajdź współczynniki a i b .
76. Trzy liczby $a, 6, c$, gdzie a i c są liczbami dodatnimi, tworzą ciąg geometryczny. Suma odwrotności tych liczb wynosi $0,7(2)$. Znajdź liczby a i c .
77. Znajdź wszystkie liczby α takie, aby ciąg $(\cos \alpha, \sin \alpha, -1, 5)$ był geometryczny.
78. R Znajdź te wartości $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, dla których ciąg $(\operatorname{tg} \alpha, \sin \alpha, \cos^2 \alpha)$ jest geometryczny.
79. Dane są liczby $a = (\log 2)^2$, $b = \log 4$, $c = 4$. Uzasadnij, że ciąg (a, b, c) jest geometryczny.
80. Znajdź wszystkie takie liczby p , aby liczby $\log_2 49 \cdot \log_7 3$, $\log p$, $\log_9 4$ tworzyły w podanej kolejności ciąg geometryczny.
81. Uzasadnij, że liczby $\log(\sqrt{7} + \sqrt{6})$, $\log(\sqrt{7} - \sqrt{6})$, $\log(\sqrt{7} + \sqrt{6})$ tworzą ciąg geometryczny.

- 82.* R Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ liczby $a = 1 + \log_2 3$, $b = \log_x 36$, $c = \frac{4}{3} \log_8 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?
- 83.* R Dane są liczby $a = \log(\sqrt{2} + 1)$, $b = \log(3 + 2\sqrt{2})$, $c = \log(17 + 12\sqrt{2})$. Wykaż, że ciąg (a, b, c) jest geometryczny.
84. Wyznacz wszystkie ciągi geometryczne, w których każdy wyraz poczynając od trzeciego jest równy połowie sumy dwóch poprzednich.
85. R Dla pewnej liczby naturalnej k suma k początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 5, a suma $2k$ początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 25. Oblicz sumę $3k$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
86. Dla pewnej liczby naturalnej k suma $4k$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest dziesięć razy większa niż suma $2k$ początkowych wyrazów tego ciągu. Ile razy suma $2k$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od sumy k początkowych wyrazów tego ciągu?
87. Udowodnij, że jeżeli cztery liczby dodatnie a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $a + d \geq b + c$.
- 88.* R Liczby $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o dodatnich wyrazach. Znajdź sumy: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$ oraz $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$, oblicz iloczyn $I = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{20}$.
- 89.* Znajdź wzór na sumę $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$.

CIĄG ARYTMETYCZNY + CIĄG GEOMETRYCZNY

90. Pomiedzy liczby 243 i 48 wstaw takie trzy liczby, aby wraz z danymi tworzyły
 a) ciąg arytmetyczny; b) R ciąg geometryczny.
91. Liczby $2x - 2$, x^2 , $4x - 2$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny i są trzema początkowymi wyrazami czterowyrazowego ciągu (a_n) . Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) , wiedząc, że liczby a_2, a_3, a_4 są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego.
92. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n^2 - 3n + 4$.
 a) Trzeci i piąty wyraz ciągu (a_n) są odpowiednio równe szóstemu i dziewiętnastemu wyrazowi ciągu arytmetycznego (b_n) . Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n) należy dodać, aby otrzymana suma była nie mniejsza od 483?
 b) Piąty oraz trzeci wyraz ciągu (a_n) są odpowiednio równe pierwszemu i drugiemu wyrazowi nieskończonego ciągu geometrycznego (c_n) . Który wyraz ciągu (c_n) jest równy $\frac{13}{9}$?

93. Pani Joanna ma troje dzieci: Alę, Anię i Tomka. Alę, najmłodsza z trójki rodzeństwa, ma dwa lata. Gdyby najstarszy z tej trójki Tomek był o rok młodszy, to zapisując wiek dzieci od najmłodszego do najstarszego, otrzymalibyśmy ciąg arytmetyczny, a gdyby Tomek był o rok starszy, to otrzymalibyśmy ciąg geometryczny.
a) Oblicz wiek Ani.
b) Za ile lat, zapisując wiek dzieci od najmłodszego do najstarszego, otrzymamy ciąg geometryczny?
94. Dane są liczby:
 $a = \log_{0,5} 20 - \log_{0,5} 15 + \log_{0,5} 3$, $b = \log_6^2 30 - \log_6 30 \cdot \log_6 5 - \log_6 5$, $c = \log_{21} 81 + 4 \log_{21} 7$.
 Uzasadnij, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, zaś (b, a, c) jest ciągiem geometrycznym.
95. Dla jakich wartości x i y liczby $x+y$, $2x-1$, $y+2$ są trzema kolejnymi wyrazami zarówno ciągu arytmetycznego, jak i geometrycznego?
96. R Trzy liczby całkowite, z których pierwsza jest pięć razy mniejsza niż druga, tworzą ciąg arytmetyczny. Gdybyśmy drugą z tych liczb zmniejszyli o 4, to otrzymalibyśmy ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.
97. Trzy liczby tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Jeżeli pierwszą z nich zwiększymy o 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Jeżeli drugi wyraz otrzymanego ciągu geometrycznego pomnożymy przez 2, a trzeci zwiększymy o 11, to znów otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
98. R Pierwszy wyraz rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 2. Znajdź różnicę ciągu (a_n) wiedząc, że ciąg (a_3, a_7, a_{17}) jest geometryczny.
99. R Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
100. Szesnastowyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) nie jest ciągiem stałym. Suma wszystkich jego wyrazów równa jest 192. Znajdź wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) wiedząc, że jego czwarty, siódmy i szesnasty wyraz tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.
101. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 2^{a_n}$ jest geometryczny.
102. Wykaż, że jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o dodatnich wyrazach, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \log a_n$ jest arytmetyczny.
103. Ciąg o dodatnich wyrazach (a_n) jest geometryczny. Ciąg (b_n) dla każdej liczby całkowitej dodatniej n określony jest następująco: $b_n = \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_n$. Znajdź iloraz ciągu (a_n) wiedząc, że (b_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 8.

104. R Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zaś liczby b, c, d są kolejnymi wyrazami nie-monotonicznego ciągu geometrycznego. Suma pierwszej trójki liczb wynosi 12, drugiej 19. Wyznacz liczbę a, b, c, d .
105. Mamy dwa ciągi rosnące: arytmetyczny (a_n) i geometryczny (b_n) . Pierwsze wyrazy obu ciągów są równe 2, trzecie ich wyrazy są takie same, a jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy piątemu wyrazowi ciągu geometrycznego. Oblicz różnicę ciągu (a_n) i iloraz ciągu (b_n) .
106. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f wiedząc, że ciąg $(x_1, \sqrt{2}, x_2)$ jest geometryczny, a ciąg $(x_1, \sqrt{3}, x_2)$ jest arytmetyczny.
107. R Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie q . Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 + mx + q$ jest większa od -196 ?
108. * R Dane są dwa ciągi: arytmetyczny i geometryczny. Każdy z nich składa się z trzech wyrazów dodatnich. Pierwsze wyrazy tych ciągów są równe oraz ostatnie wyrazy też są równe. Suma wyrazów którego ciągu jest większa?

ZADANIA RÓŻNE

109. R Oblicz sumę wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych.
110. Wyrazami skończonego i malejącego ciągu (a_n) są wszystkie liczby trzycyfrowe podzielne przez 9.
a) Podaj ostatni wyraz tego ciągu.
b) Znajdź wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) .
c) Oblicz sumę dziewiętnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
111. W Oblicz sumę tych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3 i są mniejsze od 300.
112. Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + 2n + (2n + 1)$. Oblicz pierwszy i dziesiąty wyraz ciągu (a_n) .
113. Wyznacz sumę wszystkich nieskracalnych ułamków należących do przedziału $(2; 8)$, których mianownikiem jest 7.
114. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 1, zaś n -ty wyraz, gdzie $n > 1$, równy jest sumie n kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejszą jest n . Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 70?

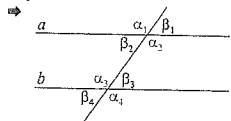
115. Twierdzenie. Dla każdego $n \in \mathbb{C}_+$ zachodzi równość $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$. Korzystając z podanego twierdzenia,
 a) oblicz sumę $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 40^3$;
 b) oblicz sumę sześcianów wszystkich naturalnych liczb dwucyfrowych;
 c) zapisz liczbę 14 400 jako sumę sześcianów początkowych dodatnich liczb całkowitych.
116. W turnieju szachowym nagrodzono szachistów, którzy zajęli miejsca od 1 do 6. Na nagrody przeznaczono 63 000 \$, a każda z nagród za zajęcie miejsca od 2 do 6 równa była połowie nagrody, jaką otrzymał zawodnik zajmujący miejsce o jeden wyższe. Jaka była wysokość nagrody za zajęcie czwartego miejsca?
117. Na początku 2002 roku zasoby węgla kamiennego w Polsce szacowane były na 64 mld ton. W 2002 roku w Polsce wydobyto 103,7 mln ton węgla. Jaki procent zasobów węgla kamiennego w naszym kraju uległby wyczerpaniu do końca 2101 roku, gdyby każdego roku wydobyte węgiel wzrastało o 0,4 mln ton? Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.
118. W pewnym nadleśnictwie postanowiono wymienić drzewostan na obszarze 150 hektarów. W pierwszym roku zaplanowano wymianę na obszarze 3 hektarów i ustalono normę, według której w każdym następnym roku będzie się dokonywać wymianę na obszarze o 1 hektar większym niż w roku poprzednim.
 a) Oblicz, ile lat będzie trwać wymiana drzewostanu na zaplanowanym obszarze.
 b) Oblicz, o ile należałoby zwiększyć normę wymiany drzewostanu, aby skrócić cały proces o 5 lat.
 c) W obu przypadkach oblicz liczbę hektarów, na których dokonana zostanie wymiana w ostatnim roku.
119. R Przez kolejnych dwadzieścia dni do basenu zawierającego początkowo 1000 m³ wody doprowadzano wodę. Pierwszego dnia wpłynęło do basenu 25 m³ wody, po czym każdego dnia doprowadzano o 2 m³ wody więcej niż dnia poprzedniego. Równocześnie z basenu ubywało codziennie 50 m³ wody.
 a) Jaka ilość wody będzie w basenie po 10 dniach?
 b) Po ilu dniach basen będzie zawierał najmniejszą ilość wody?
120. Wykres ciągu (a_n) zawiera się w paraboli o wierzchołku $W = (\frac{15}{4}, -\frac{9}{8})$, przechodzącej przez punkt $P = (0, 27)$. Ile ujemnych wyrazów ma ciąg (a_n) ?
121. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{3x+2}{x}$. Ciąg (a_n) dla każdej całkowitej dodatniej liczby n określony jest w następujący sposób: $a_n = f(\frac{1}{n})$.
 a) Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) .
 b) Podaj wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
122. W Rozwiąż równanie $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+200}{3} = 2010$.
123. R Rozwiąż równanie $n + (n+1) + (n+2) + \dots + 3n + (3n+1) = 232$, gdzie $n \in \mathbb{C}_+$.

124. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n+1}{2} - \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1}$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.
125. R Liczby $\sin \alpha$, $0,2$, $\cos \alpha$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz iloczyn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
126. Liczby $\sin \alpha$, $0,2$, $\cos \alpha$, gdzie $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Oblicz sumę $\sin \alpha + \cos \alpha$.
127. R Oblicz sumę wszystkich miejsc zerowych funkcji $f(x) = \cos x$ należących do przedziału $(0; 50\pi)$.
128. Oblicz sumę stu najmniejszych dodatnich rozwiązań równania $\sin^3 x = \sin x$.
129. W Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$. Oblicz sumę $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 50a_{50}$.
130. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $2x^2 + mx - 1 = 0$. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = (x_1)^n \cdot (x_2)^n$. Zapisz iloraz $\frac{S_{20}}{S_{10}}$ w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi.
131. R Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej $k > -2$ sumę wszystkich liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 3kx + 2k^2 - k - 1 \leq 0$, gdzie x jest niewiadomą. Znajdź wzór funkcji f .
132. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \left(\frac{3-p}{3+p}\right)^{2n-3}$, gdzie $p \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
 a) Udowodnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.
 b) Wyznacz te wartości parametru p , dla których ciąg (a_n) jest malejący.
133. R Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób: $a_1 = 4(2+\sqrt{3})^2$ i $a_{n+1} = 3^{\log_9 a_n}$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n . Zapisz trzeci wyraz ciągu (a_n) w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.
- 134.* R Wyrazy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ pewnego ciągu (a_n) spełniają warunki: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 20$, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$. Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$ wzorem $b_n = 4^{3a_n+5}$, jest ciągiem geometrycznym. Oblicz iloraz ciągu (b_n) .
- 135.* W Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 4n - 13$. Znajdź wszystkie liczby naturalne k takie, że wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+2} są liczbami pierwszymi.

2. PLANIMETRIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

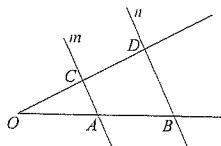
KĄTY



Jeśli proste a i b są równoległe, to
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ i $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$.
 α_1 i α_2 , α_3 i α_4 , β_1 i β_2 , β_3 i β_4 – kąty wierzchołkowe
 α_1 i α_3 , α_2 i α_4 , β_1 i β_3 , β_2 i β_4 – kąty odpowiadające
 α_2 i α_3 , β_2 i β_3 – kąty naprzemianległe (wewnętrzne)

TWIERDZENIE TALESA

⇒ Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta, są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.



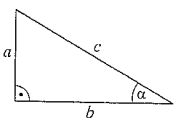
Jeżeli $m \parallel n$, to

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

TRÓJKĄT

UWAGA. We wszystkich wzorach i twierdzeniach dotyczących trójkąta przyjmujemy, że
 1) naprzeciw kątów o miarach α, β, γ leżą boki o długościach odpowiednio a, b, c .
 2) r oraz R są promieniami okręgów odpowiednio wpisanego w trójkąt i opisanego na trójkącie.

⇒ Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c .



Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Twierdzenie Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$.

Pole: $P = \frac{1}{2}ab$.

⇒ Trójkąt równoboczny o boku a .

$$\text{Wysokość: } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{Pole: } P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

⇒ Cechy podobieństwa: kąt-kąt, bok-kąt-bok, bok-bok-bok.

⇒ Pole: $P = \frac{1}{2}ah$, $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, $P = \frac{abc}{4R}$.

⇒ Środkową nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.

⇒ Dwusieczne kątów (wewnętrznych) przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

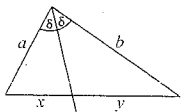
⇒ Symetralne boków przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

⇒ Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego i równy jego połowie.

⇒ Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

⇒ Twierdzenie kosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

⇒ Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.



Dwusieczna kąta trójkąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

PLANIMETRIA

23

RÓWNOLEGŁOBOK

⇒ Pole: $P = ah$ (a – bok równoległoboku, h – wysokość poprowadzona do boku a).
 ⇒ Przekątne dzielą się na połowy.
 ⇒ Suma dwóch kolejnych kątów wynosi 180° .

ROMB

⇒ Pole: $P = ah$, $P = \frac{1}{2}pq$ (p, q – przekątne rombu).
 ⇒ Przekątne przecinają się pod kątem prostym.
 ⇒ Przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów rombu.

TRAPEZ

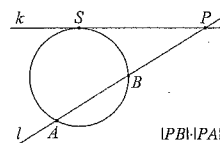
⇒ Pole: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ (a, b – podstawy trapezu, h – wysokość trapezu).
 ⇒ Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość równa jest połowie sumy długości podstaw.
 ⇒ Suma kątów przyległych do ramienia jest równa 180° .

OKRĄG I KOŁO

⇒ Pole koła: $P = \pi r^2$ (r – promień koła).
 ⇒ Długość okręgu: $l = 2\pi r$ (r – promień okręgu).

STYCZNA DO OKRĘGU

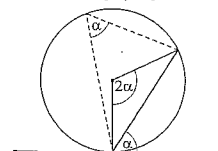
⇒ Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.
 ⇒ Twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej.



Jeżeli prosta k jest styczna do okręgu o w punkcie S , prosta l przecina okrąg o w punktach A i B , a proste k i l przecinają się w punkcie P , to iloczyn długości odcinków PA i PB jest równy kwadratowi długości odcinka PS .

KĄTY W KOLE

⇒ Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.
 ⇒ Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
 ⇒ Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.
 ⇒ Zależność między kątem środkowym i kątem między styczną a cięciwą okręgu.



Kąt ostry – wyznaczony przez cięciwę okręgu i styczną do tego okręgu poprowadzoną przez jeden z końców cięciwy – ma miarę równą połowie miary wypukłego kąta środkowego opartego na tej cięciwie (ma więc miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na tej cięciwie).

CZWOROKĄT OPISANY NA OKRĘGU

⇒ W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.

CZWOROKĄT WPISANY W OKRĄG

⇒ Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe (po 180°).

WIEŁOKĄTY PODOBNE

⇒ Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.
 ⇒ Stosunek obwodów wielokątów podobnych jest równy skali podobieństwa.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi	- określać własności wielokątów (w tym trójkąt – przyp. red.) i posługiwać się nimi - posługiwać się własnościami środkowych boków trójkąta
-----------------	--

kąty w trójkącie

- 2.1 R W trójkącie ABC miara kąta BAC jest o 20° większa od miary kąta ABC i trzy razy mniejsza niż miara kąta ACB . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .
- 2.2 R Kąty między boki trójkąta ostrokątnego, a wysokościami opuszczonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 20° i 40° . Znajdź miary kątów trójkąta.
- 2.3 R Prosta k jest równoległa do jednego z boków trójkąta ostrokątnego i przecina pozostałe dwa boki. Kąty rozwarte, jakie tworzy prosta k z bokami trójkąta, mają miary 110° i 130° . Oblicz miary kątów trójkąta.
- 2.4 R W trójkącie ABC bok AB jest dwa razy dłuższy od środkowej CD . Wyznacz miarę kąta ACB .

twierdzenie Pitagorasa

- 2.5 R Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest pięć razy krótsza od przeciwprostokątnej. Wyznacz długość środkowej poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej.
- 2.6 R Jeden z boków trójkąta ma długość 42, a długości wysokości i środkowej poprowadzonych do tego boku są równe odpowiednio 8 i 17. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta.

twierdzenie o środkowych trójkąta

- 2.7 R Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8, a wysokość poprowadzona z wierzchołka trójkąta ma długość 9. Jakie długości mają środkowe tego trójkąta?
- 2.8 R Środkowe trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i B mają długości równe odpowiednio 9 i 12, a przecinają się pod kątem prostym. Oblicz długości boków AB i AC .

twierdzenie o dwusiecznej kąta trójkąta

- 2.9 R Boki AB , BC , AC trójkąta ABC mają długości równe odpowiednio 4, 6, 5. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ABC dzieli bok AC .
- 2.10 W Dwusieczna kąta prostego trójkąta prostokątnego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach a i b . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Zdający potrafi	- rozpoznawać trójkąty podobne na podstawie cech podobieństwa trójkątów - stosować twierdzenie Talesa do rozwiązywania problemów teoretycznych lub praktycznych - stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązywania problemów teoretycznych lub praktycznych - wykorzystywać własności figur podobnych
-----------------	--

- 2.11 R Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC , a punkt S punktem ich przecięcia. Wykaż, że podobne są trójkąty a) AKC i BLC ; b) LAS i BKS ; c) ABC i LKC .

- 2.12 R Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 10 i 14. Oblicz obwód trójkąta podobnego do danego, którego najkrótszy bok ma długość 9.
- 2.13 R Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 1 i 2. Oblicz długości boków tego trójkąta.
- 2.14 R W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$ przedłużono boki BC i AD do przecięcia w punkcie O . Oblicz długość odcinka OC , jeżeli $|AD|=12$, $|OD|=15$, $|BC|=13$.
- 2.15 R W trapezie $KLMN$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Oblicz długość podstawy KL wiedząc, że $|MN|=3$, $|MP|=2$ i $|PK|=5$.
- 2.16 R Stosunek pól dwóch wielokątów podobnych wynosi 196 : 289. Znajdź stosunek obwodów tych wielokątów.
- 2.17 R Odpowiadające sobie przekątne dwu wielokątów podobnych mają się jak 3 : 4, a pola tych wielokątów różnią się o 28 cm^2 . Oblicz pola tych wielokątów.

Zdający zna	własności czworokątów wypukłych
-------------	---

romb

- 2.18 R Suma długości boku kwadratu i jego przekątnej jest równa 1. Oblicz długość przekątnej kwadratu.
- 2.19 R Przekątne rombu tworzą z jednym z boków kąty, z których jeden jest o 15° większy od drugiego. Oblicz miary kątów tego rombu.
- 2.20 W Oblicz obwód rombu o przekątnych długości 16 mm i 63 mm.
- 2.21 R Jedna z przekątnych rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wyznacz stosunek obwodu rombu do sumy długości jego przekątnych.

równoległobok

- 2.22 R Miara kąta rozwartego równoległoboku jest o 74° większa od miary jego kąta ostrego. Znajdź miary kątów tego równoległoboku.
- 2.23 R Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie wysokości. Wysokości te tworzą kąt o mierze 50° . Znajdź miarę kąta ostrego równoległoboku.

trapez

- 2.24 W W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD miara kąta przy wierzchołku A jest cztery razy mniejsza niż miara kąta przy wierzchołku D , a miara kąta przy wierzchołku C jest trzy razy większa niż miara kąta przy wierzchołku B . Oblicz miary kątów tego trapezu.

2.25 Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i b ($a > b$). Z wierzchołka kąta rozwartego trapezu poprowadzono wysokość. Uzasadnij, że wysokość ta dzieli dłuższą podstawę na odcinki o długościach $\frac{a-b}{2}$ i $\frac{a+b}{2}$.

2.26 R Ramiona trapezu mają długości 4 i 8, a obwód trapezu jest równy 30. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

Zdający potrafi	- określać własności podstawowych figur płaskich (m.in. okrąg, koło) i posługiwać się nimi - stosować twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznymi i siecznymi
-----------------	---

2.27 W W okręgu o promieniu 5 poprowadzono dwie równoległe cięciwy o długościach 6 i 8. Oblicz odległość między tymi cięciwami.

2.28 R Okręgi $o(A, 1)$, $o(B, 2)$, $o(C, R)$ są parami styczne zewnętrznie. Oblicz R , jeśli $|\angle BAC| = 90^\circ$.

2.29 R Dwa styczne zewnętrznie okręgi o środkach A i B są styczne wewnętrznie do okręgu $o(C, 4)$, przy czym punkty A , B , C nie są współliniowe. Oblicz obwód trójkąta ABC .

2.30 R Kąt wyznaczony przez dwa promienie okręgu ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta rozwartego, który tworzą styczne do okręgu poprowadzone przez końce tych promieni.

2.31 R Odległości środków dwóch okręgów od wierzchołka kąta α są równe odpowiednio 8 i 12. Okręgi te są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion kąta α . Oblicz długości promieni tych okręgów.

2.32 R Prosta k przecina okrąg o w punktach P i Q . Prosta l jest styczna do okręgu o w punkcie S . Punkt K jest punktem wspólnym prostych k i l , a punkt Q jest środkiem odcinka PK . Wyznacz stosunek długości odcinków PQ i SK .

2.33 R Ramię trójkąta równoramiennego ma długość $\sqrt{3}$, a kąt przy podstawie ma miarę 30° . Okrąg o jest styczny do prostej zawierających jedno z ramion, a drugie ramie jest jego cięciwą. Oblicz długości odcinków, na jakie okrąg o dzieli podstawę trójkąta.

Zdający potrafi	- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym - obliczać obwody i pola podstawowych figur płaskich, między innymi z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych
-----------------	--

2.34 R Wysokość CD trójkąta ABC ma długość 6 cm i dzieli bok AB na odcinki o długościach: $|AD| = 8$, $|BD| = 2\sqrt{3}$.
a) Oblicz tangens i kosinus kąta BAC . b) Znajdź miarę kąta ABC .

2.35 R Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego ma miarę α . Wyznacz długości boków tego trójkąta wiedząc, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość h .

2.36 R Wysokość trapezu równoramiennego ma długość $\sqrt{6}$, a jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz pole trapezu wiedząc, że sinus jego kąta ostrego jest równy $0,2$.

2.37 R Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 70 i 30, kąt ostry trapezu ma miarę 22° . Oblicz pole tego trapezu. Przyjmij, że $\sin 22^\circ = 0,375$, $\cos 22^\circ = 0,927$, $\tan 22^\circ = 0,404$.

2.38 R Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ma długość R . Znajdź długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i obwód trójkąta.

2.39 R W okrąg o promieniu 13 wpisano rozwartokątny trójkąt równoramienny o podstawie 24. Oblicz pole trójkąta.

2.40 R Suma miar dwóch kątów trójkąta jest równa α , a boki zawarte w ramionach trzeciego kąta mają długości a i b . Oblicz pole trójkąta.

2.41 W Romb o kącie ostrym 30° jest opisany na okręgu o promieniu 2. Oblicz pole tego rombu.

2.42 R Wysokości równoległoboku mają długości 2 i 4. Oblicz pole równoległoboku wiedząc, że jego obwód wynosi 30.

2.43 R Kąt rozwarty równoległoboku o bokach długości 6 i 7 ma miarę 150° . Oblicz pole tego równoległoboku.

2.44 R Z dwóch przeciwległych wierzchołków kwadratu o boku 2 zakreślono okręgi o promieniu 2. Oblicz pole „soczewki” wyznaczonej przez te okręgi.

Zdający potrafi	- posługiwać się własnościami kątów środkowych i wpisanych w koło - korzystać ze związku między kątem środkowym i kątem między styczną a cięciwą okręgu
-----------------	--

2.45 R Wierzchołki ostrokątnego trójkąta ABC należą do okręgu o środku S . Oblicz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|\angle ASB| = 80^\circ$ i $|\angle BSC| = 130^\circ$.

2.46 W Do okręgu należą trzy punkty dzielące okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi $2:3:4$. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są te punkty.

2.47 R W okrąg wpisano trójkąt KLM i poprowadzono średnicę AL . Wyznacz miary kątów trójkąta o wierzchołkach w punktach L , A , K wiedząc, że kąt KML ma miarę 29° .

2.48 R Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg, a następnie poprowadzono prostą k , która jest styczna do tego okręgu w punkcie B . Prosta k tworzy z bokami AB i BC kąty ostre o miarach równych odpowiednio 46° i 54° . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

Zdający potrafi	posługiwać się własnościami: symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta
-----------------	--

2.49 W Symetralna boku AB trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie K , przy czym odcinek BK ma długość 5. Jaka jest odległość punktu K od wierzchołka A ? Odpowiedź uzasadnij.

2.50 W Dwusieczne kątów ABC i BAC trójkąta ABC przecinają się w punkcie K . Odległość punktu K od odcinka AB wynosi 3. Jaka jest odległość punktu K od odcinka AC ? Odpowiedź uzasadnij.

2.51 W W trójkącie ABC mamy dane: $|\angle A| = 20^\circ$, $|\angle B| = 60^\circ$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz miary kątów ASB , BSC , ASC .

2.52 R Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 40° . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 2,1 cm. Oblicz długość podstawy trójkąta.

2.53 R Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 1. Oblicz długości boków trójkąta.

Zdający potrafi • korzystać z własności czworokątów wypukłych wpisanych w okrąg

2.54 Na czworokącie $KLMN$ opisano okrąg. Miara kąta K jest o 50° mniejsza od miary kąta M i o 50° większa od miary kąta L . Oblicz miary kątów czworokąta.

2.55 R Boki AB i AD wpisanego w okrąg czworokąta $ABCD$ mają długość równą długości przekątnej BD . Oblicz miarę kąta BCD tego czworokąta.

Zdający potrafi • korzystać z własności czworokątów wypukłych opisanych na okręgu

2.56 W czworokącie $KLMN$ bok KL jest o 3 krótszy od boku MN , $|LM| = 8$, a $|KN| = 9$. Oblicz długości boków KL i MN wiedząc, że w czworokąt $KLMN$ można wpisać okrąg.

2.57 R W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Bok AB tego czworokąta jest siedem razy krótszy niż bok CD , zaś bok AD jest trzy razy krótszy niż bok BC . Ile razy bok BC jest dłuższy od boku AB ?

Zdający potrafi • rozpoznawać wielokąty foremne
• podawać przykłady figur osiowosymetrycznych oraz środkowosymetrycznych
• wyznaczać oś symetrii i środek symetrii figury

2.58 R Podaj długości przekątnych sześciokąta foremnego o boku 1.

2.59 W Oblicz miarę kąta a) pięciokąta foremnego; b) sześciokąta foremnego; c) dziewięciokąta foremnego.

2.60 Ile osi symetrii ma a) trójkąt równoboczny; b) równoległobok, który nie jest rombem i nie jest prostokątem; c) prostokąt; d) sześciokąt foremny?

2.61 Która z figur: równoległobok, prosta, trójkąt równoboczny, jest figurą środkowosymetryczną?

Zdający potrafi • stosować: twierdzenie cosinusów, twierdzenie sinusów, związki miarowe w trójkącie oraz funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań matematycznych

2.62 R W trójkącie ABC miara kąta ABC jest równa 150° , a bok AC ma długość 4. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

2.63 R Ramię trójkąta równoramiennego ma długość b , a kąt przy podstawie ma miarę α . Wyznacz długość promienia a) okręgu opisanego na trójkącie; b) okręgu wpisanego w trójkąt.

2.64 R Jeden z boków trójkąta ma długość a , zaś kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary α i β . a) Znajdź promień okręgu opisanego na tym trójkącie. b) Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta. c) Znajdź promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2.65 R Długości dwóch boków trójkąta są równe 1 i 4, a miara kąta zawartego między nimi wynosi 60° . a) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. b) Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2.66 R Boki trójkąta mają długości 4, 8 i 10. a) Oblicz kosinus i tangens kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku. b) Oblicz długość środkowej poprowadzonej do najdłuższego boku.

2.67 R Długości boków trójkąta są w stosunku 2:3:4. Oblicz kosinus największego kąta tego trójkąta.

2.68 R Na boku LM trójkąta równobocznego KLM obrano taki punkt A , że $|AM|:|AL| = 4:1$. a) Oblicz stosunek pól trójkątów KLA i KAM . b) Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach KLA i KAM . c) Wyznacz sinus kąta LKA .

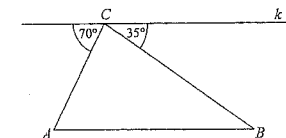
ZADANIA MATURALNE

TRÓJKĄTY

136. Kąt BAC trójkąta ABC ma miarę 13° , a kąt ACB miarę 119° . Wysokość CD dzieli bok AB na dwa odcinki, z których krótszy ma długość 25 cm. Oblicz długość boku AC .

137. Dwa kąty trójkąta mają miary 30° i 50° . Oblicz miarę kąta, jaki tworzy dwusieczna trzeciego kąta z wysokością poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

138. Oblicz miary kątów trójkąta ABC (patrz rysunek obok) wiedząc, że $AB \parallel k$.



139. R W ostrokątnym trójkącie równoramiennym ramię ma długość 61, a wysokość poprowadzona do ramienia ma długość 11.

a) Oblicz pole tego trójkąta.
b) Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

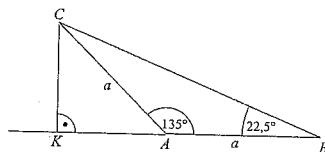
140. Definicja. Trójkąt prostokątny, którego długości boków są liczbami naturalnymi, nazywamy trójkątem pitagorejskim.
- Sprawdź, czy podane liczby są długościami boków trójkąta pitagorejskiego I) 7, 24, 25, II) 9, 14, 17.
 - Znajdź wszystkie trójkąty pitagorejskie, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi.
 - Uzasadnij, że jeśli długości boków trójkąta są równe $p^2 - q^2$, $2pq$, $p^2 + q^2$, gdzie p i q są liczbami dodatnimi takimi, że $p > q$, to trójkąt ten jest prostokątny, a następnie znajdź długości pozostałych boków trójkąta pitagorejskiego, którego najkrótszy bok ma długość 13.
141. Środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta ostrego równoramiennego trójkąta prostokątnego ma długość 5. Oblicz pole tego trójkąta.
142. W trójkącie ABC miara kąta ACB jest dwa razy większa od miary kąta CAB . Dwusieczna kąta ACB dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty. Uzasadnij, że co najmniej jeden z otrzymanych trójkątów
- jest równoramienny;
 - jest podobny do trójkąta ABC .
143. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC i dwa razy krótsza od boku AB . Znajdź kąty tego trójkąta.

144. Obliczmy tangens kąta o mierze $22,5^\circ$.

- Narysujmy trójkąt równoramienny ABC , którego ramię ma długość a , zaś kąt przy wierzchołku ma miarę 135° . Kąt przy podstawie trójkąta ma więc miarę $22,5^\circ$. Wówczas kąt KAC (patrz rys.) ma miarę 45° .

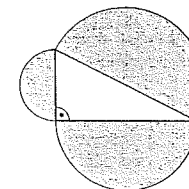
- Zatem $\frac{|KA|}{|AC|} = \cos 45^\circ$ i $\frac{|KC|}{|AC|} = \sin 45^\circ$. Stąd otrzymujemy $|KA| = |KC| = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.
- Teraz możemy obliczyć tangens kąta $22,5^\circ$: $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{|KC|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{2}}{\frac{1}{2} a \sqrt{2} + a} = \sqrt{2} - 1$.

W podobny sposób oblicz $\operatorname{tg} 15^\circ$.



145. R Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 3 : 8, a środkowa poprowadzona do dłuższej z nich ma długość 15.
- Oblicz długość przyprostokątnych trójkąta.
 - Oblicz odległość środka ciężkości trójkąta od dłuższej przyprostokątnej.
146. R Obwód trójkąta równobocznego ABC jest równy 9. Punkt K należy do boku BC i $|BK| = 2$. Oblicz tangens kąta BAK .
147. Podstawa trójkąta równoramiennego i wysokość opuszczona na podstawę mają równe długości. Wyznacz kosinus kąta przy podstawie trójkąta.
148. Podstawa trójkąta równoramiennego i środkowe poprowadzone z jej końców mają długość a . Oblicz długość wysokości poprowadzonej do podstawy.

149. R W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB miara kąta ACB jest równa 2α . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r . Oblicz długości boków trójkąta ABC .
150. Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy jest dwa razy od niej dłuższa. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy z podstawą środkowa trójkąta poprowadzona do ramienia.
151. Punkt P należy do boku BC trójkąta równobocznego ABC . Odcinek AP ma długość 6 i tworzy z bokiem AB kąt 45° . Oblicz pole trójkąta ABC .
152. R Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość a . Przez wierzchołek B i środek wysokości CD poprowadzono prostą, która przecina bok AC w punkcie K . Oblicz odległość punktu K od wierzchołka A .
153. R Pole trójkąta równoramiennego jest równe 25. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt wiedząc, że ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy.
154. R Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie dzieli jedną z wysokości trójkąta na odcinki, których stosunek długości wynosi 3 : 5. Oblicz długość ramienia trójkąta.
155. Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.
156. R Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 4, a ramiona mają długość 8.
- Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
 - Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
157. W Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy i odcinek łączący środek podstawy ze środkiem ramienia mają długość 1. Oblicz długość podstawy trójkąta.
158. R Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej AB , a punkty A, B, M wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz iloczyn sinusów kątów ostrych trójkąta ABC wiedząc, że pole tego trójkąta jest pięć razy mniejsze niż pole trójkąta ABM .
159. Dany jest trójkąt prostokątny. Na bokach tego trójkąta jako na średnicach zakreślono półkola (patrz rys.). Wiedząc, że suma pól zakreślonych półkoli jest dziesięć razy większa od pola danego trójkąta, oblicz sumę tangensów kątów ostrych trójkąta.
160. Jeden z kątów trójkąta o obwodzie 6 ma miarę 60° , a stosunek długości boków zawartych w ramionach tego kąta jest równy 1 : 2. Oblicz pole trójkąta.



161. Suma długości boków AB i AC trójkąta o polu $40\sqrt{3}$ jest równa 26. Kąt BAC ma miarę 60° . Oblicz odległość od boku BC punktu, który jest jednakowo odległy od wszystkich wierzchołków tego trójkąta.
162. R Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu P jest równa α . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
163. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę α . Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na nim.
164. W rozwartokątym trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) odległość środka koła wpisanego w trójkąt od wierzchołka A jest równa d , a $|\angle ACB| = 2\alpha$. Oblicz pole trójkąta ABC i promień koła opisanego na trójkącie ABC .
165. R Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Suma promieni okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 11. Oblicz długość podstawy trójkąta.
166. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC mamy dane: $|AC| = |BC| = b$ oraz $|\angle ACB| = \alpha$. Z wierzchołka B przez środek S okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, przecinającą bok AC w punkcie D .
a) Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
b) R Oblicz długość odcinka BD .
167. W W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 9$, $|BC| = 7$. Wiadomo też, że miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC . Oblicz stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
168. Punkt W jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta przechodząca przez punkty A i W przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D . Wykaż, że trójkąt BDW jest równoramienny.
169. R Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu trójkąta.
170. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz tangens kąta CAD i znajdź stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD .
171. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt M , że pole trójkąta ACM jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABM . Oblicz sinusy kątów CAM i MAB .
172. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wyznacz obwód trójkąta, jeśli środkowa poprowadzona do ramienia ma długość d .

173. Oblicz tangens kąta ostrego utworzonego przez środkowe trójkąta prostokątnego równoramiennego poprowadzone do przyprostokątnych.
174. R Długości dwóch boków trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R są równe $\frac{1}{2}R$ i $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.
175. R W trójkącie ABC długości boków AB i AC są odpowiednio równe 4 i 6, a długość środkowej AA' jest równa $\sqrt{10}$. Oblicz długość boku BC .
176. R Środkowa trójkąta jest równa połowie boku, do którego została poprowadzona. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.
177. R Obwód trójkąta prostokątnego o polu 0,5 jest równy $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.
178. R Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym suma przyprostokątnych równa jest sumie średnic okręgów opisanego na tym trójkącie i wpisanego w ten trójkąt.
179. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości x i y .
a) Wyznacz y jako funkcję x i określ dziedzinę tej funkcji.
b) Sporządź wykres tej funkcji.
180. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę α . Oblicz stosunek wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
181. W W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Oblicz miarę kąta, którego wierzchołkiem jest punkt styczności tego okręgu z przeciwprostokątną, a ramiona przechodzą przez punkty styczności z przyprostokątnymi.
- 182.* Oblicz sinus jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego wiedząc, że stosunek długości promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 0,4.
- 183.* R Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona do przeciwprostokątnej ma długość h i jest pięć razy krótsza od obwodu tego trójkąta. Oblicz długość przeciwprostokątnej.
184. Przez wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 i 12 poprowadzono prostą, która dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Znajdź stosunek promieni okręgów wpisanych w otrzymane z podziału trójkąty.
185. R Oblicz miary kątów trójkąta, w którym wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy kąty o równych miarach.

- 186.* W Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .
187. Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku $3 : 4$. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
188. W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy $4 : 3$, poprowadzono dwusieczne kątów ADB i BDC . Dwusieczne te przecinają boki AB i CB odpowiednio w punktach K i M . Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM .
189. W trójkącie ABC długości boków AC i BC są odpowiednio równe 2 i 4 , zaś miara kąta ACB wynosi 120° . Oblicz długość odcinka, który jest częścią wspólną dwusiecznej kąta ACB i trójkąta ABC .
- 190.* Z punktu P należącego do boku AB trójkąta równobocznego ABC poprowadzono półprostą dzielącą trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz tangens kąta jaki tworzy ta półprosta z odcinkiem AP , jeśli $|AP| : |PB| = m$ i $m \neq 1$.
- 191.* W W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym w wierzchołku C obrano taki punkt P , że pola trójkątów PAB , PBC i PAC są równe. Oblicz długość odcinka PC wiedząc, że $|PA|^2 + |PB|^2 = m$.
- * * * * *
192. Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Obwód trójkąta jest równy 21 , a kosinus największego kąta $-0,1$. Oblicz długości boków tego trójkąta.
193. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Wykaż, że jego różnicą jest długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
194. R Wykaż, że jeśli długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa jednej trzeciej długości jednej z wysokości tego trójkąta.
195. R Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz tangens jednego z kątów ostrych trójkąta.
196. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus jednego z kątów ostrych.
197. W W trójkącie prostokątnym długości wysokości i środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego oraz długość przeciwprostokątnej tworzą ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów jest równy 8 . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

RÓWNOLEGŁOBOKI

198. Stosunek długości przekątnych rombu o boku 17 cm jest równy $5 : 3$. Oblicz pole rombu.
199. W Jedna z przekątnych równoległoboku ma długość 6 i tworzy z bokami kąty o miarach 30° i 105° . Oblicz pole równoległoboku.
200. Kąt ostry między przekątnymi równoległoboku $KLMN$ ma miarę 60° . Przekątna KM ma długość 6 , a przekątna LN jest prostopadła do boku KN . Oblicz długości boków równoległoboku.
201. W równoległoboku, w którym boki mają długości 1 i 3 , symetralna krótszego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku. Znajdź długości przekątnych tego równoległoboku.
202. Długości boków równoległoboku są równe 6 i 10 , a jego pole wynosi 36 . Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
203. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te dzielą przekątną na trzy części. Każda z nich jest odcinkiem o długości 4 cm. Oblicz pole tego prostokąta.
204. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 45° . Punkt wspólny przekątnych równoległoboku jest oddalony od boków o $2\sqrt{2}$ i 2 .
a) Oblicz pole równoległoboku.
b) Oblicz długości przekątnych równoległoboku.
205. Uzasadnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.
206. Pole rombu jest cztery razy większe od pola koła weń wpisanego. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu.
207. R Przez jeden z wierzchołków rombu poprowadzono prostą, która odcina na przedłużeniach dwóch jego boków odcinki o długościach 4 i 9 . Oblicz długość bok rombu.
208. Dłuższa przekątna równoległoboku o kącie ostrym 60° ma długość $3\sqrt{7}$. Różnica długości jego boków wynosi 3 . Oblicz pole tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.
209. R Krótszy bok równoległoboku ma długość 3 . Dwa okręgi o promieniu 1 wpisano w równoległobok w taki sposób, że oba okręgi są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do trzech boków równoległoboku. Oblicz długość dłuższego boku równoległoboku.

210. R Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku o obwodzie równym 26. Wiedząc, że $|\angle ABC| = 120^\circ$ i promień okręgu wpisanego w trójkąt BCD jest równy $\sqrt{3}$, oblicz długość przekątnej BD .
211. R Wyznacz długość boku rombu $ABCD$, wiedząc, że długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD są odpowiednio równe R_C i R_D .
212. W Wykaż, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

TRAPEZY

213. R Ramiona trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10. Odcinek łączący środki ramion ma długość 10. Oblicz długości podstaw trapezu.
214. Podstawy trapezu mają długości 4 i 8. Kąty, jakie tworzą ramiona z dłuższą podstawą, mają miary 30° i 45° . Oblicz pole trapezu.
215. R Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z ramieniem kąt prosty. Wysokość trapezu poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na odcinki o długościach a i b ($a > b$). Oblicz pole trapezu.
216. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli trapez na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Znajdź pole tego trapezu wiedząc, że ramię prostopadłe do podstaw ma długość 2.
217. R Podstawy trapezu mają długość 6 i 2, a wysokość ma długość 4. Oblicz odległość punktu przecięcia przekątnych trapezu od jego podstaw.
218. R Boki trapezu równoramiennego są w stosunku 17 : 13 : 7 : 13. Oblicz obwód trapezu wiedząc, że jego pole jest równe 36.
219. Krótsza podstawa trapezu równoramiennego jest dwa razy krótsza niż dłuższa postawa i trzy razy krótsza niż przekątna trapezu. Znajdź miary kątów między przekątnymi tego trapezu.
220. R Na trapezie równoramiennym o podstawach 2 i 6 opisano okrąg. Oblicz pole trapezu, jeśli dłuższa podstawa jest średnicą tego okręgu.
221. W trapezie $ABCD$ ramię AD i podstawa CD mają długość 4, a ramię BC i przekątna AC mają długość 6. Oblicz długość podstawy AB .
222. R Przekątne trapezu prostokątnego o podstawach długości 4 i 9 są prostopadłe. Oblicz długość krótszego ramienia.

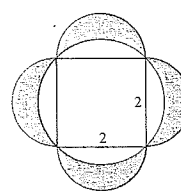
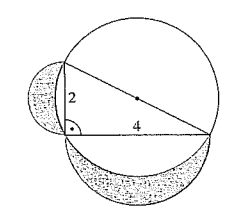
223. R Okrąg o wpisany jest w trapez $ABCD$. Punkt styczności tego okręgu z podstawą AB jest odległy od wierzchołka B o 9 cm, a punkt styczności z podstawą CD odległy jest od wierzchołka C o 4 cm. Oblicz długość promienia okręgu o .
224. Odcinek łączący środki ramion trapezu opisanego na okręgu o promieniu 1 ma długość 4. Oblicz obwód i pole tego trapezu.
225. Stosunek długości ramion trapezu opisanego na okręgu o promieniu 6 wynosi 3 : 4. Obwód trapezu jest równy 70. Oblicz długości podstaw trapezu.
226. Przekątna trapezu równoramiennego dzieli jego kąt ostry na kąty o miarach α i β (α – kąt między przekątną i podstawą). Wyznacz stosunek pól trójkątów, na jakie przekątna ta podzieliła trapez.
227. Obwód trapezu równoramiennego wynosi 116 cm, a długość odcinka łączącego środki jego ramion jest równa 41 cm. Długość ramienia i długości podstaw tworzą (w podanej kolejności) rosnący ciąg arytmetyczny. Oblicz pole trapezu.
228. W Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest prostopadła do ramienia BC i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Wyznacz stosunek pól trójkątów ABC i ACD .
229. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b ($a > b$) opisany jest na okręgu. Oblicz pole koła, którego brzegiem jest okrąg wpisany w ten trapez.
230. Kąty ostre trapezu mają miary α i β , a pole tego trapezu jest równe P . Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.
231. Najkrótszy bok trapezu równoramiennego ma długość równą długości promienia okręgu weń wpisanego. Wyznacz tangens kąta ostrego trapezu.
232. Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok ma długość $\frac{3}{2}r$. Oblicz pole tego trapezu oraz stosunek długości jego przekątnych.
233. Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 3 cm i 5 cm. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie figury, których stosunek pól wynosi 5 : 11. Oblicz długości podstaw trapezu.
234. R W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC zawierają się w prostych prostopadłych. Oblicz pole trapezu, mając dane $|AD| = a$ oraz $|\angle ABC| = |\angle DAC| = \alpha$.

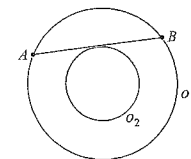
235. W Wykaż, że jeśli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej jego kąta ostrego, to ramię jest równe krótszej podstawie.
236. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przekątna trapezu dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy. Oblicz długości boków trapezu wiedząc, że jego pole jest równe $3\sqrt{3}$.
237. R Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Wykaż, że trójkąt SBC jest prostokątny.
238. W Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległości 1 cm i 2 cm od końców ramienia pochylego danego trapezu. Oblicz pole trapezu.
239. Punkt styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzieli ramię trapezu w stosunku 1:2. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie.
240. R W trapezie równoramiennym przekątna ma długość d i tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze α . Oblicz pole tego trapezu.
241. W W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, ramię ma długość 7 cm, a przekątna 8 cm. Oblicz długości podstaw trapezu wiedząc, że odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 4 cm.
- 242.* Obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równy 16, a przekątna trapezu ma długość 5. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez i promienia okręgu opisanego na nim.
- 243.* W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych tego trapezu od prostych zawierających jego boki.
- 244.* R Jedna z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnicą okręgu. Oblicz kosinus kąta ostrego trapezu wiedząc, że stosunek obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw jest równy 1,5.
- 245.* W Podstawy trapezu mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90° . Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw.
246. R Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Wykaż, że
- polu tych trójkątów, w których jeden z boków jest ramieniem trapezu, są równe;
 - stosunek pól tych trójkątów, w których jeden z boków jest podstawą trapezu, jest równy stosunkowi kwadratów długości podstaw trapezu.
 - stosunek pól trójkątów takich, że bokiem jednego jest ramię trapezu, a bokiem drugiego jest podstawa trapezu, jest równy stosunkowi długości podstaw trapezu.

247. R W trapez o polu 168 i ramionach długości 13 i 15 można wpisać okrąg. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
- 248.* Pole trapezu jest równe S , a stosunek długości jego podstaw wynosi k . Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.
- 249.* Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem punkt przecięcia przekątnych trapezu, są równe S_1 i S_2 . Oblicz pole trapezu.
250. R Ramiona trapezu są średnicami dwóch okręgów. Wykaż, że jeśli okręgi te są styczne zewnętrznie, to w trapez ten można wpisać okrąg.
251. Udowodnij, że w trapezie, który ma dwa kąty ostre przy jednej z podstaw, suma kwadratów przekątnych równa jest sumie podwojonego iloczynu dwóch boków równoległych i kwadratów pozostałych boków.
- INNE CZWOROKĄTY**
252. W Bok KN czworokąta $KLMN$ wpisanego w okrąg jest średnicą tego okręgu. Poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie L . Tworzy ona z bokami KL i LM kąty ostre równe odpowiednio 20° i 30° . Oblicz miary kątów czworokąta $KLMN$.
253. R Przekątna AC czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku S jest średnicą tego okręgu. Wiedząc, że kąt A jest ostry i $|\angle BSD| = 100^\circ$, oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.
254. W Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na nim odpowiednio w punktach K i L . Oblicz miary kątów czworokąta $ABKL$ wiedząc, że $|\angle BAC| = 60^\circ$ i $|\angle ABC| = 40^\circ$.
255. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Uzasadnij, że środki tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg.
256. R Bok AB czworokąta $ABCD$ jest średnicą okręgu opisanego na tym czworokącie. Boki BC i CD mają równą długość, a przekątna BD tworzy z bokiem BC kąt 20° . Oblicz kąty czworokąta $ABCD$.
257. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach 20° i 40° . Oblicz miary kątów czworokąta.
258. Boki AB i BC czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są równe przekątnej AC . Kąt BAD ma miarę 80° . Znajdź miary pozostałych kątów czworokąta $ABCD$.

259. Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC , a punkt S jest punktem ich przecięcia. Uzasadnij, że
a) na czworokącie $LSKC$ można opisać okrąg;
b) okręgi opisane na trójkątach ABC i ABS mają promień równej długości.
260. Czworokąt $ABCD$ o obwodzie 20 opisany jest na okręgu. Oblicz długość boku AD wiedząc, że długości boków AB , BC i CD w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
261. Dwa sąsiednie boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długość 5 cm i 8 cm, przekątna, której końcami są końce tych boków, ma długość 7 cm, a pozostałe dwa boki mają równą długość. Oblicz pole tego czworokąta.
262. Wykaż, że jeżeli w czworokącie $ABCD$ dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i C przecinają dwusieczne kątów przy wierzchołkach B i D w czterech różnych punktach, to punkty te leżą na pewnym okręgu.
263. R Dwusieczna kąta B trójkąta ABC przecina bok AC w punkcie S , a dwusieczna kąta C przecina bok AB w punkcie T . Dwusieczne przecinają się w punkcie O . Znajdź miarę kąta A , jeżeli wiadomo, że na czworokącie $ATOS$ można opisać okrąg.
264. Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
265. R Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Proste zawierające boki AB i CD przecinają się w punkcie K . Oblicz, ile razy bok AB jest dłuższy niż bok CD , jeżeli punkt B jest środkiem odcinka AK i $|DK| : |CK| = 1 : 8$.
- 266.* W W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta, wiedząc, że $|AB| = |BC|$, $|\angle ADC| = 120^\circ$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi $2 : 1$.
- 267.* R W kole o środku O poprowadzono dwie prostopadłe średnice AB i CD oraz cięciwę AM przecinającą średnicę CD w punkcie K . Oblicz miarę kąta BAM wiedząc, że w czworokąt $OBMK$ można wpisać okrąg.
- 268.* R Jeden z kątów czworokąta wpisanego w okrąg ma miarę 60° , boki zawarte w ramionach tego kąta są równe. Wykaż, że suma długości pozostałych dwóch boków jest równa długości przekątnej poprowadzonej z wierzchołka kąta o mierze 60° .
- 269.* R Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E . Wiadomo, że trójkąty ABE i CDE mają równe pola, długość boku AB jest równa 4, a przekątna AC jest zawarta w dwusiecznej kąta A . Oblicz długość boku BC .

OKRĄG, KOŁO

270. Na kwadracie, którego bok ma długość 2, opisano okrąg i w kwadrat ten wpisano okrąg. Oblicz pole pierścienia wyznaczonego przez te okręgi.
271. R W kole poprowadzono cięciwę i średnicę. Cięciwa dzieli średnicę na odcinki o długościach 2 oraz 10 i tworzy z nią kąt o mierze 30° . Oblicz odległość środka okręgu od cięciwy.
272. Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono średnicę AB i cięciwę AC , które tworzą kąt o mierze 20° . Przez punkt C poprowadzono styczną do okręgu przecinającą prostą AB w punkcie D . Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ACD .
273. R Różnica promieni dwóch okręgów współśrodkowych jest równa 3. W okręgu o większym promieniu poprowadzono cięciwę styczną do drugiego okręgu. Cięciwa ta ma długość 10. Oblicz długość promieni tych okręgów.
274. W kole o środku S poprowadzono cięciwę, która nie jest średnicą. Punkt A dzieli tę cięciwę na dwa odcinki o długościach 11 i 29. Odcinek AS ma długość 15. Oblicz promień tego koła.
275. W Pole koła wpisanego w sześciokąt foremny wynosi 9 cm^2 . Oblicz pole koła opisanego na tym sześciokącie.
276. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.
- a) 
- b) 
277. Podstawą trójkąta równobocznego jest średnica koła. Oblicz stosunek pola części trójkąta leżącej na zewnątrz koła do pola części trójkąta leżącej wewnątrz koła.
278. Dany jest okrąg o_1 . Kreślimy cięciwę AB nieprzechodzącą przez środek okręgu o_1 , a następnie rysujemy okrąg o_2 współśrodkowy z okręgiem o_1 i styczny do cięciwy AB . Okręgi o_1 i o_2 ograniczają pierścień kołowy. Uzasadnij, że pole pierścienia kołowego nie zależy od długości promienia okręgu o_1 (zależy tylko od długości cięciwy AB).
279. W kąt o mierze 60° wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie. Promień mniejszego okręgu ma długość 1. Oblicz długość promienia drugiego okręgu.

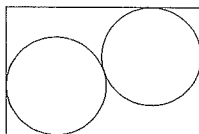


280. R Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym 60° ma długość 2. Oblicz pole powierzchni tego wycinka.
281. Odległość między środkami okręgów o promieniach 2 i 7 wynosi 13. Prosta k jest styczna do obu okręgów. Znajdź odległość między punktami styczności prostej k z tymi okręgami. Rozważ dwa przypadki.

282. R Na zewnątrz trójkąta o bokach długości 4π , 5π i 6π poprowadzono linię, do której należą wszystkie punkty odległe od tego trójkąta o 1. Oblicz długość tej linii.

283. W Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku a . Punkt K jest punktem wspólnym okręgów $o(A, a)$ i $o(B, a)$, punkt L jest punktem wspólnym okręgów $o(C, a)$ i $o(D, a)$, przy czym oba punkty należą do kwadratu $ABCD$. Wyznacz odległość między punktami K i L .

284. W prostokąt o bokach długości 24 i 32 wpisano w sposób pokazany na rysunku dwa styczne okręgi o równych promieniach. Oblicz długość promieni okręgów.



285. R Prosta k jest styczna do okręgu $o(S, r)$ w punkcie K , prosta l przecina ten okrąg w punktach L i M . Punkt A jest punktem wspólnym prostych k oraz l i punkt M należy do odcinka LA . Uzasadnij, że jeżeli odległość punktu M od punktu K jest równa długości odcinka MA , to odległość punktu L od punktu K jest równa długości odcinka AK .

286. W okrąg wpisano trójkąt ABC , w którym $|\angle A| = 50^\circ$ i $|\angle B| = 70^\circ$. Przez wierzchołek kąta C poprowadzono styczną do okręgu, przecinającą przedłużenie boku AB w punkcie D . Oblicz miary kątów trójkąta BCD .

287. R Dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 przecinają się w punktach A i B , przy czym punkty S_1 i S_2 leżą po przeciwnych stronach prostej AB . Miary kątów $\angle AS_1B$ i $\angle AS_2B$ wynoszą odpowiednio 90° i 60° . Wyznacz długości promieni tych okręgów wiedząc, że $|S_1S_2| = a$.

288. W kwadrat $ABCD$ o boku długości $2a$ wpisano okrąg. Oblicz długość cięciwy wyciętej przez ten okrąg z odcinka łączącego wierzchołek A ze środkiem boku CD .

289. W Punkt P należy do okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$. Wykaż, że wyrażenie $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ ma stałą wartość, niezależną od wyboru punktu P .

- 290.* R Punkt P należy do okręgu opisanego na prostokącie o bokach a i b . Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od prostych zawierających boki prostokąta jest równa $a^2 + b^2$.

291. Trzy okręgi o promieniach 2, 4 i 6 są parami zewnętrznie styczne. Oblicz długość promienia okręgu, do którego należą punkty styczności tych okręgów.

292. W Częścią wspólną koła k o promieniu 5 i prostej przechodzącej przez punkt A nienależący do koła k jest odcinek KL o długości 7 (punkt L należy do odcinka AK). Wiedząc, że odległość punktu L od punktu A jest równa 9, oblicz odległość środka koła k od punktu A .

293. W Prosta k jest styczna do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B . Wykaż, że prosta AB przechodzi przez środek odcinka, którego końcami są punkty styczności prostej k z okręgami.

294. Ramiona kąta ostrego o mierze 2α przecięto prostą k prostopadłą do dwusiecznej kąta w odległości d od jego wierzchołka. W ten kąt wpisano dwa okręgi, każdy styczny do obu ramion kąta i prostej k . Oblicz odległości środków tych okręgów.

295. R Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą l prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i do prostej l . Oblicz stosunek pól tych kół.

296. W Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie P . Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B ($A \neq B$). Wykaż, że kąt APB jest prosty.

- 297.* R W półkole o średnicy AB wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego jednocześnie do półokręgu AB , do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB , jeśli $|AB| = 2R$.

- 298.* Dwa okręgi o promieniach r i R ($r < R$) są styczne zewnętrznie. Prosta l nie przechodzi przez punkt wspólny tych okręgów i jest styczna do każdego z nich. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej l . Rozważ dwa przypadki.

ZADANIA INNE

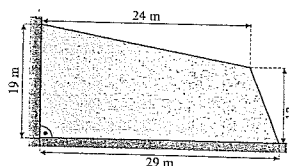
299. Twierdzenie. Liczba przekątnych n -kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$. Wykorzystując podany wzór
- oblicz liczbę przekątnych siedmiokąta wypukłego;
 - oblicz liczbę boków wielokąta wypukłego, jeżeli jest ona równa liczbie przekątnych tego wielokąta;
 - oblicz liczbę boków wielokąta wypukłego, jeżeli ma on 54 przekątne;
 - oblicz, ile co najwyżej boków ma wielokąt wypukły, jeżeli jego liczba przekątnych jest mniejsza od 27;
 - uzasadnij, że jeżeli liczba boków wielokąta wypukłego jest liczbą nieparzystą, to liczba przekątnych wielokąta jest wielokrotnością liczby jego boków.

300. Twierdzenie. Suma miar kątów n -kąta wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- Wielokąt W_1 ma o pięć wierzchołków więcej niż wielokąt W_2 . Oblicz, o ile stopni suma miar kątów wielokąta W_1 jest większa od sumy miar kątów wielokąta W_2 .
 - Oblicz miarę kąta dwudziestokąta foremnego.

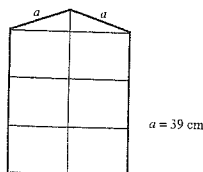
301. Twierdzenie. Jeżeli n prostych zawiera się w jednej płaszczyźnie i żadne dwie nie są równoległe oraz żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, to proste te rozcinają płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ rozłącznych części.
- Oblicz, na ile rozłącznych części dzieli płaszczyznę cztery proste spełniające podane w twierdzeniu warunki. Wykonaj rysunek obrazujący ten podział.
 - Na płaszczyźnie leży k prostych spełniających podane w twierdzeniu warunki. O ile zmniejszy się liczba części, na które dzieli płaszczyznę proste, jeżeli usuniemy jedną z tych prostych?
302. Definicja. Podział odcinka, w wyniku którego otrzymujemy dwa odcinki takie, że stosunek długości krótszego z nich do długości dłuższego jest równy stosunkowi długości dłuższego odcinka do długości odcinka dzielonego, nazywamy złotym podziałem odcinka.
- Odcinek AB podzielono na dwa odcinki o długościach $2\sqrt{5}$ i $5 - \sqrt{5}$. Rozstrzygnij, czy dokonano złotego podziału odcinka AB .
 - Dokonano złotego podziału odcinka o długości 2. Oblicz długości odcinków, na jakie podzielono dany odcinek.
303. R Miara najmniejszego kąta wielokąta W jest równa 100° , a największego 170° . Miary wszystkich kątów tego wielokąta ustawione od najmniejszej do największej tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz, ile przekątnych ma wielokąt W .
304. Punkt P , będący punktem wewnętrznym trójkąta ABC , przekształcamy przez symetrię względem prostych zawierających boki AB , BC i AC otrzymując odpowiednio punkty P_1 , P_2 i P_3 . Udowodnij, że pole sześciokąta $AP_1BP_2CP_3$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC .
305. Do obszaru kąta ostrego o mierze α należy punkt P , którego odległości od ramion kąta są równe a i b . Oblicz odległość punktu P od wierzchołka kąta.

ZADANIA Z KONTEKSTEM REALISTYCZNYM

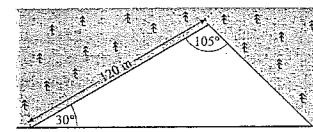
306. Plac w kształcie czworokąta przylega dwoma bokami do muru (patrz rysunek). Wzdłuż pozostałych dwóch boków placu zbudowano ogrodzenie z drucianej siatki. Wykorzystując dane zamieszczone na rysunku, oblicz
- pole placu;
 - ile metrów siatki wykorzystano do ogrodzenia tego placu.



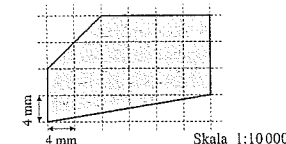
307. Okno o obwodzie 2,6 m składa się z dwóch części: prostokątnej i trójkątnej (patrz rysunek). Część trójkątna ma kształt trójkąta równoramiennego o długości ramienia wynoszącej 39 cm i wysokości o 57 cm krótszej od podstawy. Oblicz pole powierzchni tego okna. Wynik podaj w m^2 .



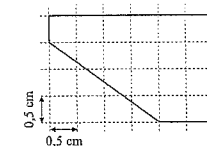
308. Działka pana Pawlaka znajdująca się między drogą a lasem ma kształt trójkąta. Na rysunku przedstawiono widok tej działki z zaznaczonymi wynikami pomiarów geodezyjnych. Pan Pawlak ma zapas ziarna wystarczający do obsiania działki o powierzchni 50 arów. Sprawdź, czy posiadany zapas ziarna wystarczy do obsiania tej działki. Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1,73$.



309. Na rysunku przedstawiony jest fragment planu wykonanego w skali 1:10 000, z zaznaczonym na nim terenem parku. Oblicz powierzchnię parku. Wynik podaj w hektarach.

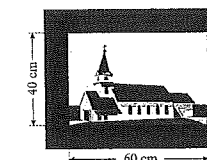


310. Powierzchnia działki, której granice zaznaczone zostały na mapie (patrz rysunek) jest równa 18 arów.
- Znajdź skalę mapy.
 - Oblicz, ile metrów siatki należy zakupić, aby ogrodzić tę działkę.



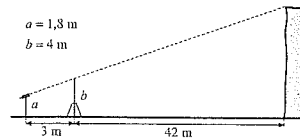
311. Samolot lecący na wysokości 9000 m z prędkością 720 km/godz. przelatuje dokładnie nad wieżą kontrolną. W jakiej odległości od wieży będzie znajdował się samolot po upływie minuty? Wysokość wieży należy zaniedbać.

312. Obraz o wymiarach 40 cm $\times$ 60 cm oprawiony został w drewnianą ramę wykonaną z cienkiej prostokątnej listwy (rysunek obok). Oblicz szerokość ramy wiedząc, że pole powierzchni jej zewnętrznej części (widocznej na rysunku obok) jest równe polu obrazu.

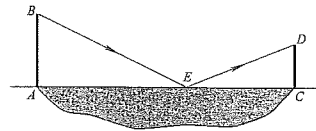


313. Wymiary prostokątnej działki o powierzchni 96 arów różnią się o 43 metry. Właściciel działki zamierza posadzić drzewa wzdłuż wszystkich boków działki, przy czym planuje posadzić drzewo w każdym z czterech narożników działki, wzdłuż krótszych boków działki drzewa mają być posadzone co 5 metrów, a wzdłuż dłuższych co 8 metrów. Ile drzew planuje posadzić właściciel działki?
314. Pewnego słonecznego dnia cień pana Adama był półtora raza dłuższy niż cień jego syna. Oblicz wzrost pana Adama wiedząc, że jest on o 60 cm wyższy od syna.
315. Koszykarz o wzroście 210 cm stoi w odległości 10 m od drzewa. Drzewo rzuca cień długości 14,4 m, zaś cień koszykarza ma długość 3,15 m. Oblicz odległość czubka głowy koszykarza od wierzchołka drzewa.

316. Do pomiaru wysokości ściany skalnej wykorzystano przyrząd optyczny z lunetą zamontowany na stojaku o wysokości 1,8 m i tyczkę geodezyjną o wysokości 4 m. Przyrządy ustawione zostały względem ściany w sposób pokazany na rysunku. Oblicz wysokość ściany.

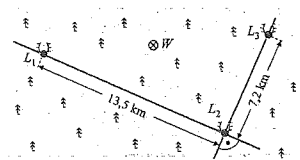


317. Po przeciwnych stronach jeziora, nad jego brzegiem, znajdują się dwie wieże obserwacyjne o wysokościach 50 m i 30 m (patrz rysunek). Zauważono, że promień świetlny wysłany ze szczytu wyższej wieży odbija się od powierzchni jeziora w odległości 120 m od podstawy wieży i trafia do obserwatora znajdującego się na wierzchołku drugiej wieży.



- a) Oblicz, jaka jest szerokość jeziora na odcinku między wieżami obserwacyjnymi.
b) Oblicz, jaką drogę przebywa promień świetlny.
Przyjmij, że obowiązuje prawo odbicia, tzn. kąt padania równa się kątowi odbicia.

318. Wieża obserwacyjna W znajduje się w równych odległościach od trzech leśniczówek L_1 , L_2 i L_3 . Na rysunku obok przedstawiono fragment planu z zaznaczonym położeniem leśniczówek i wieży obserwacyjnej.

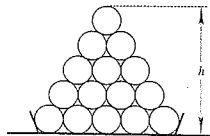


- a) Oblicz odległość wieży od leśniczówek.
b) W jakiej odległości od drogi łączącej leśniczówki L_1 i L_2 znajduje się wieża obserwacyjna?

319. Jedno ramię dziecięcej huśtawki jest nieco krótsze i jego długość stanowi $\frac{8}{9}$ długości drugiego ramienia. Gdy dłuższe ramię dotyka podłoża, koniec krótszego ramienia znajduje się na wysokości 96 cm nad ziemią.

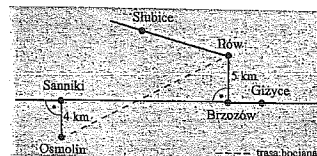


- a) Oblicz, na jakiej maksymalnej wysokości może znaleźć się koniec dłuższego ramienia huśtawki.
b) Przesunięto punkt podparcia tak, aby oba ramiona huśtawki miały tę samą długość. Oblicz, na jakiej maksymalnej wysokości może znaleźć się wówczas koniec ramienia huśtawki.

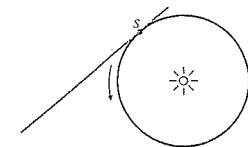


320. Rury ciepłownicze, każda o średnicy zewnętrznej jednego metra, zostały ułożone w stos, którego przekrój pokazany jest na rysunku. Oblicz, jaka jest wysokość tego stosu.

321. Autobus jadący ze średnią prędkością 35 km/godz. trasę z Iłowa do Osmolina, przez Brzozów i Sanniki, pokonuje w 36 minut (patrz mapka obok). Ile czasu będzie potrzebował bocian na przelot z Osmolina do Iłowa lecąc z prędkością 20 km/godz.?

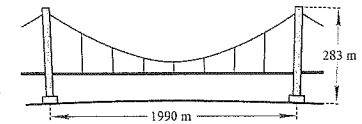


322. Kolarz jeździ po torze w kształcie okręgu o średnicy 72 m. W środku toru ustawiona jest latarnia, a wzdłuż stycznej do toru w punkcie startu S, znajduje się parkan (rysunek obok).



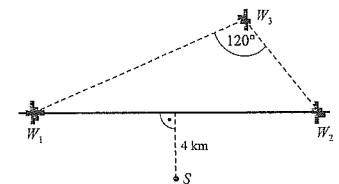
- a) Oblicz, jaką odległość przebył cień kolarza na parkanie, jeżeli kolarz pokonał $\frac{1}{12}$ długości toru.
b) Po upływie 3 sekund od momentu startu cień kolarza znajdował się w odległości 36 m od punktu S. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał kolarz. Wynik podaj w m/s.

323. Przy projektowaniu współczesnych, olbrzymich konstrukcji inżynierskich uwzględnia się kulistość Ziemi. Pylony mostu wiszącego Akashi-Kaikyo, wybudowanego w Japonii w 1993 roku, zostały tak ustawione, aby ich osie skierowane były dokładnie w kierunku środka Ziemi. Każdy z pylonów ma wysokość 283 m, a odległość między ich podstawami, mierzona wzdłuż linii prostej, wynosi 1990 m.



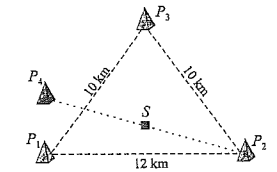
- Oblicz, o ile odległość między wierzchołkami pylonów jest większa od odległości między ich podstawami. Wynik podaj w mm po zaokrągleniu do jedności. Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6371 km. Na rysunku nie zachowano skali.

324. Na rysunku pokazano położenie w terenie trzech wsi W_1 , W_2 i W_3 . Studnia głębinowa S, która zaopatruje w wodę wszystkie wsie została zlokalizowana w odległości 4 km od drogi łączącej W_1 z W_2 . Wiadomo również, że odległości od studni do każdej wsi, mierzone wzdłuż linii prostych, są takie same.



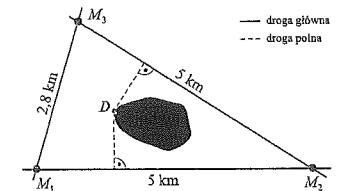
- a) Oblicz odległość między wsią W_1 , a W_2 .
b) Oblicz odległość od studni do wsi W_3 .

325. Według przekazów historycznych nieistniejąca już dziś świątynia S znajdowała się w tych samych odległościach od piramid P_1 , P_2 i P_3 , których wzajemne położenie przedstawiono na rysunku (piramida P_2 znajduje się dokładnie na wschód w stosunku do piramidy P_1).



- a) Oblicz, w jakich odległościach od piramid znajdowała się świątynia.
b) Na północ od piramidy P_1 położona jest czwarta piramida P_4 , o której wiadomo, że również znajduje się w tej samej odległości od świątyni co pozostałe. Jaka odległość dzieli piramidy P_1 i P_4 ?

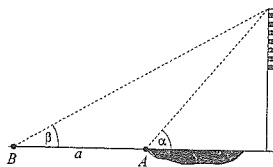
326. Ania mieszka w miejscowości M_1 , Tomek w miejscowości M_2 , a Rafał w miejscowości M_3 . Pewnego dnia cała trójka umówiła się na wycieczkę rowerową. Za miejsce spotkania wybrali stary dąb D nad jeziorem, który znajduje się w równych odległościach od dróg łączących miejscowości M_1 i M_2 , M_2 i M_3 oraz M_1 i M_3 . Na rysunku pokazano plan okolicy z zaznaczonymi polnymi drogami prowadzącymi do dębu.



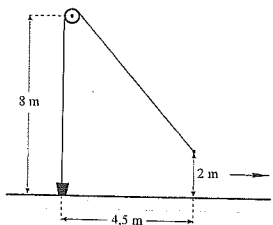
- a) Oblicz, w jakiej odległości od drogi łączącej miasto M_1 z M_2 znajduje się dąb.
b) Oblicz, jaką odległość od miejsca zamieszkania do miejsca spotkania musiła pokonać każda z osób, jeżeli wiadomo, że jechali po zaznaczonych na planie drogach i każda z nich przebyła najkrótszą możliwą odległość.

327. Miasto B położone jest w odległości 12 km na północ od miasta A . Miasto C leży 15 km na zachód od B , a miasto D w odległości 10 km na zachód od A . Miasta A i B , B i C , C i D oraz A i D połączone są prostoliniowymi odcinkami dróg.
- Wykonaj dokładny rysunek.
 - Uzasadnij, że można znaleźć takie miejsce na budowę oczyszczalni ścieków, aby była ona położona w takiej samej odległości od wszystkich dróg łączących dane miasta. Określ, jakie to miejsce i oblicz tę odległość.
 - Oblicz, jaka będzie wówczas odległość, w linii prostej, od oczyszczalni ścieków do miasta C .

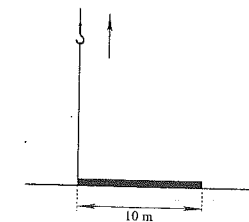
328. W celu wyznaczenia szerokości rzeki zmierzono kąty pod jakimi widać komin fabryczny stojący po przeciwnej stronie rzeki, w odległości 10 m od jej brzegu. Obrano dwa punkty pomiarowe, punkt A na brzegu rzeki i punkt B oddalony o a od punktu A (rysunek obok).
- Podaj wzór wyrażający szerokość rzeki w zależności od wartości a , α i β .
 - Oblicz szerokość rzeki wiedząc, że $a = 100$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



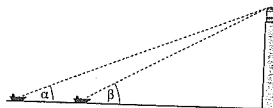
329. Przez błocek zamontowany na wysokości 8 m nad ziemią przrzucona jest lina. Do jednego końca liny przymocowane jest wiadro, a drugi koniec liny, znajdujący się na wysokości 2 m nad ziemią, trzyma w dłoniach robotnik. Robotnik stoi w odległości 4,5 m od wiadra.
- Oblicz długość liny.
 - Oblicz, na jakiej wysokości znajdzie się wiadro, jeżeli robotnik – trzymając w dłoniach koniec liny na wysokości 2 m – przesunie się o 3,5 m w kierunku pokazanym na rysunku.
- Wymiary błočka i wiadra należy zaniedbać.



330. Stalowa szyna o długości 10 m leży na ziemi. Jeden koniec szyny, za pomocą dźwigu, unoszony jest pionowo do góry z prędkością 24 m/min (patrz rysunek).
- Oblicz, o ile metrów przesunie się po powierzchni ziemi drugi koniec szyny po upływie 15 sekund.
 - Oblicz, po jakim czasie drugi koniec szyny będzie znajdował się na wysokości 8 metrów nad ziemią.

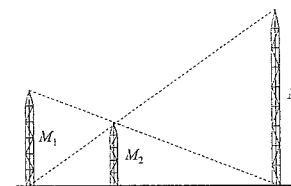


331. Ze statku płynącego w kierunku portu zmierzono w odstępie 30 min. kąty między poziomem morza, a wierzchołkiem latarni morskiej ustawionej przy wejściu do portu (rysunek obok). Wyniki pomiarów były równe: $\alpha = 2^\circ$, $\beta = 8^\circ$. Przyjmując, że $\operatorname{tg} 2^\circ = 0,035$ oraz $\operatorname{tg} 8^\circ = 0,141$, oblicz po jakim czasie od momentu drugiego pomiaru statek wpłynął do portu. Wynik podaj w minutach po zaokrągleniu do jednej.

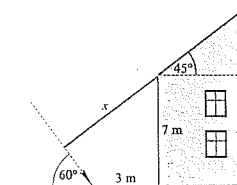


332. Kolejka toczy się po torach w kształcie okręgu. Rozstaw szyn jest równy 4 cm. Podczas jednego pełnego okrążenia lewe koło wagonu wykonało o dwa obroty więcej niż prawe. Oblicz średnicę kółek wagonu.

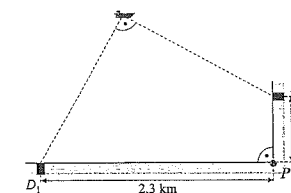
333. Na rysunku przedstawiono wzajemne położenie trzech masztów antenowych znajdujących się na terenie Institute of Telecommunications w Melbourne. Maszty ustawione są w linii prostej, a wysokości skrajnych masztów M_1 i M_3 są równe: 140 m i 260 m (patrz rysunek).
- Oblicz wysokość najniższego masztu.
 - Oblicz odległości między masztami M_1 i M_2 oraz M_2 i M_3 wiedząc dodatkowo, że maszty M_1 i M_3 ustawione są w odległości 300 m.



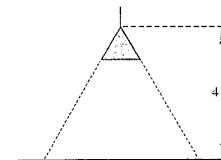
334. Na rysunku pokazany jest fragment domku jednorodzinny. Pewnego słonecznego dnia w południe promienie słoneczne padały pod kątem 60° do poziomu. Oblicz długość okapu dachu (część dachu wystającą poza ścianę budynku) wiedząc, że szerokość zacienionego pasa ziemi wzdłuż ściany budynku była równa 3 m. Pozostałe dane zamieszczono na rysunku.



335. Statek, który wpłynął do portu kieruje się do punktu przeładunkowego P . Na rysunku przedstawiono położenie statku względem nabrzeża portowego w momencie, gdy znajdował się w równych odległościach od dźwigów portowych D_1 i D_2 .
- Oblicz odległość statku od dźwigów portowych.
 - Znajdź odległość statku od punktu przeładunkowego P .
- Wyniki podaj w kilometrach.



336. Lampa zawieszona na wysokości 4 m oświetla powierzchnię w kształcie koła.
- Postanowiono zawiesić lampę o 2 m wyżej. Oblicz, o ile procent wzrosła powierzchnia oświetlona przez lampę.
 - Oblicz, na jakiej wysokości należałoby zawiesić tę lampę, aby oświetlała dwukrotnie większą powierzchnię.

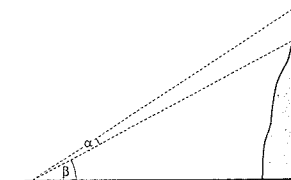


337. Pewnego dnia w południe cień masztu miał długość 17,6 m. Po kilku godzinach, gdy promienie słoneczne tworzyły z powierzchnią ziemi kąt dwa razy mniejszy niż w południe, cień masztu miał długość 45 m.
- Oblicz wysokość masztu.
 - Oblicz pod jakim kątem do powierzchni ziemi padały promienie słoneczne w południe. Wynik zaokrąglaj do pełnych stopni.

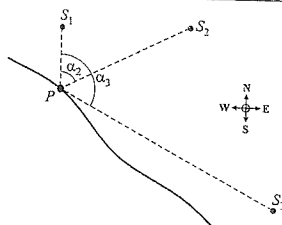
338. Z pewnego punktu w terenie, dokonano pomiaru kąta α pod jakim widać maszt telewizyjny wybudowany na szczycie góry oraz pomiaru kąta β pod jakim widać górę (rysunek obok). Wysokość masztu jest znana i wynosi h .

- Znajdź zależność między wysokością H góry, a wielkościami α , β i h .

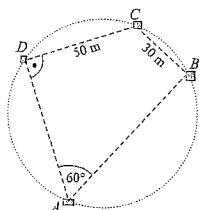
- Przyrząd pomiarowy pokazał wartości: $\operatorname{tg} \alpha = 0,05$, $\operatorname{tg} \beta = 0,45$. Wiedząc, że maszt ma wysokość 20 m, oblicz wysokość góry. Wynik podaj w metrach po zaokrągleniu do jednej.



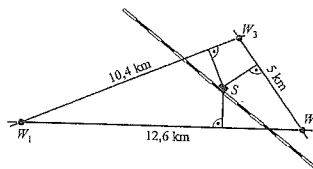
339. Na rysunku przedstawiono położenie trzech statków względem punktu P oznaczającego wejście do portu. Statek S_1 znajduje się w odległości 3 km, a statek S_2 w odległości 8 km od portu. Kąty wyznaczone zostały względem kierunku północ-południe, a ich miary wynoszą: $\alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 120^\circ$.
- Wyznacz odległość między statkami S_1 i S_2 .
 - Oblicz odległość statku S_3 od portu wiedząc, że znajduje się on w odległości 13 km od statku S_2 .



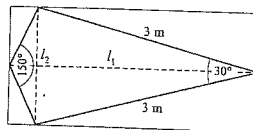
340. Rysunek przedstawia próbę rekonstrukcji dawnego placu miejskiego. Z istniejących opisów wiadomo, że plac miał kształt koła, a zachowane do dnia dzisiejszego fragmenty czterech kamieniczek znajdujących się na obrzeżu placu pozwoliły na wykonanie pomiarów, których wyniki przed stawione zostały na rysunku. Oblicz, jaka była
- odległość między kamieniczkami B i D ;
 - odległość między kamieniczkami A i C ;
 - powierzchnia placu.



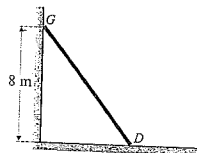
341. Stacja kolejowa S została usytuowana w równej odległości od dróg łączących wsie W_1 , W_2 i W_3 . Na planie zaznaczono odległości między wsiami i drogi dojazdowe do stacji S .
- Oblicz, w jakiej odległości od głównych dróg wybudowano stację kolejową.
 - Rozpatrzmy najkrótsze odległości, jakie trzeba pokonać, aby dojechać z każdej wsi do stacji kolejowej. Oblicz średnią tych odległości.



342. Na rysunku przedstawiono projekt poszycia latawca, które ma być wycięte z prostokątnego arkusza pergaminu. Poszycie ma kształt deltoidu. Oblicz
- długość krótszego boku latawca;
 - długości l_1 i l_2 listewek, które potrzebne będą do konstrukcji latawca;
 - pole poszycia latawca.



343. Drabina o długości 10 m oparta jest o ścianę. W pewnym momencie drabina zaczyna się zsuwać w ten sposób, że jej górny koniec pokonuje w czasie t odległość $g(t)$ określoną wzorem $g(t) = 0.5 \cdot t$, gdzie t wyrażone jest w sekundach, a $g(t)$ w metrach. Niech $d(t)$ oznacza odległość o jaką przesunął się dolny koniec drabiny w czasie t . Znajdź wzór funkcji d i określ jej dziedzinę.



3. GEOMETRIA ANALITYCZNA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

U W A G A. W poniższych wzorach przyjmujemy, że 1) $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$; 2) $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y]$.

WEKTORY

- ⇒ Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.
- ⇒ Równość wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$: $\vec{v} = \vec{u}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_x = u_x$ i $v_y = u_y$.
- ⇒ Suma i różnica wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$: $\vec{v} + \vec{u} = [v_x + u_x, v_y + u_y]$; $\vec{v} - \vec{u} = [v_x - u_x, v_y - u_y]$.
- ⇒ Iloczyn wektora $\vec{v}$ przez liczbę k : $k \cdot \vec{v} = [k \cdot v_x, k \cdot v_y]$.
- ⇒ Długość wektora $\vec{v}$: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

ODCINEK

- ⇒ Długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- ⇒ Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB : $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$.

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZES DANE PUNKTY A ORAZ B

- ⇒ $(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$.

RÓWNANIE KIERUNKOWE PROSTEJ: $y = ax + b$

- ⇒ Jeśli prosta $y = ax + b$ jest nachylona do osi OX pod kątem α , to $\tan \alpha = a$.
- ⇒ Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ prosta $y = ax + c$ jest równoległa do prostej $y = ax + b$.
- ⇒ Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ prosta $y = -\frac{1}{a}x + c$ jest prostopadła do prostej $y = ax + b$.

POSTAĆ OGÓLNA RÓWNANIA PROSTEJ: $Ax + By + C = 0$

- ⇒ Dla dowolnego $D \in \mathbb{R}$ prosta $Ax + By + D = 0$ jest równoległa do prostej $Ax + By + C = 0$.
- ⇒ Dla dowolnego $D \in \mathbb{R}$ prosta $Bx - Ay + D = 0$ (oraz prosta $-Bx + Ay + D = 0$) jest prostopadła do prostej $Ax + By + C = 0$.

PROSTA PROSTOPADŁA DO WEKTORA

- ⇒ Dla dowolnego $C \in \mathbb{R}$ prosta $Ax + By + C = 0$ jest prostopadła do wektora $\vec{w} = [A, B]$.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

- ⇒ Odległość d punktu $P = (x_P, y_P)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem $d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY PROSTYMI RÓWNOLEGLYMI

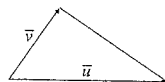
- ⇒ Odległość d między dwiema prostymi równoległymi o równaniach $Ax + By + C = 0$ i $Ax + By + D = 0$ wyraża się wzorem $d = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

RÓWNANIE OKRĘGU

- ⇒ Równanie okręgu o środku $O = (a, b)$ i promieniu r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

POLE TRÓJKĄTA

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |v_x u_y - v_y u_x|.$$



JEDNOKŁADNOŚĆ

$\Rightarrow$ Obrazem punktu A w jednokładności o środku S i skali k jest taki punkt A' , że $\vec{SA'} = k \cdot \vec{SA}$.



ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi	- rozpoznawać równanie prostej w postaci ogólnej i kierunkowej - interpretować współczynniki w równaniu kierunkowym prostej
-----------------	--

- 3.1 Dane równanie prostej sprowadź do postaci ogólnej i (o ile to możliwe) do postaci kierunkowej
 a) $4x = 2y + 5$; b) $12y = 72$; c) $7x = 8$.
- 3.2 Równanie $y = 0,25x - 1,5$ zapisz w postaci $Ax + By + C = 0$ tak, aby
 a) współczynnik A był równy 3, b) współczynnik B był równy 2, c) współczynnik C był równy -6 .
- 3.3 Napisz równanie prostej nachylonej do osi OX pod kątem α i przecinającej oś OY w punkcie o rzędnej r .
 a) $\alpha = 45^\circ$, $r = 5$; b) $\alpha = 60^\circ$, $r = -4$; c) $\alpha = 150^\circ$, $r = 3$.

Zdający potrafi	- wyznaczać równanie prostej określonej przez dwa punkty o danych współrzędnych - wyznaczać równanie prostej równoległej (prostopadłej) do danej - badać wzajemne położenie prostych w ujęciu analitycznym
-----------------	--

- 3.4 R Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B , jeśli
 a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$; b) $A = (-1, -4)$, $B = (1, 2)$; c) $A = (-4, 2)$, $B = (1, 2)$;
 d) $A = (1, -4)$, $B = (1, 2)$.
- 3.5 W Zbadaj, czy punkty A, B, C są współliniowe, jeśli
 a) $A = (-4, -6)$, $B = (-1, 2)$, $C = (5, 6)$; b) $A = (-5, -2)$, $B = (2, -1)$, $C = (8, 0)$.
- 3.6 R Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$, jeżeli prosta k ma równanie
 a) $y = 3x - 5$; b) $2x + 3y + 7 = 0$; c) $y = -2$; d) $x = -2$.
- 3.7 R Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$, jeżeli prosta k ma równanie
 a) $y = 3x - 5$; b) $2x + 3y + 7 = 0$; c) $y = -2$; d) $x = -2$.
- 3.8 R Wyznacz współrzędne wszystkich punktów wspólnych prostych o równaniach
 a) $y = 2x + 4$ i $y = -x + 7$; b) $4x + 2y - 1 = 0$ i $12x = 3 - 6y$; c) $x + 2 = 0$ i $y + 5 = 0$.

Zdający potrafi

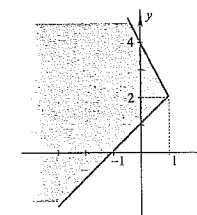
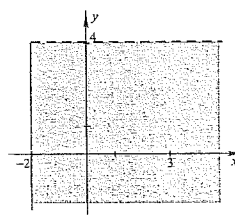
- wyznaczać odległość dwóch punktów
- wyznaczać odległość: punktu od prostej, dwóch prostych równoległych

- 3.9 R Dane są punkty $A = (-2, -1)$ i $B = (10, 4)$ oraz prosta k o równaniu $y = -0,5x + 3$. Oblicz
 a) długość odcinka AB ; b) odległość punktu A od prostej k ; c) odległość prostej k od prostej $y = -0,5x + 2$.

Zdający potrafi

- graficznie przedstawiać równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi
- zaznaczać w układzie współrzędnych zbiór punktów określony przez układ nierówności liniowych
- opisywać za pomocą układu nierówności zbiory punktów

- 3.10 Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór tych punktów (x, y) , których współrzędne spełniają warunek
 a) $y = 2x + 3$; b) $y \leq 2x + 3$; c) $y > 2x + 3$.
- 3.11 Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór A , jeżeli
 a) $A = \{(x, y): x > 0 \wedge y < 0\}$; b) $A = \{(x, y): x \leq 2 \wedge y \geq 1\}$; c) $A = \{(x, y): y \geq -x - 1 \wedge y \leq -x + 2\}$;
 d) $A = \{(x, y): x + y - 3 \leq 0 \wedge 2x - y \geq 0\}$; e) $A = \{(x, y): x + y - 3 \leq 0 \vee 2x - y \geq 0\}$.
- 3.12 Opisz za pomocą układu nierówności zbiór punktów leżących między prostymi o równaniach $y = 2x$ i $y = 2x + 3$.
- 3.13 Opisz za pomocą układu nierówności zbiór punktów należących do trójkąta ABC , jeśli
 a) $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 4)$; b) $A = (0, 0)$, $B = (-4, 0)$, $C = (-2, -2)$.
- 3.14 Zbiór, którego fragment pokazany jest na rysunku, jest zbiorem punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają pewien układ dwóch nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi. Zapisz ten układ nierówności.



Zdający potrafi

- wykonywać działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę) – w ujęciu analitycznym i syntetycznym

- 3.15 Dane są wektory $\vec{u} = [-3, -2]$ i $\vec{w} = [-1, 4]$. Oblicz współrzędne wektora $\vec{v}$, jeśli
 a) $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$; b) $\vec{v} = -\vec{u}$; c) $\vec{v} = 5\vec{w}$; d) $\vec{v} = 3\vec{w} - 4\vec{u}$; e) $\vec{v} = 2(\vec{u} - 3\vec{w}) - \vec{u}$.
- 3.16 R Dane są punkty $A = (1, 3)$, $B = (3, 7)$ i $C = (5, 8)$.
 a) Oblicz współrzędne wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{BA}$. b) Oblicz długość wektora $\vec{AB}$.
 c) Znajdź taki punkt D , aby wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ były równe. d) Oblicz współrzędne środka odcinka AB .
 e) Znajdź taki punkt K , aby punkt B był środkiem odcinka AK . f) Znajdź równanie symetralnej odcinka AB .
- 3.17 R Dwa punkty dzielą odcinek o końcach $A = (17, 31)$ i $B = (53, 58)$ na trzy równe części. Znajdź współrzędne tych punktów.

- 3.18 Dane są wektory $\vec{u} = [3, 5]$ i $\vec{v} = [-2, 6]$. Wyznacz takie liczby a i b , aby $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = [10, 5]$.
- 3.19 Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Zapisz wektory $\vec{AB}$ i $\vec{AD}$ za pomocą wektorów $\vec{AC}$ i $\vec{BD}$.

Zdający potrafi	• posługiwać się równaniem okręgu • przedstawiać koło za pomocą nierówności z dwiema niewiadomymi
-----------------	--

- 3.20 Zapisz równanie okręgu o środku S i promieniu r , jeżeli
 a) $S = (0, 3)$, $r = 5$; b) $S = (2, -1)$, $r = 2$.
- 3.21 Koło k ma środek $S = (2, -1)$ i promień $r = 2$. Opisz za pomocą nierówności
 a) koło k ; b) wnętrze koła k ; c) zewnątrz koła k .
- 3.22 Podaj długość promienia i współrzędne środka okręgu o równaniu
 a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$; c) $R: x^2 + y^2 - 2y = 0$;
 d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$; e) $R: x^2 + y^2 + 3x - y + 1 = 0$.

Zdający potrafi	• graficznie przedstawiać równania (nierówności) drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi – okrąg (koło), sumę mnogościową dwóch prostych
-----------------	---

- 3.23 Jaki zbiór tworzą wszystkie punkty (x, y) , których współrzędne spełniają dane równanie?
 a) $x^2 + y^2 = 2(x+y)$; b) $(x+y)^2 = 2(xy+2)$; c) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$; d) $x^2 + x + y + 1 = 0$;
 e) $xy = 2$; f) $xy = 0$; g) $R: x^2 = y^2$; h) $9x^2 - 4y^2 = 0$;
 i) $x^2 + xy = 0$; j) $R: x^2 + 4y^2 = 4xy$; k) $R: xy + 3 = x + 3y$.
- 3.24 Zilustruj w układzie współrzędnych zbiór A
 a) $A = \{(x, y): x^2 + y^2 + 2x > 0\}$;
 b) $A = \{(x, y): -3x^2 + 6x + 1 \geq 3y^2 + 12y + 4\}$;
 c) $A = \{(x, y): xy \leq 0\}$;
 d) $A = \{(x, y): x^2 + y > 4\}$.

Zdający potrafi	• określać wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów – w ujęciu syntetycznym i analitycznym • obliczać współrzędne wspólnych punktów prostej i okręgu • posługiwać się równaniem okręgu i prostej w rozwiązywaniu zadań
-----------------	--

- 3.25 Zbadaj wzajemne położenie okręgów o równaniach
 a) $R: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ i $(x-4)^2 + y^2 = 1$;
 b) $R: x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x - 120 = 0$ i $x^2 + y^2 - 200 = 0$
 c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ i $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$.
- 3.26 R Znajdź współrzędne punktów wspólnych
 a) okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ i prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$;
 b) okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ i osi układu współrzędnych.

U W A G A. Umiejętność znajdowania współrzędnych punktów wspólnych okręgów o danych równaniach nie jest wymagana na żadnym poziomie.

- 3.27 Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 5$
 a) R w punkcie $A = (1, -2)$; b) R przechodzącej przez punkt $B = (0, 5)$;
 c) R równoległej do prostej o równaniu $2x - y = 0$; d) prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y = 0$.

- 3.28 R Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 5)$, $B = (8, -2)$ i $C = (9, 1)$.

- 3.29 R Punkty $A = (0, -1)$ i $B = (-2, 1)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$. Wyznacz współrzędne takiego punktu C należącego do okręgu, by trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB .

Zdający potrafi	• znajdować obraz figury jednokładnej do danej • stosować własności jednokładności w rozwiązywaniu zadań
-----------------	---

- 3.30 Punkt $A = (12, 6)$ przekształcono w jednokładności o środku S i skali k . Znajdź współrzędne obrazu punktu A , jeżeli
 a) $S = (-7, 5)$, $k = 1$; b) $S = (0, 0)$, $k = -1$; c) $R: S = (0, 0)$, $k = \frac{1}{3}$;
 d) $S = (4, 8)$, $k = 2$; e) $R: S = (10, 4)$, $k = -3$.
- 3.31 R Okrąg o jest obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ w jednokładności o środku $S = (5, 2)$ i skali $k = -1,5$. Znajdź środek i promień okręgu o .

Zdający potrafi	• stosować własności izometrii (symetrii i przesunięcia) w rozwiązywaniu zadań • stosować własności figur przystających w rozwiązywaniu zadań
-----------------	--

- 3.32 R Sprawdź, czy przekształcenie płaszczyzny określone wzorem $P((x, y)) = (-x, y + 1)$ jest izometrią.

- 3.33 R Znajdź obraz punktu $A = (0, 3)$
 a) w symetrii środkowej o środku $S = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$;
 b) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{v} = [-5\frac{1}{5}, 4\frac{2}{5}]$;
 c) w symetrii osiowej względem prostej o równaniu $y = 2x$.

- 3.34 R Znajdź obraz prostej o równaniu $y = 2x - 3$
 a) w symetrii środkowej względem punktu $S = (2, 3)$;
 b) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{v} = [-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}]$;
 c) w symetrii osiowej względem prostej o równaniu $y = x - 1$.

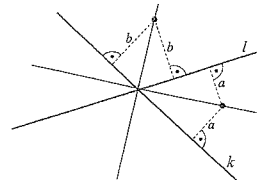
- 3.35 Uzasadnij, że parabola p o równaniu $y = x^2$ jest przystająca do paraboli q o równaniu
 a) $R: y = x^2 + 4x + 1$; b) $y = -x^2 - 2$.

- 3.36 R Obrazem koła $x^2 + y^2 + 6y \leq 0$ w pewnej izometrii jest figura F . Oblicz pole figury F .

ZADANIA MATURALNE

PROSTA

344. W Sprawdź, czy punkt $P=(5, -2)$ należy do symetralnej odcinka o końcach $A=(1, 5)$ i $B=(-3, -1)$.
345. Dana jest prosta k o równaniu $y=-2x+3$ i prosta l o równaniu $x=\sqrt{3}$.
- Sprawdź, czy punkt $P=(17, -31)$ należy do prostej k .
 - Podaj współrzędne punktu przecięcia prostych k i l .
 - Znajdź równania prostych przechodzących przez punkt $A=(5, -8)$ i równoległych do danych prostych.
346. Prosta k zawiera odcinek o końcach $A=(4, 5)$ i $B=(7, 9)$. Znajdź odległość początku układu współrzędnych od prostej k .
347. Dane są punkty $A=(-13, -16)$, $B=(-4, -2)$ i $C=(4, 10)$.
- Rozstrzygnij, czy punkty A, B, C są współliniowe.
 - Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej BC i przechodzącej przez punkt A .
348. R Prosta o równaniu $y=3x+5$ przecina oś OY w punkcie A , prosta o równaniu $2x-9y-30=0$ przecina oś OX w punkcie B , a obie proste przecinają się w punkcie C .
- Znajdź współrzędne punktów A, B i C .
 - Uzasadnij, że odcinki AB i AC są prostopadłe.
349. Proste k i l są równoległe do prostej o równaniu $2x+5y+7=0$ i przechodzą przez punkty odpowiednio $A=(-30, 12)$ i $B=(-34, 2)$.
- Znajdź równania prostych k i l .
 - Oblicz odległość między prostymi k i l .
 - Uzasadnij, że odcinek AB jest prostopadły do prostych k i l .
350. Przez punkt $A=(2, 3)$ poprowadzono prostą odcinającą na półosiach układu współrzędnych odcinki równej długości. Znajdź równanie tej prostej.
351. Prosta k przechodzi przez punkt $A=(3, 0)$ i jest nachylona do osi OX pod kątem 60° . Prosta l przechodzi przez punkt $B=(9, 0)$ i jest prostopadła do prostej k . Obie proste przecinają się w punkcie C .
- Znajdź równanie prostej k .
 - Znajdź równanie prostej l .
 - Oblicz współrzędne punktu C .
 - R Znajdź równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC .

352. Definicja. Równanie $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$, nazywamy równaniem odcinkowym prostej.
- Znajdź punkty przecięcia prostej o równaniu $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ z osiami układu współrzędnych.
 - Znajdź równanie odcinkowe prostej o równaniu ogólnym $2x+3y-6=0$.
 - Znajdź równanie odcinkowe prostej o równaniu kierunkowym $y=2x+3$.
353. Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od końców odcinka. Wykorzystując tę własność symetralnej, znajdziemy równanie symetralnej odcinka o końcach $A=(1, 3)$ i $B=(5, 9)$.
- Symetralna odcinka AB jest zbiorem tych punktów (x, y) , których odległość od punktu A : $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$ jest równa odległości od punktu B : $\sqrt{(x-5)^2 + (y-9)^2}$.
 - Otrzymujemy zatem równość $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-9)^2}$.
 - Podnosząc do kwadratu obie strony tego równania, dostajemy: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-9)^2$, a stąd otrzymujemy równanie $2x+3y-24=0$.
 - Zatem symetralną odcinka AB jest prosta o równaniu $2x+3y-24=0$.
- Postępując w analogiczny sposób, znajdziemy równanie symetralnej odcinka o końcach $K=(1, -1)$ i $L=(7, 1)$.
354. Uzasadnimy, że zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie $x^2 + y^2 + 2xy - 9 = 0$, jest sumą dwóch prostych.
- Wyrażenie $x^2 + y^2 + 2xy - 9$ zapiszemy jako różnicę dwóch kwadratów: $(x+y)^2 - 3^2$.
 - Rozkładamy otrzymane wyrażenie na czynniki: $(x+y+3)(x+y-3)$.
 - Zatem dane równanie możemy zapisać w postaci $(x+y+3)(x+y-3)=0$, a równanie to jest równoważne alternatywie równań: $x+y+3=0$ lub $x+y-3=0$.
 - Każde z otrzymanych równań jest równaniem ogólnym prostej. Uzasadniliśmy więc, że dane równanie opisuje zbiór, który jest sumą dwóch prostych.
- Uzasadnij, że zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają dane równanie, jest sumą dwóch prostych
- $x^2 + 4y^2 = 4xy + 4$;
 - $x^2 - y^2 - 6y - 9 = 0$;
 - $x^2 - y^2 + 10x + 4y + 21 = 0$.
355. Znajdziemy równania prostych zawierających dwusieczne kątów wyznaczonych przez proste o równaniach $2x+y-5=0$ i $x-2y=0$.
- 
- Zauważmy, że figura będąca sumą prostych zawierających dwusieczne kątów wyznaczonych przez dwie nierównoległe proste k i l jest zbiorem wszystkich punktów równooddalonych od prostych k i l (patrz rysunek).
 - Zatem szukane proste są zbiorem tych punktów (x, y) , których odległość od prostej $2x+y-5=0$: $\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}}$ jest równa odległości od prostej $x-2y=0$: $\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}$.
 - Otrzymane równanie $\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}$ jest równoważne alternatywie równań: $2x+y-5=x-2y$ lub $2x+y-5=-x+2y$. Wobec tego szukanymi prostymi są proste o równaniach $x+3y-5=0$ i $3x-y-5=0$.
- W podobny sposób znajdziemy równania prostych zawierających dwusieczne kątów wyznaczonych przez proste
- $4x-y+1=0$ i $x-4y+4=0$;
 - $x+y-8=0$ i $7x-y-8=0$.

356. Prosta k przechodzi przez punkt $A = (3, 2)$ i przecina dodatnie półosie układu współrzędnych w takich punktach, że iloczyn ich odległości od punktu $(0, 0)$ wynosi 25. Znajdź równanie prostej k .

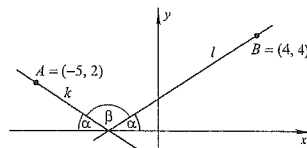
357. Dane są punkty $A = (4, 5)$, $B = (-4, -1)$ i prosta k o równaniu $x - 3y - 9 = 0$.

- W Na prostej k znajdź punkt C jednakowo oddalony od punktów A i B .
- Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt A i nachylonej do osi OX pod kątem dwa razy większym niż prosta k .

358. Promień świetlny wysłany z punktu $A = (5, 9)$ odbija się od osi OX w punkcie $B = (2, 0)$, a następnie odbija się od osi OY . Znajdź równanie prostej, po której porusza się promień po odbiciu od osi OY .

359. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych dane są punkty A i B oraz proste k i l tworzące z prostą o równaniu $y = 0$ kąty o równych miarach (patrz rysunek).

- Wyznacz równania prostych k i l .
- Oblicz tangens kąta β .



360. Dany jest punkt $A = (-1, 2)$.

- Znajdź równanie tej prostej, na której osie układu współrzędnych ograniczają odcinek o środku w punkcie A .
- Znajdź równanie takiej prostej przechodzącej przez punkt A , że odległość początku układu współrzędnych od tej prostej jest równa 1.

361. R Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (2, 4)$ i przecinającej proste $3x + y = 0$ oraz $x - y + 4 = 0$ w punktach odpowiednio M i N w taki sposób, że punkt P jest środkiem odcinka MN .

362. R Jedna z dwóch prostych równoległych przechodzi przez początek układu współrzędnych, a druga przez punkt $A = (1, 3)$. Znajdź równania tych prostych, wiedząc, że odległość między nimi jest równa $\sqrt{5}$.

OKRĄG, KOŁO

363. Punkty $A = (3, 2)$ i $B = (6, -5)$ są końcami średnicy koła k .

- Oblicz pole koła k .
- Znajdź równanie stycznej do koła k w punkcie A .

364. R Dany jest punkt $A = (0, 3)$ oraz okrąg o środku w punkcie $S = (1, \frac{3}{2})$ i średnicy o długości $\sqrt{13}$.

- Uzasadnij, że prosta o równaniu $7x - 4y - 1 = 0$ zawiera średnicę danego okręgu.
- Uzasadnij, że punkt A należy do danego okręgu.

365. Proste o równaniach $y = 2x + 5$ i $y = x + 3$ zawierają średnice okręgu o , do którego należy punkt $P = (3, 2)$. Znajdź równanie okręgu o .

366. Prosta o równaniu $x + 3y - 17 = 0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (-1, -4)$.

- Oblicz współrzędne punktu styczności danej prostej z tym okręgiem.
- Oblicz długość promienia tego okręgu.
- Uzasadnij, że prosta o równaniu $9x + 13y - 89 = 0$ jest styczna do tego okręgu.

367. R Okrąg o środku w punkcie $S = (1, 1)$ odcina na prostej o równaniu $x - y + 4 = 0$ cięciwę o długości $2\sqrt{2}$. Znajdź długość promienia tego okręgu.

368. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (3, 0)$ i $B = (0, 1)$ należy do prostej $y = x + 2$. Znajdź równanie tego okręgu.

369. Okrąg przechodzący przez punkt $A = (-1, 1)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = x - 2$ w punkcie $P = (4, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

370. Napisz równanie okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ stycznego do prostej o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ w punkcie $A = (3, 1)$.

371. Okrąg styczny do osi OX w punkcie $A = (-3, 0)$ odcina na dodatniej półosi OY cięciwę o długości 8.

- Znajdź współrzędne środka i promień okręgu.
- Wyznacz współrzędne punktów, w których okrąg przecina oś OY .

372. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 + 4x + c$. Dla jakich wartości parametru c wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie należącym do

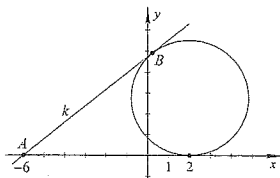
- okręgu o promieniu długości 5 i środku w punkcie $S = (4, -1)$.
- koła o promieniu długości 5 i środku w punkcie $S = (4, -1)$.

373. Dane są funkcje $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = -2x^2 - 2x + 1$. Znajdź te dodatnie wartości r , dla których wszystkie punkty wspólne wykresów funkcji f i g należą do koła $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq r^2$.

374. Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania $x^2 - 2\sqrt{2}x + p^2 + 1 = 0$. Dla jakich wartości parametru p punkt (x_1, x_2) należy do koła o środku $S = (0, 0)$ i promieniu długości $\sqrt{5}$?

375. Wykaż, że jeśli liczby a , b są różne, to równanie $x^2 + y^2 + ax + by + 0,5ab = 0$ jest równaniem okręgu. Podaj długość promienia tego okręgu.

376. Okrąg przedstawiony na rysunku jest styczny do osi OX w punkcie $(2, 0)$, a prosta k przechodzi przez punkt $A = (-6, 0)$ i jest styczna do okręgu w punkcie B .



a) W Jaka długość ma odcinek AB ?

b) Znajdź równanie stycznej k wiedząc dodatkowo, że punkt A znajduje się w odległości $6\sqrt{2}$ od środka okręgu.

377. Znajdź równania stycznych do okręgu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ poprowadzonych z punktu $A = (2, 0)$.
378. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x + 4y + 1 = 0$ i stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.
379. R Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + y^2 - 2mx - m^2 + 2m = 0$ opisuje okrąg styczny do prostej o równaniu $x = 4$?
380. Znajdź te wartości parametru m , dla których prosta $y = x + m$ ma dwa punkty wspólne z okręgiem $x^2 + y^2 = 2$.
381. Znajdź te wartości parametru m , dla których okręgi $x^2 + y^2 + 4x - 2my + m^2 = 0$ i $x^2 + y^2 = 2$ są styczne.
382. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $M = (0, 1)$ i stycznego do dwóch prostych o równaniach $x + y - 2 = 0$ i $x + y + 3 = 0$.
- 383.* R Znajdź współrzędne środków okręgów stycznych do prostych o równaniach $x + 2y + 9 = 0$ i $2x - y - 2 = 0$ i przechodzących przez początek układu współrzędnych.
384. W Dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (-4, 7)$ i promieniu długości $\sqrt{5}$. Prosta k przechodzi przez punkt $A = (0, 4)$ i przecina dany okrąg w punktach K i L . Oblicz iloczyn długości odcinków AK i AL .

TRÓJKĄT

385. Punkty $A = (1, 2)$, $B = (13, 4)$ i $C = (7, 10)$ są wierzchołkami trójkąta.
- Oblicz długość boku BC .
 - Znajdź równanie prostej zawierającej bok BC .
 - Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka A .
386. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-3, 0)$, $B = (1, 3)$ i $C = (-1, 4)$.
- Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C .
 - Oblicz pole trójkąta ABC .
387. Punkty $B = (10, 3)$ i $C = (7, 10)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt $S = (2, 5)$ jest środkiem boku AB .
- Znajdź równanie prostej zawierającej środkową trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C .
 - Znajdź równanie symetralnej boku AB .
388. Punkty $A = (5, -2)$ i $B = (17, 2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $y = 2x + 3$.
- Wyznacz współrzędne punktu C .
 - Oblicz pole trójkąta ABC .
389. W Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, \sqrt{3})$. Wyznacz kąty trójkąta ABC .
390. Dane są punkty $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$ i $C = (4, 4)$.
- Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny i prostokątny.
 - Znajdź długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .
 - Znajdź długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
391. Dwie wysokości trójkąta ABC , gdzie $A = (-2, -3)$, zawarte są w prostych o równaniach $x - 2 = 0$ i $2x + 3y - 1 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.
392. W Punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (4, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $D = (0, 1)$ punktem przecięcia jego wysokości. Znajdź współrzędne wierzchołka C .
393. Proste $y = x - 4$ i $y = 3x - 4$ zawierają dwa boki trójkąta prostokątnego. Znajdź współrzędne wierzchołka kąta prostego tego trójkąta wiedząc, że prosta zawierająca trzeci bok przechodzi przez punkt $K = (3, 1)$.
394. Proste o równaniach $3x - 2y + 2 = 0$ i $x - y + 2 = 0$ zawierają dwa boki pewnego trójkąta, a prosta o równaniu $2x - y - 1 = 0$ zawiera jedną z jego środkowych. Znajdź równanie prostej zawierającej trzeci bok trójkąta.
395. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek o końcach $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Jedno z ramion trójkąta zawiera się w prostej $2x - y - 3 = 0$. Oblicz
- współrzędne wierzchołka C ;
 - pole trójkąta ABC .
396. W Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC zawarta jest w prostej $x + y + 1 = 0$. Ramię BC zawiera się w prostej $2x - y - 1 = 0$. Wyznacz równanie prostej k zawierającej ramię AC wiedząc, że punkt $P = (-4, 0)$ należy do prostej k .
397. Punkt $S = (2, -1)$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wierzchołek A ma współrzędne $(-3, -1)$, a bok BC jest zawarty w prostej $x + 7y - 20 = 0$. Oblicz
- współrzędne wierzchołków B i C ;
 - pole trójkąta ABC .

398. R Dane są punkty $A = (1, -1)$ i $B = (3, 3)$ oraz prosta k o równaniu $y = x + 3$. Wyznacz na prostej k taki punkt C , aby pole trójkąta ABC było równe 6.
399. R Punkt $C = (1, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABC , zaś punkt $S = (3, -1)$ jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B .
400. W W równoramiennym trójkącie prostokątnym punkt $A = (3, 1)$ jest wierzchołkiem kąta ostrego. Przeciwiegle do niego przyprostokątna zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$. Napisz równania prostych zawierających pozostałe boki trójkąta.
401. W równoramiennym trójkącie prostokątnym punkt $C = (3, -1)$ jest wierzchołkiem kąta prostego. Przeciwprostokątna trójkąta zawiera się w prostej $3x - y + 2 = 0$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego trójkąta.
402. Dany jest trójkąt ABC , w którym $A = (-2, -1)$, $\overline{AB} = [8, 4]$, a punkt przecięcia środkowych ma współrzędne $(1, 4)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta.
403. R Bok AB trójkąta ABC zawiera się w prostej $y = 2x + 2$, a środkowa poprowadzona z wierzchołka C zawiera się w prostej $x - 3y + 21 = 0$. Wiedząc, że $\overline{BC} = [4, -2]$, oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC .
404. Wierzchołek C trójkąta ostrokatnego ABC ma współrzędne $(2, 7)$. Prosta o równaniu $2x + y - 1 = 0$ jest symetralną wysokości CD , a prosta o równaniu $x + 3y - 8 = 0$ zawiera środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A . Oblicz współrzędne punktów A , B i D .
405. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AB| = |AC|$) dane są wierzchołki $B = (1, -1)$ i $C = (4, 0)$. Jedno z ramion trójkąta zawiera się w prostej $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AB obrano taki punkt P , że $|AP| : |PB| = 3 : 2$. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie P , stycznego do boku AC .
406. R W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A = (2, -5)$ oraz równania prostych zawierających dwie jego środkowe: $4x + 5y = 0$ i $x - 3y = 0$. Wyznacz wierzchołki B i C .
- 407.* W Prosta $x - y - 5 = 0$ zawiera bok AB trójkąta ABC , prosta $2x + y - 13 = 0$ zawiera bok BC , natomiast prosta $3x - y - 7 = 0$ zawiera dwusieczną kąta BAC . Znajdź wierzchołki tego trójkąta.
408. Punkty K , M , N są środkami boków trójkąta ABC , a P jest dowolnym punktem wewnętrznym tego trójkąta. Udowodnij, że $\overline{PK} + \overline{PM} + \overline{PN} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

RÓWNOLEGBOKI

prostokąt

409. Punkty $A = (4, -3)$, $B = (10, 6)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, a prosta $3x - 2y + 8 = 0$ zawiera bok CD .
a) Wyznacz równanie prostej AD .
b) Oblicz współrzędne wierzchołka D .
c) Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
410. Punkty $A = (-4, -4)$ i $B = (8, 2)$ są sąsiednimi wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego środkiem symetrii jest punkt $S = (1, 1)$.
a) Znajdź równanie prostej zawierającej przekątną AC .
b) R Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .
411. Punkt $A = (-10, 8)$ jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$, a prosta $y = -x + 4$ zawiera jedną z jego przekątnych.
a) Znajdź współrzędne środka symetrii kwadratu $ABCD$.
b) Oblicz długość boku tego kwadratu.
412. Prosta o równaniu $y = -2x + 3$ zawiera jeden z boków kwadratu, a punkt $S = (3, 12)$ jest środkiem symetrii tego kwadratu.
a) Oblicz pole koła wpisanego w ten kwadrat.
b) Oblicz pole koła opisanego na tym kwadracie.
413. Prostokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$. Bok AB zawarty jest w prostej $2x + y - 3 = 0$. Znajdź
a) współrzędne wierzchołków prostokąta;
b) pole prostokąta.
414. R Punkt $A = (7, 3)$ jest wierzchołkiem, zaś punkt $S = (3, 2)$ środkiem symetrii kwadratu $ABCD$. Wyznacz pozostałe wierzchołki kwadratu $ABCD$ i napisz równanie okręgu wpisanego w ten kwadrat.
415. Punkt $A = (1, -1)$ jest wierzchołkiem kwadratu opisanego na okręgu $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$. Znajdź pozostałe wierzchołki tego kwadratu.
416. Punkty $A = (2, 3)$, $B = (4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
417. W prostej o równaniu $2x + y - 6 = 0$ zawiera się bok kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.
418. W Przekątna kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ zawiera się w prostej o równaniu $2x - y - 2 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

romb

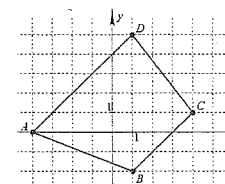
419. Punkty $A = (1, -11)$ i $B = (10, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Prosta k o równaniu $x + 7y - 24 = 0$ zawiera jedną z przekątnych tego rombu.
 a) Sprawdź, którą przekątną zawiera prosta k .
 b) Znajdź równanie prostej zawierającej drugą przekątną rombu.
 c) Oblicz pole rombu.
420. Punkty $A = (2, 1)$ i $C = (4, 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołek D należy do osi OY .
 a) Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D . b) Oblicz pole rombu.
421. R Punkty $A = (2, -6)$, $C = (4, 8)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości 10. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.
422. Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 30. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.
423. Punkt $A = (-2, -3)$ jest wierzchołkiem rombu, którego bok zawiera się w prostej o równaniu $x - 2y - 4 = 0$. Środkiem symetrii tego rombu jest punkt $S = (1, 1)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu i napisz równanie okręgu wpisanego w ten romb.
424. Punkty $A = (-1, -6)$ i $B = (3, -3)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $x + y = 5$. Znajdź współrzędne punktów C i D .
425. * R Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 8$ opisano romb o polu $33\frac{1}{3}$. Dłuższa przekątna rombu zawiera się w prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne wierzchołków kątów ostrych tego rombu.

inne równoległoboki

426. Punkt $C = (11, 20)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Prosta $y = x - 3$ zawiera bok AB , a prosta $y = -3x + 9$ zawiera bok AD tego równoległoboku.
 a) Wyznacz równanie prostej zawierającej bok BC i znajdź punkt przecięcia tej prostej z osią OY .
 b) Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku $ABCD$.
427. Punkty $A = (0, 0)$, $B = (6, 2)$ i $C = (8, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.
 a) Znajdź równanie prostej CD ;
 b) Znajdź współrzędne wierzchołka D .
 c) Oblicz pole równoległoboku.
428. Punkt $S = (0, 0)$ jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku oraz jego pole wiedząc, że $\overline{AB} = [4, 3]$ i $\overline{BC} = [6, 2]$.

TRAPEZÓW

429. Czworokąt $ABCD$ pokazany jest na rysunku.
 a) Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 b) Znajdź równania prostych zawierających przekątne tego czworokąta.
 c) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
430. Dane są punkty $A = (1, 1)$, $B = (9, 5)$, $C = (5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu D wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym, którego kąt przy wierzchołku A jest prosty, a kąt przy wierzchołku B jest ostry.
431. Punkty $A = (1, -2)$, $D = (-2, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD . Prosta $x + 2y - 7 = 0$ jest osią symetrii tego trapezu. Znajdź pozostałe wierzchołki trapezu.
432. Punkty $A = (0, -5)$, $B = (4, 3)$ i $C = (-1, 3)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawach AB i CD . Wyznacz współrzędne wierzchołka D i oblicz pole trapezu.
433. R Odcinek o końcach $A = (3, 3)$ i $B = (0, 0)$ jest podstawą trapezu $ABCD$. Druga podstawa trapezu jest cztery razy dłuższa i ma środek w punkcie $K = (3, -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D tego trapezu oraz oblicz jego pole.



RÓWNANIA. NIERÓWNOŚCI. UKŁADY RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI

nierówności i układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi

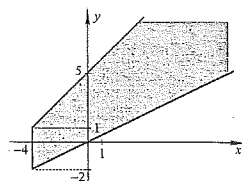
434. Punkty $A = (-100, -300)$ i $B = (7, 19)$ są końcami odcinka AB . Sprawdźmy, czy odcinek AB ma punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 3x - 1$.
 • Współrzędne punktu A spełniają nierówność $y > 3x - 1$, gdyż $-300 > 3 \cdot (-100) - 1$, natomiast współrzędne punktu B spełniają nierówność $y < 3x - 1$ ($19 < 3 \cdot 7 - 1$).
 • Zatem punkty A i B należą do różnych półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą $y = 3x - 1$, a to oznacza, że odcinek AB ma punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 3x - 1$.
 Sprawdź, czy odcinek, którego końcami są punkty $K = (80, 402)$ i $L = (-30, -148)$, ma punkt wspólny z prostą o równaniu $5x - y + 3 = 0$.
435. Dane są zbiory $A = \{(x, y): x - 2y \geq 0 \wedge x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R}\}$ i $B = \{(x, y): y \geq 0, 5x - 2 \wedge x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R}\}$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór
 a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A \setminus B$.
436. Zbiór A jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$
 a) Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór A .
 b) Oblicz długość odcinka, który jest częścią wspólną zbioru A i prostej o równaniu $4x + 3y - 20 = 0$.

437. Punkty $A=(-3, -2)$, $B=(5, -2)$, $C=(5, 3)$ i $D=(-3, 3)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.
 a) Narysuj w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$.
 b) Opisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich punktów należących do czworokąta $ABCD$.
 c) Rozstrzygnij, czy punkt przecięcia prostych o równaniach $18x + 18y - 13 = 0$ i $36x + 54y + 11 = 0$ należy do czworokąta $ABCD$.

438. Dany jest układ nierówności
$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \\ x+4y-18 \leq 0 \end{cases}$$

Figura F jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają dany układ nierówności. Naskicuj w układzie współrzędnych figurę F i oblicz jej pole.

439. Zbiór A (fragment zbioru A pokazano na rysunku) jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają pewien układ trzech nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
 a) Zapisz ten układ nierówności.
 b) Znajdź taką wartość współczynnika b , aby prosta o równaniu $y = -3x + b$ miała tylko jeden punkt wspólny ze zbiorem A .



440. Prosta $y = x - 2$ zawiera przyprostokątną AB trójkąta prostokątnego ABC , w prostej $y = -0,5x + 10$ zawiera się przeciwprostokątna tego trójkąta, a prosta zawierająca przyprostokątną AC przechodzi przez punkt $M = (4, -1)$.
 a) Znajdź współrzędne wierzchołków A i B .
 b) Opisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich punktów należących do trójkąta ABC .

441. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór $W = \{(x, y): |x| \leq 2 \wedge y \geq 0 \wedge 3x - 4y + 12 \geq 0\}$. Oblicz pole otrzymanego wielokąta.

442. W Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A = \{(x, y): |y - 2x + 3| \leq 1\}$, $B = \{(x, y): |y + 3x| > 2\}$ oraz zbiór $A \cap B$.

443. Rozwiąż graficznie układ nierówności
$$\begin{cases} y \geq |x - 2| \\ x^2 + y^2 \leq 2xy + 4 \end{cases}$$

444. Układ nierówności
$$\begin{cases} x+y > 0 \\ x-y < 0 \end{cases}$$
 można rozwiązać algebraicznie w następujący sposób:

- zauważmy, że dany układ nierówności równoważny jest układowi równań $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$, gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią, a b jest dowolną liczbą ujemną;
- rozwiązujemy powyższy układ równań i otrzymujemy: $x = \frac{a+b}{2}$ i $y = \frac{a-b}{2}$;
- rozwiązaniem danego układu nierówności jest każda para liczb $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$ i $b \in \mathbb{R}_-$.

W podobny sposób rozwiąż układy nierówności:

a) $\begin{cases} x+y < 1 \\ 2x+y > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y > 2 \\ x-2y > 1 \end{cases}$

różne równania, nierówności i układy nierówności z dwiema niewiadomymi

445. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} y = |x-1| \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$
 i podaj interpretację geometryczną tego układu.

446. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań
$$\begin{cases} |x| + |y| = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

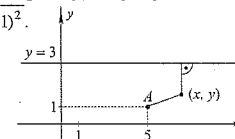
447. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów (x, y) , których współrzędne spełniają nierówność $y^2 + x^2 \leq 2|x|y$.

448. R Zbadaj, dla jakich wartości parametru a istnieje dokładnie jedna para liczb x, y spełniająca układ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

ZBIORY PUNKTÓW O DANEJ WŁASNOŚCI

449. Wyznaczmy zbiór punktów (x, y) , których odległość od punktu $A = (5, 1)$ i od prostej $y = 3$ jest jednakowa.

- Odległość punktu (x, y) od punktu $A = (5, 1)$ jest równa $\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$.
- Odległość punktu (x, y) od prostej $y = 3$ wynosi $\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}$.
- Stąd otrzymujemy równość $\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y-3)^2}$.
- Podnosząc do kwadratu obie strony tej równości, dostajemy równanie $(x-5)^2 + (y-1)^2 = (y-3)^2$, a po przekształceniach otrzymujemy równanie $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{4}$.
- Zatem szukanym zbiorem jest parabola o równaniu $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{4}$.



Postępując w pokazany sposób, znajdź zbiór tych punktów, których odległość od punktu $A = (-6, 2)$ i od prostej o równaniu $y = -4$ jest jednakowa.

450. Zbiór A jest zbiorem tych punktów płaszczyzny, których odległość od początku układu współrzędnych jest dwa razy większa niż odległość od prostej $x - y\sqrt{3} = 0$. Wyznacz zbiór A .

451. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą wszystkie punkty jednakowo odległe od okręgu $x^2 + y^2 - 2y = 0$ i od prostej $y + 1 = 0$.

452. W Znajdź zbiór środków wszystkich okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$ i stycznych do prostej o równaniu $y = 0$. Podaj ilustrację graficzną rozwiązania.

453. Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu $x^2 + (y-2)^2 = 1$ i stycznych do prostej $y = -2$.

- 454.* W Wyznacz figurę, która jest zbiorem środków cięciw paraboli o równaniu $y = x^2 - 1$ przechodzących przez początek układu współrzędnych.

PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

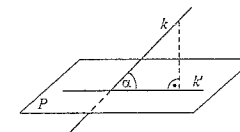
455. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ względem prostej o równaniu $x - y - 3 = 0$.
456. Oblicz pole części koła ograniczonej prostą o równaniu $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, obrazem tej prostej w symetrii względem osi OY i tą częścią okręgu $x^2 + y^2 = 12$, która leży ponad osią OX .
457. Oblicz pole figury $A \cap B$, gdzie $A = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R} \text{ i } x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \leq 0\}$, zaś B jest obrazem zbioru A w przesunięciu równoległym o wektor $[-2, 2]$.
458. Obrazem punktu $K = (2, 4)$ w jednokładności o środku O i skali $s = -5$ jest punkt $L = (9, 1)$. Wyznacz współrzędne punktu O .
459. Znajdź równanie okręgu, który jest obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ w jednokładności o środku $S = (0, 0)$ i skali $k = -2$.
460. Wyznacz te wartości parametru k , dla których przekształcenie określone wzorem $P((x, y)) = (ky, x + k)$ jest izometrią.

4. STEREOMETRIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

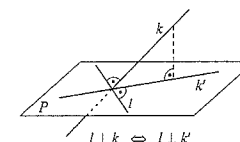
KĄT MIĘDZY PROSTĄ I PŁASZCZYZNĄ

- ⇒ Prosta l jest prostopadła do płaszczyzny P , jeśli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie P mającej punkt wspólny z prostą l .
- ⇒ Jeśli prosta l nie jest równoległa i nie jest prostopadła do płaszczyzny P , to kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny P nazywamy kąt między prostą l i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę P (rysunek obok).



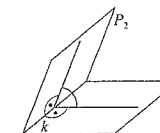
TWIERDZENIE O TRZECH PROSTYCH PROSTOPADŁYCH

- ⇒ Niech k będzie prostą, która nie jest równoległa i nie jest prostopadła do płaszczyzny P , a l prostą zawierającą się w płaszczyźnie P i przechodzącą przez punkt wspólny prostej k i płaszczyzny P . Prosta l jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy l jest prostopadła do rzutu prostokątnego k' prostej k na płaszczyznę P (rysunek obok).



KĄT DWUŚCIENNY

- ⇒ Niech α oznacza kąt dwuścienny wyznaczony przez różne półpłaszczyzny P_1 i P_2 mające wspólną krawędź k . Miarą kąta α nazywamy miarę wypukłego kąta płaskiego, którego wierzchołek należy do prostej k , a ramiona są prostopadłe do k i jedno z nich zawiera się w półpłaszczyźnie P_1 , a drugie w półpłaszczyźnie P_2 (rysunek obok).



GRANIASTOSŁUPY

- ⇒ Równoległościan – graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.
- ⇒ Graniastosłup prosty – graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.
- ⇒ Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.
- ⇒ Prostopadłościan – graniastosłup prosty, którego podstawa jest prostokątem.
- ⇒ Objętość graniastosłupa o polu podstawy P i wysokości h : $V = Ph$.
- ⇒ Pole powierzchni całkowitej: $P_c = P_b + 2P$ (P_b – pole powierzchni bocznej, P – pole podstawy graniastosłupa).

OSTROSŁUPY

- ⇒ Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równe, a podstawa jest wielokątem foremnym.
- ⇒ Czworoscian foremny – ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.
- ⇒ Spodek wysokości ostrosłupa – rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy.
- ⇒ Twierdzenia o ostrosłupach.
- 1) Jeśli wszystkie krawędzie boczne są równe (lub jeśli wszystkie krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy równe kąty), to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.
 - 2) Jeśli wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą równe kąty, to w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.
- ⇒ Objętość ostrosłupa o polu podstawy P i wysokości h : $V = \frac{1}{3}Ph$.
- ⇒ Pole powierzchni całkowitej: $P_c = P_b + P$, gdzie P_b jest polem powierzchni bocznej, a P polem podstawy ostrosłupa.

WALEC

Oznaczenia: r – promień podstawy walca, h – wysokość walca.

- ⇒ Objętość: $V = \pi r^2 h$. ⇒ Pole powierzchni bocznej: $P_b = 2\pi r h$. ⇒ Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2\pi r(r + h)$.

STOŻEK

Oznaczenia: r – promień podstawy stożka, h – wysokość stożka, l – tworząca stożka.

⇒ Objętość: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. ⇒ Pole powierzchni bocznej: $P_b = \pi r l$. ⇒ Pole powierzchni całkowitej: $P_c = \pi r (r + l)$.

KULA

Oznaczenia: R – promień kuli.

⇒ Objętość: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. ⇒ Pole powierzchni: $P = 4 \pi R^2$.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi • określać własności podstawowych figur przestrzennych: graniastosłupów i ostrosłupów (prostych, prawidłowych)

4.1 W Graniastosłup ma 66 krawędzi. Ile ścian bocznych ma ten graniastosłup?

4.2 R Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach 3 i 4, a wysokość graniastosłupa ma długość 12.

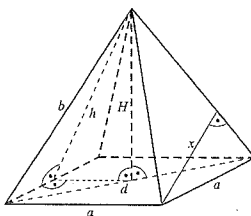
- Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.
- Oblicz sinusy kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z przekątnymi ścian bocznych mającymi z nią wspólny koniec.

4.3 R Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość a . Wyznacz długości przekątnych tego graniastosłupa.

4.4 W Ile wierzchołków ma ostrosłup, który ma 44 krawędzie?

4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, wprowadzono oznaczenia tj. na rysunku obok. Uzasadnij prawdziwość poniższych równości:

- $d = a\sqrt{2}$;
- $h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b^2$;
- $H^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = b^2$;
- $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$;
- $R \frac{h}{b} = \frac{x}{a}$.



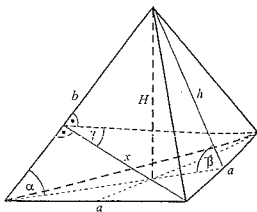
4.6 R Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość 6.

- Oblicz długość wysokości ostrosłupa.
- Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.
- Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od ściany bocznej.

Zdający potrafi • badać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni
• stosować pojęcia: kąta dwuściennego, kąta między prostą i płaszczyzną w rozwiązywaniu zadań
• stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

4.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, wprowadzono oznaczenia tj. na rysunku obok. Uzasadnij prawdziwość poniższych równości:

- $H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2$;
- $H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = h^2$;
- $R \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$;
- $R \cos \beta = \frac{a\sqrt{3}}{6h}$;
- $a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \gamma$.



4.8 R Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10, a krawędź boczna 13.

- Oblicz sinus kąta, jaki tworzy krawędź boczna z krawędzią podstawy.
- Oblicz kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz kosinus kąta, jaki tworzy ściana boczna z podstawą.
- Oblicz kosinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa.

4.9 R Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

4.10 R W trójkąt ABC , który jest podstawą ostrosłupa $ABCS$ wpisano okrąg. Punkt O jest środkiem tego okręgu, a punkt P jest punktem styczności okręgu z krawędzią AB . Wykaż, że jeśli odcinek OS jest wysokością ostrosłupa $ABCS$, to odcinek PS jest wysokością ściany ABS .

4.11 R Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ABC , a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem odcinka AD . Oblicz pole ściany ABS wiedząc, że krawędź podstawy oraz wysokość ostrosłupa mają tę samą długość a .

Zdający potrafi • stosować i przekształcać wzory związane z polem powierzchni i objętością wielościanów
• wyznaczać pola powierzchni i objętości wielościanów z zastosowaniem trygonometrii

4.12 Wyznacz podaną wielkość z danego wzoru a) h , $P = 2a^2 + 4ah$; b) a , $V = \frac{1}{3}a^2h$.

4.13 R Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość graniastosłupa.

4.14 R Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a i jest dwa razy krótsza niż krawędź boczna tego ostrosłupa.

- Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
- Wyznacz objętość ostrosłupa.

4.15 R Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6. Ściany boczne tego ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° .

- Oblicz objętość ostrosłupa.
- Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

4.16 R Podstawą ostrosłupa jest równoramienny trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości a . Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z podstawą kąt o mierze α . Oblicz objętość ostrosłupa.

Zdający potrafi • rysować siatki wielościanów

4.17 R Mrówka przeszła po powierzchni sześcianu z wierzchołka A do wierzchołka będącego drugim końcem przekątnej sześcianu wychodzącej z wierzchołka A , przy czym była to droga najkrótsza z możliwych. Narysuj siatkę sześcianu, a następnie oblicz odległość, jaką pokonała mrówka, jeżeli krawędź sześcianu ma długość $\sqrt{5}$ m.

4.18 Narysuj siatkę czworoscianu foremnego.

Zdający potrafi • wyznaczać przekroje płaskie wielościanów

- 4.19 Jaki wielokąt jest przekrojem ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną
- przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek;
 - przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym;
 - przechodzącą przez wierzchołek oraz środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy;
 - zawierającą krawędź boczną i środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy;
 - zawierającą krawędź podstawy i środek rozłącznej z nią krawędzi bocznej;
 - zawierającą środek wysokości oraz środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy?

Zdający potrafi • określać własności brył obrotowych (kuli, walca, stożka)

- 4.20 R W kulę wpisano walec o promieniu podstawy 2,5 cm i wysokości 12 cm. Oblicz promień kuli.
- 4.21 R Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o bokach 8 i 12. Oblicz długość promienia podstawy tego walca.
- 4.22 R Oblicz długość promienia podstawy stożka, jeżeli powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest
- półkołem o promieniu 4;
 - wycinkiem koła o promieniu 6 i kącie środkowym 60° .

Zdający potrafi • stosować i przekształcać wzory związane z polem powierzchni i objętością brył obrotowych
• wyznaczać pola powierzchni i objętości brył obrotowych z zastosowaniem trygonometrii

- 4.23 Wyznacz podaną wielkość z danego wzoru a) l , $P = \pi r(r + l)$; b) R , $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- 4.24 R Oblicz objętość kuli, której powierzchnia ma pole $36\pi \text{ cm}^2$.
- 4.25 R Promień podstawy walca ma długość 3. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt o mierze 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.
- 4.26 R Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość stożka o wysokości H i kącie rozwarcia 2α .
- 4.27 R Pole powierzchni bocznej stożka jest dwa razy większe niż pole jego podstawy. Znajdź miarę kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

ZADANIA MATURALNE

GRANIASTOSŁUPY

graniastosłupy prawidłowe

461. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a przekątna tego graniastosłupa ma długość 9.
- Oblicz objętość graniastosłupa.
 - Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna graniastosłupa z krawędzią podstawy mającą z nią punkt wspólny.
462. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.
463. Podstawą graniastosłupa prostego jest kwadrat. Przekątna graniastosłupa ma długość 2 dm i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Oblicz objętość graniastosłupa.
464. R W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 4 i tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt o mierze 60° . Oblicz objętość graniastosłupa.
465. R Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym długość krawędzi podstawy jest równa 20 cm oraz kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej ma miarę 45° .
466. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej równe jest sumie pól obu podstaw. Oblicz kosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.
467. R Ze środka ściany sześcianu o krawędzi a poprowadzono prostą prostopadłą do przekątnej sześcianu. Oblicz długości odcinków, na jakie ta prostopadła podzieliła przekątną sześcianu.
468. Podstawą prostopadłościanu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest kwadrat $ABCD$, a odcinki AA_1 , BB_1 , CC_1 i DD_1 są krawędziami bocznymi. Oblicz odległość wierzchołka B_1 od płaszczyzny ACD_1 wiedząc, że $|AB| = a$ i $|AA_1| = b$.
469. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Najdłuższa przekątna graniastosłupa jest cztery razy dłuższa od najkrótszej przekątnej podstawy. Oblicz objętość graniastosłupa.
- inne graniastosłupy
470. Dwie krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długość 3. Przekątna prostopadłościanu ma długość 12 i tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze 30° . Oblicz objętość prostopadłościanu.
471. R Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 2 i 4 oraz kącie ostrym o mierze 60° . Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze 30° . Oblicz pole powierzchni graniastosłupa.

472. W Siedem krawędzi graniastopu prostego ma długość 13, a pozostałe dwie krawędzie mają długość 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastopu.
473. R Podstawą graniastopu prostego jest równoległobok o obwodzie 18. Przekątne graniastopu mają długości 9 i $\sqrt{33}$, a krawędź boczna 4. Oblicz objętość tego graniastopu.
474. Podstawą graniastopu prostego jest równoległobok o kącie ostrym α . Przekątne graniastopu są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami β i γ ($\beta < \gamma$), a wysokość graniastopu ma długość H . Oblicz objętość tego graniastopu.
475. R Podstawą graniastopu prostego jest romb o kącie ostrym α . Krótsza przekątna graniastopu ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt β . Oblicz objętość tego graniastopu.
- 476.* R Oblicz objętość równoległościanu, którego wszystkie ściany są rombami o boku a i kącie ostrym α .

OSTROŚLUPY

ostroślupy prawidłowe czworokątne

477. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze 30° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
478. Każda ściana ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole 8. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
479. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o boku $3\sqrt{2}$. Objętość tego ostrosłupa wynosi 18.
a) Znajdź miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z płaszczyzną podstawy ostrosłupa.
b) Oblicz kosinus kąta, jaki tworzy ściana boczna z płaszczyzną podstawy ostrosłupa.
480. Miara kąta dwuściennego między ścianą boczną, a podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa α . Krawędź podstawy ma długość a . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
481. R W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są prostopadłe, a wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
482. R Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mając długość krawędzi podstawy 6 i miarę 120° kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.
483. R Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe S . Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 2α . Oblicz objętość ostrosłupa.
484. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α . Wyznacz kosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

485. W Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mając długość krawędzi podstawy a i miarę 2α kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.
486. R W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma długość H , a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę α . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.
487. R Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od jego krawędzi bocznej jest równa d , a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
488. R Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od ściany bocznej jest równa d , a kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz objętość ostrosłupa.
- 489.* W W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym odległości środka wysokości od krawędzi bocznej i ściany bocznej wynoszą odpowiednio a i b . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

ostroślupy prawidłowe trójkątne

490. Oblicz pole powierzchni i objętość czworoscianu foremego o krawędzi długości a .
491. R Oblicz odległość środków dwóch skośnych krawędzi czworoscianu foremnego o krawędzi długości 2.
492. R Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą długości krawędzi podstawy. Znajdź miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z płaszczyzną podstawy.
493. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z podstawą kąt o mierze 60° . Promień okręgu opisanego na podstawie ma długość 10. Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.
494. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 72. Krawędź boczna tworzy z podstawą kąt, którego kosinus równy jest $\frac{\sqrt{3}}{9}$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
495. R Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi $\frac{1}{4}\sqrt{15}a^2$. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
496. R Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe S , a miara kąta między wysokościami dwóch ścian bocznych poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa jest równa 2α . Oblicz objętość ostrosłupa.
497. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe S , a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

498. R W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α , zaś odległość wierzchołka podstawy od krawędzi bocznej, do której nie należy, jest równa a . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
499. R Odległość środka wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego od ściany bocznej jest równa d . Krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
500. R W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy jest równe $4\sqrt{3}$, a miara kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest cztery razy mniejsza od miary kąta płaskiego ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa.
501. W Środek jednej z wysokości czworościanu foremnego połączono odcinkami z dwoma wierzchołkami nie należącymi do tej wysokości. Wykaż, że odcinki te są prostopadłe.
502. W Udowodnij, że punkt przecięcia wysokości czworościanu foremnego dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 3.

inne ostrosłupy prawidłowe

503. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a i jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej.
a) Oblicz objętość ostrosłupa.
b) Oblicz tangens kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.
- 504.* R Promienie okręgów opisanych na ścianach bocznych i na podstawie ostrosłupa prawidłowego n -kątnego mają długość R . Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

inne ostrosłupy

505. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 5, a podstawa długość 8. Trójkąt ten jest podstawą ostrosłupa, a środek ciężkości trójkąta jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa wiedząc, że najkrótsza krawędź boczna ma długość 4.
506. R W ostrosłupie, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości a , jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Dwie pozostałe krawędzie tworzą z podstawą kąty o mierze α . Znajdź pole największej ściany bocznej oraz tangens kąta nachylenia tej ściany do płaszczyzny podstawy.
507. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 10$, $|AC| = |BC| = 13$. Krawędź AS ma długość 20 i jest wysokością ostrosłupa. Wyznacz tangens kąta, jaki tworzy ściana BCS z płaszczyzną podstawy.
508. R Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku a . Dwie sąsiednie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne tworzą z podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

509. Jedną z krawędzi bocznych ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt, ma długość b i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa krawędź boczna ostrosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze α , a z jedną z sąsiednich krawędzi bocznych kąt β . Wyznacz objętość ostrosłupa.
510. R Dwie krawędzie ostrosłupa trójkątnego zawierające się w prostych skośnych mają długość b , zaś pozostałe krawędzie mają długość a . Spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Wyznacz objętość ostrosłupa.
511. W Wykaż, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego tworzą z podstawą kąty o równych miarach, to spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.
512. W Wykaż, że jeśli na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg i środek tego okręgu jest jednocześnie spodkiem wysokości ostrosłupa, to ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.
513. R Jedną z krawędzi ostrosłupa trójkątnego ma długość 2, a pozostałe 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
514. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym boki równe mają długość b , a kąt między nimi zawarty jest równy α . Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli każda krawędź boczna tworzy z wysokością ostrosłupa kąt β .
515. W ostrosłupie trójkątnym wszystkie krawędzie boczne i dwie krawędzie podstawy mają długość b , a kąt między równymi bokami podstawy ma miarę α . Oblicz objętość tego ostrosłupa. Dla jakich α zadanie to ma rozwiązanie?
516. W Każdą z krawędzi bocznych ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α . Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej $2c$ i kącie ostrym γ . Oblicz objętość ostrosłupa.
517. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny o kącie ostrym α , w którym ramię i krótsza podstawa ma długość a . Każda krawędź boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
518. Siatkę ostrosłupa tworzą dwa trójkąty równoboczne o boku a i dwa trójkąty prostokątne. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa.
519. W Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości c i kącie ostrym α . Każda ściana boczna tworzy z podstawą kąt o mierze β . Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
520. W W czworościanie $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości. Niech K , L , M i N będą środkami krawędzi odpowiednio AC , BC , BD i AD . Udowodnij, że proste KM i LN są prostopadłe.
521. W Wykaż, że jeśli skośne krawędzie czworościanu są parami równe, to suma miar kątów między krawędziami wychodzącymi z jednego wierzchołka czworościanu jest równa 180° .

- 522.* W Udowodnij, że jeśli trzy ściany czworoscianu są wzajemnie prostopadłe, to kwadrat pola czwartej ściany jest równy sumie kwadratów pól tych trzech ścian.

PRZEKROJE WIELOŚCIANÓW

przekroje graniastosłupów

523. Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i przeciwległy wierzchołek górnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α , a pole otrzymanego przekroju jest równe S . Wyznacz objętość graniastosłupa.
524. Sześciąt podzielono płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy na dwie bryły z których jedna ma pięć, a druga sześć ścian. Pole powierzchni całkowitej tej bryły, która ma pięć ścian jest równe połowie pola powierzchni sześciąt. Oblicz tangens kąta nachylenia płaszczyzny dzielącej sześciąt do płaszczyzny podstawy.
525. Sześciąt o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt α . Oblicz pole otrzymanego przekroju dla a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$.
526. R Prostopadłościan o podstawie kwadratu przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy otrzymując w przekroju romb o kącie ostrym α . Wyznacz kosinus kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu.

przekroje ostrosłupów prawidłowych czworokątnych

527. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ma miarę α , a krawędź podstawy ma długość a . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i wierzchołek.
528. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe S , a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę α . Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną tego ostrosłupa i przechodzącą przez środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
529. W W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a i jest cztery razy krótsza od krawędzi bocznej. Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Oblicz pole otrzymanego przekroju oraz tangens kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.
530. R W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę przez przekątną podstawy i środek krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną. Płaszczyzna ta tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α , a pole otrzymanego przekroju jest równe P . Oblicz objętość ostrosłupa.
531. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Przez krawędź podstawy o długości a poprowadzono płaszczyznę tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt β ($0 < \beta < \alpha$). Oblicz pole otrzymanego przekroju.

532. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz tangens kąta, jaki tworzy z płaszczyzną podstawy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa oraz środki dwóch sąsiednich boków podstawy.

- 533.* R Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną wynosi P . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa.

przekroje ostrosłupów prawidłowych trójkątnych

534. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a i jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej. Ostrosłup przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i środek rozłącznej z nią krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.
535. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a . Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz pole otrzymanego przekroju.
536. R Ostrosłup prawidłowy trójkątny o podstawie ABC i wierzchołku S przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi AC , BC , AS i BS . Pole otrzymanego w ten sposób przekroju jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Oblicz kosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
537. R Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, której długość jest równa a . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i jest prostopadła do krawędzi bocznej.
538. Czworoscian foremny o krawędzi a rozcięto płaszczyzną prostopadłą do jednej z krawędzi, przechodzącą w odległości $0,25a$ od jednego końca tej krawędzi. Oblicz objętości otrzymanych brył.

WIELOŚCIANY – INNE ZADANIA

539. Twierdzenie (Eulera). Jeżeli wielościan wypukły ma w wierzchołków, k krawędzi oraz s ścian to między liczbami w , k , s zachodzi równość $w - k + s = 2$.
- a) Oblicz liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa mającego w podstawie pięćdziesięciokąt, a następnie sprawdź czy zachodzi podana w twierdzeniu równość.
- b) W pewnym wielościanie wypukłym liczba krawędzi jest dwa razy większa od liczby ścian i o 50% większa od liczby wierzchołków. Ile wierzchołków ma ten wielościan?
540. Definicja. *Klinem nazywamy wielościan, którego podstawą jest prostokąt, a ścianami bocznymi są dwa trapezy równoramienne i dwa trójkąty równoramienne.*
- Dany jest klin, którego podstawą jest prostokąt o bokach 10 cm i 6 cm, a jedną ze ścian bocznych jest trapez o bokach 10 cm, 5 cm, 4 cm i 5 cm.
- a) Narysuj siatkę danego klina.
- b) Oblicz pole powierzchni tego klina.
- c) Objętość klina wyraża się wzorem $V = \frac{1}{6}(2a + c)bh$, gdzie a , b – długości boków prostokąta, a , c – długości podstaw trapezu, h – odległość podstawy c trapezu od podstawy klina. Oblicz objętość danego klina.

BRYŁY OBROTOWE

walec, stożek, kula

541. Ołowiany walec o promieniu 12 cm i wysokości 5 cm przetopiono na kule o promieniu 3 cm. Ile kul otrzymano?
542. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.
543. R Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, którego przekątna o długości 8 tworzy z bokiem równym wysokości walca kąt o mierze 60° . Oblicz objętość walca.
544. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka o promieniu podstawy r wiedząc, że tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α .
545. Promień podstawy stożka o objętości 72π jest trzy razy krótszy niż tworząca.
a) Wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.
b) Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.
546. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu 18. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.
547. R Po rozwinięciu powierzchni bocznej stożka na płaszczyźnie otrzymano wycinek kołowy o kącie środkowym 90° i promieniu 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.
548. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest wypukłym wycinkiem kołowym o kącie środkowym α . Kąt ten oparty jest na cięciwie o długości a . Oblicz objętość tego stożka.
549. Kula o promieniu r i stożek mają równe objętości. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola powierzchni jego podstawy. Znajdź wysokość stożka.
550. R Stożek i walec mają równe tworzące, równe objętości i równe pola powierzchni bocznej. Oblicz kosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.
551. * R Pole przekroju osiowego stożka jest $\pi\sqrt{3}$ razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej. Wyznacz miarę kąta zawartego między tworzącą, a wysokością tego stożka.
552. * Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α . Płaszczyzna prostopadła do wysokości stożka dzieli ten stożek na dwie bryły o równych polach powierzchni całkowitych. Oblicz stosunek objętości tych brył.

obracanie wielokątów

553. Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 : 1. Prostokąt ten obracamy najpierw wokół dłuższego boku, a następnie wokół krótszego boku. Oblicz stosunek objętości i stosunek pól powierzchni całkowitych otrzymanych brył.
554. Prostokąt o bokach długości a i b ($a < b$) obraca się dookoła prostej leżącej w płaszczyźnie prostokąta, nie przecinającej prostokąta, równoległej do większego boku i odległej od niego o c . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość bryły powstałej przez obrót prostokąta.
555. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość a i jest cztery razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tego trójkąta wokół najkrótszego boku.
556. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 2 i tworzy z przeciwprostokątną kąt 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną.
557. R Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 8, a kąt między tymi bokami ma miarę 120° . Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół prostej zawierającej bok o długości 8.
558. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 7 i 3, a kąt ostry trapezu ma miarę 60° . Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trapezu wokół prostej zawierającej dłuższą podstawę.
559. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej. Bryła B_1 powstała z obrotu trapezu wokół krótszej podstawy, a bryła B_2 powstała z obrotu trapezu wokół dłuższej podstawy. Wyznacz stosunek objętości brył B_1 i B_2 .
560. W trójkącie ABC $|AB| = 8$, $|BC| = 10$, zaś $|\angle ABC| = 60^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta ABC dookoła prostej zawierającej bok AC .
561. W trójkącie ABC $|AC| = 7$, $|BC| = 8$, zaś $|\angle ABC| = 60^\circ$. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta ABC wokół prostej zawierającej bok AC .
562. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = c$, $|\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$, gdzie $\beta > 90^\circ$. Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C .
563. Trójkąt o boku a i kątach ostrych do niego przyległych o miarach β i γ obraca się dookoła prostej równoległej do tego boku, poprowadzonej przez wierzchołek przeciwnego kąta. Oblicz objętość powstałej bryły.
564. Boki trójkąta zawierają się w prostych: $x - y = 0$, $x + y - 4 = 0$, $x - 3y = 0$. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu tego trójkąta dookoła najdłuższego boku.
565. Oblicz pola powierzchni brył obrotowych otrzymanych przez obrót sześciokąta foremnego o boku a wokół
a) prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków sześciokąta;
b) prostej zawierającej dłuższą przekątną sześciokąta;
c) prostej zawierającej bok sześciokąta.

566. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa CD ma długość 1, kąt ABC ma miarę 60° , a przekątna AC jest prostopadła do boku BC . Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu trapezu wokół boku BC .

567. R Romb o boku a i kącie ostrym α obraca się dookoła prostej przechodzącej przez wierzchołek kąta ostrego i prostopadłej do jednego z boków. Oblicz objętość powstałej bryły.

BRYŁA WPISANA W BRYŁĘ

bryły obrotowe

568. W kulę o promieniu 9 wpisano stożek o kącie rozwarcia 90° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

569. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku 4. W stożek ten wpisano walec o wysokości 1. Oblicz objętość walca.

570. W stożek o promieniu podstawy 1 i tworzącej 3 wpisano kulę. Oblicz pole powierzchni kuli

571. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem α . Kula opisana na tym stożku ma promień R . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

572. W kulę wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie, przy czym jeden z nich ma pole powierzchni bocznej trzy razy większe niż drugi. Oblicz stosunek długości wysokości tych stożków.

573. W Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola powierzchni kuli opisanej na tym stożku wynosi 3 : 8. Znajdź kąt rozwarcia tego stożka.

574. R Wykaż, że stosunek objętości stożka do objętości kuli w niej wpisanej jest równy stosunkowi pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni kuli.

575.* R Pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli wpisanej w ten stożek. Oblicz kosinus kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy stożka.

576.* R Wysokość walca wpisanego w stożek jest równa promieniowi podstawy stożka. Stosunek objętości stożka do objętości walca jest równy 8 : 3. Oblicz tangens kąta zawartego między wysokością, a tworzącą stożka.

kula i ostrosłup prawidłowy

577. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa H , a krawędź boczna tworzy z krawędzią podstawy kąt α . Oblicz pole powierzchni kuli wpisanej w ten ostrosłup.

578. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w kulę o promieniu R tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

579. Znajdź stosunek objętości kuli opisanej na czworościanie foremnym do objętości tego czworościanu.

580. W ostrosłup prawidłowy trójkątny wpisano kulę o promieniu r . Ściana boczna ostrosłupa nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 2α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

581. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a wpisany jest w sferę, której środek dzieli wysokość ostrosłupa w stosunku $\sqrt{5} : 1$. Oblicz objętość ostrosłupa.

bryła wpisana w bryłę – inne zadania

582. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α . Każda krawędź boczna tworzy z podstawą kąt β . Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości opisanej na nim kuli.

583. W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano graniastosłup prawidłowy trójkątny w taki sposób, że dolna podstawa graniastosłupa zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki górnej podstawy leżą na powierzchni bocznej stożka. Oblicz objętość graniastosłupa wiedząc, że wszystkie jego krawędzie są równej długości.

584. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego nachylona jest do podstawy pod kątem α . W ostrosłup ten wpisano sześciian o krawędzi a tak, że cztery jego wierzchołki należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, zaś cztery pozostałe należą do podstawy ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.

585. Tworząca stożka ma długość l i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . W stożek ten wpisano sześciian tak, że cztery jego wierzchołki należą do powierzchni bocznej stożka, zaś cztery pozostałe należą do podstawy stożka. Znajdź długość krawędzi sześcianu.

586. Na czworościanie foremnym opisano walec w taki sposób, że skośne krawędzie czworościanu są średnicami podstaw walca. Znajdź stosunek objętości kuli opisanej na walcu do objętości kuli wpisanej w czworościan.

ZADANIA Z KONTEKSTEM REALISTYCZNYM

587. Do częściowo wypełnionego wodą zbiornika w kształcie walca o średnicy 1 m wpuszczono kroplę oliwy, która równomiernie rozlała się na powierzchni wody. Zakładając, że wpuszczona kropla miała kształt kuli o średnicy 0,3 cm, oblicz grubość utworzonej warstwy oliwy.

588. Do prostopadłościennego szklanego akwarium o wymiarach podstawy 50 cm i 90 cm wiano 216 litrów wody, wypełniając w ten sposób 80% jego objętości. Oblicz łączną powierzchnię ścian bocznych tego akwarium. Grubość szkła należy pominąć.

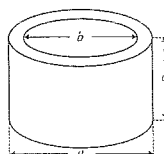
589. Osiemdziesięciolitrowe szklane akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wysokość 32 cm i do połowy napełnione jest wodą. Oblicz, o ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium, jeżeli wlejemy do niego 4,5 liry wody. Grubość szkła należy pominąć.

590. Prostopadłościenne, szczelnie zamknięte naczynie, o wymiarach podstawy $12 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ i wysokości 8 cm, w 75% swej objętości wypełnione jest wodą. Na jakiej wysokości będzie poziom wody w tym naczyniu, jeżeli postawimy je na ścianie o wymiarach $8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Grubość ścianek naczynia należy pominąć.

591. W tabeli podany został procentowy skład powietrza atmosferycznego.

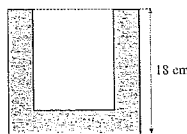
- a) Oblicz, ile litrów tlenu znajduje się w pustym pokoju o wymiarach podłogi $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ i wysokości $3,5\text{ m}$.
b) Oblicz, ile kilogramów powietrza znajduje się w tym pokoju. Gęstość powietrza wynosi $1,29\text{ g/dm}^3$.

Składnik	Zawartość w % objętości
Azot	78,08
Tlen	20,95
Inne składniki	0,97



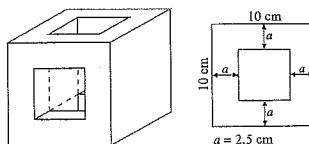
592. Rysunek obok przedstawia betonowy krąg w kształcie walca. Zaznaczone na rysunku wymiary kręgu są równe: $a = 1\text{ m}$, $b = 0,8\text{ m}$, $c = 0,5\text{ m}$. Przyjmij, że gęstość betonu wynosi 2300 kg/m^3 i oblicz masę tego kręgu.

593. Naczynie w kształcie walca o pojemności $240\pi\text{ cm}^3$, używane do przeprowadzania doświadczeń z ciekłym azotem, odlane jest w całości z metalu. Wysokość naczynia wynosi 18 cm , a grubość wszystkich jego ścianek jest równa 3 cm . Przekrój osiowy naczynia pokazany jest na rysunku. Oblicz, ile cm^3 metalu zużyto na wykonanie tego naczynia.

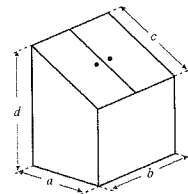


594. W drewnianym, sześciennym klocku wycięte zostały dwa identyczne, prostopadłościenne i przelotowe otwory. Na rysunku pokazano otrzymaną bryłę oraz widok ściany sześciennu z wyciętym otworem.

- a) Oblicz objętość powstałej bryły.
b) Oblicz masę bryły wiedząc, że przed wycięciem otworów klocek ważył 50 kg .

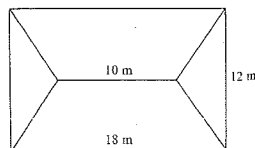


595. Ściany boczne drewnianej skrzyni są prostopadłe do prostokątnej podstawy. Zaznaczone na rysunku wymiary skrzyni są następujące: $a = 40\text{ cm}$, $b = 90\text{ cm}$, $c = 50\text{ cm}$, $d = 100\text{ cm}$. Oblicz objętość skrzyni. Wynik podaj w metrach sześciennych. Grubości wszystkich elementów, z których wykonana jest skrzynia, należy pominąć.



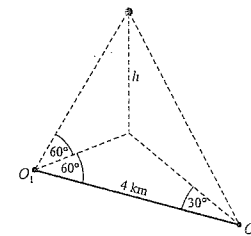
596. Na rysunku przedstawiony jest widok z góry czterospadawego dachu pewnego budynku. Wysokość poddasza w najwyższym punkcie wynosi 8 m .

- a) Oblicz powierzchnię dachu.
b) Oblicz, ile paczek dachówki należy kupić na pokrycie tego dachu, jeżeli jedna paczka zawiera 20 m^2 dachówki, a na 1 m^2 powierzchni dachu zużywa się $1,8\text{ m}^2$ dachówki.



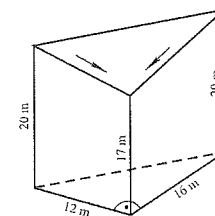
597. W celu wyznaczenia położenia balonu meteorologicznego, z dwóch punktów obserwacyjnych O_1 i O_2 oddalonych o 4 km , dokonano pomiaru trzech kątów. Wyniki pomiarów przedstawione zostały na rysunku.

- a) Oblicz wysokość h , na jakiej znajdował się balon.
b) Znajdź miarę kąta, pod jakim obserwowano balon z punktu obserwacyjnego O_2 .
c) Oblicz, ile wynosiła odległość od balonu do punktu obserwacyjnego O_2 .



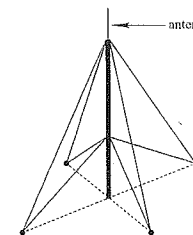
598. Budynek biurowy wybudowany na planie trójkąta prostokątnego posiada ukośnie usytuowaną, w stosunku do powierzchni ziemi, płaszczyznę dachu. Wymiary budynku podane zostały na rysunku.

- a) Oblicz objętość budynku. Grubości ścian i innych elementów wewnętrznych należy pominąć.
b) Oblicz łączną powierzchnię ścian zewnętrznych budynku.



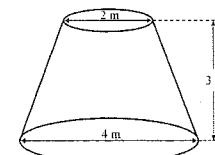
599. Do usztywnienia masztu antenowego użyto 8 odcinków będących stalowymi liniami o łącznej długości wynoszącej $2,8\text{ km}$. Końce lin zakotwiczone zostały w podłożu w czterech punktach stanowiących wierzchołki kwadratu, w środku którego znajduje się podstawa masztu (rysunek obok). Krótsze liny tworzą z podłożem kąt 30° , a dłuższe kąt 60° .

- a) Oblicz długości poszczególnych lin.
b) Oblicz wysokość masztu (bez anteny).



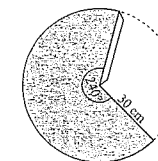
600. Cokół pomnika jest wykonany z granitu i ma kształt stożka ściętego. Na rysunku obok podano wymiary tego cokołu.

- a) Oblicz objętość cokołu.
b) Sprawdź, czy będzie można unieść ten cokół za pomocą żurawia o maksymalnym udźwigu 60 ton . Gęstość granitu jest równa 2700 kg/m^3 .

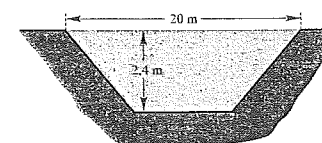


601. Po wycięciu i sklejeniu wycinka kołowego wykonanego z kartonu (rysunek obok) otrzymano powierzchnię boczną stożka. Oblicz

- a) pole powierzchni bocznej stożka,
b) wysokość stożka.

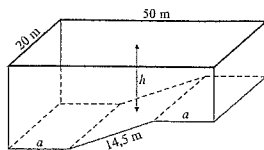


602. W celu oszacowania ilości przepływającej wody w rzece, zbadano kształt jej koryta. Przyjęto, że przekrój koryta rzeki ma kształt trapezu równoramiennego i wykonano pomiary, których wyniki pokazane są na rysunku. Zmierzone również, że prędkość przepływającej wody wynosi 20 m/s . Oblicz, ile metrów sześciennych wody przepływa przez powierzchnię przekroju koryta rzeki w ciągu jednej minuty.

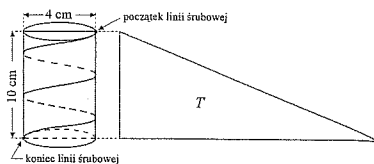


603. Na rysunku przedstawiony jest projekt basenu pływackiego. Głębokość basenu w naj płytszym miejscu ma wynosić 1,5 m, a w najgłębszym 3,2 m. Inne wymiary pokazane zostały na rysunku (na rysunku nie zachowano proporcji).

- a) Oblicz głębokość h na samym środku basenu.
b) Oblicz objętość basenu.

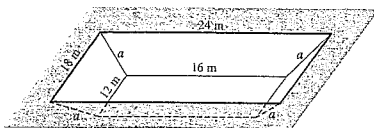


604. Jeżeli z kartki papieru wytniemy trójkąt prostokątny i nawiniemy go na walec, to przeciwprostokątna trójkąta utworzy na powierzchni walca tzw. linię śrubową. Na rysunku zaznaczono linię śrubową, jaka powstałaby po nawinięciu trójkąta T na walec o wysokości 10 cm i promieniu podstawy 2 cm. Oblicz długość linii śrubowej pokazanej na rysunku. Podaj wynik dokładny oraz wynik przybliżony po zaokrągleniu do jedności (przyjmij, że $\pi \approx 3,14$).



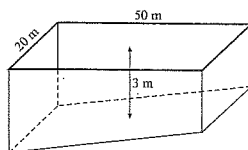
605. Należy wykonać wykop pod budowę zbiornika przeciwpożarowego. Dolna i górna część wykopu mają mieć kształt prostokąta, a jego głębokość wynosić będzie 6 m. Projekt wykopu i pozostałe jego wymiary przedstawione są na rysunku obok.

- a) Oblicz objętość wykopu.
b) Oblicz koszt wykonania wykopu, jeżeli wydobycie 1 m^3 ziemi kosztuje 20 zł, a za wywiezienie 10 t ziemi trzeba zapłacić 45 zł. Przyjmij, że gęstość ziemi jest równa $2,0 \text{ t/m}^3$.



606. Długość basenu pływackiego jest równa 50 m, a jego szerokość wynosi 20 m (na rysunku nie zachowano proporcji). Głębokość basenu na jego środku jest równa 3 m.

- a) Oblicz objętość basenu.
b) Oblicz łączną powierzchnię wszystkich ścian bocznych basenu.



607. Można przyjąć, że piramida Cheopsa jest ostrosłupem prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy długości 233 m. Długość cienia piramidy w momencie, gdy promienie słoneczne padają prostopadle do jednej ze ścian, wynosi 67,5 m. Wyznacz wysokość piramidy Cheopsa. Wynik zaokrąglij do dziesiątych części metra.

608. W celu oszacowania masy 400 metrowej wieży telewizyjnej, zbudowanej ze stalowych kratownic, dokonano następującego pomiaru: wierny model wieży o wysokości 80 cm zanurzono całkowicie w wodzie, w prostopadłościennym naczyniu o wymiarach podstawy $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Na narysowanej skali odczytano, że poziom wody w naczyniu podniósł się o 2 mm.

- a) Oblicz, ile m^3 stali zużyto do budowy wieży.
b) Wyznacz masę wieży wiedząc, że gęstość stali wynosi 7800 kg/m^3 . Wynik podaj w tonach.

5. ZADANIA OPTIMALIZACYJNE

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

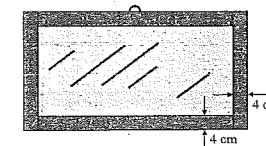
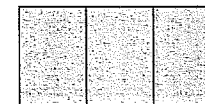
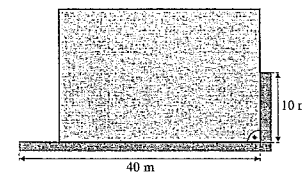
Zdający potrafi • wykorzystywać własności funkcji kwadratowej i jej wykresu do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

- 5.1 R Znajdź takie dwie liczby, których różnica jest równa 10, a ich iloczyn jest najmniejszy z możliwych.
- 5.2 R Jakie największe pole może mieć trójkąt, w którym suma długości jednego z boków i wysokości poprowadzonej z wierzchołka nienależącego do tego boku wynosi 12 cm?
- 5.3 R Na dwusiecznej kąta prostego trójkąta prostokątnego o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 3)$ znajdź taki punkt P , aby suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków trójkąta była najmniejsza.
- 5.4 R Nauczyciel matematyki polecił uczniom wykonać następujące zadanie praktyczne: „z kawałka drutu o długości 80 cm wykonać szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i o największym polu powierzchni bocznej”. Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.

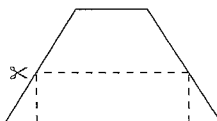
ZADANIA MATURALNE

PLANIMETRIA

609. R Ratownicy mający do dyspozycji linię długości 80 metrów mają wytyczyć przy brzegu plaży kąpielisko w kształcie prostokąta (wzdłuż brzegu nie będzie liny). Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko, jeżeli czasowicze chcą, aby miało ono jak największą powierzchnię? Należy przyjąć, że brzeg plaży tworzy linię prostą.
610. Deweloper przed rozpoczęciem inwestycji zamierza ogrodzić fragment działki, na którym będą składowane materiały budowlane. Skład materiałów ma mieć kształt prostokąta, a część ogrodzenia stanowić będzie istniejący mur (tak jak na rysunku). Na ogrodzenie składu zakupiono 50 metrów drucianej siatki. Jaką maksymalną powierzchnię może mieć skład materiałów budowlanych?
611. W punkcie skupu trzody chlewnej należy zbudować ogrodzenie ograniczające trzy jednakowe prostokątne boksy (patrz rysunek). Właściciel skupu zakupił materiały pozwalające zbudować ogrodzenie o łącznej długości 48 m i chce, aby powierzchnia boksów była możliwie największa. Jakie powinny być wymiary każdego boksu?
612. Drewnianą listwę o długości 1 m i szerokości 4 cm należy pociąć na takie cztery części, aby po ich sklejeniu (w sposób pokazany na rysunku) otrzymać ramę, w którą można oprawić obraz. Oblicz maksymalne pole powierzchni obrazu, który może być oprawiony w tak zbudowaną ramę.

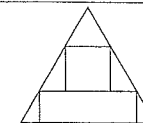


613. R Druk o długości 28 cm należy podzielić na dwie części i z jednej zrobić kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, której jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Jak należy podzielić druk, jeżeli chcemy, aby suma pól otrzymanego kwadratu i prostokąta była najmniejsza?
614. Druk o długości 72 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5 : 8, a w drugim 13 : 10. Jaki obwód mają te trójkąty, jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?
615. Na bokach prostokąta o obwodzie 16 cm opisano, jako na średnicach, półokręgi leżące na zewnątrz prostokąta. Zbadaj, dla jakich długości boków prostokąta, pole figury ograniczonej krzywą złożoną z tych czterech półokręgów jest najmniejsze. Oblicz to pole.
616. W Suma długości dwóch boków trójkąta jest równa 12 cm, a kąt między tymi bokami ma miarę 30° . Oblicz, jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby jego pole było największe.
617. Obwód trójkąta równobocznego ABC jest równy 12 cm. Punkty M, N, P należą odpowiednio do boków AB, BC i AC tego trójkąta, przy czym $|AM| = |BN| = |CP| = x$. Zbadaj, dla jakiej wartości x pole trójkąta MNP będzie najmniejsze. Znajdź wartość tego pola.
618. R Zbiór T jest zbiorem wszystkich trapezów o obwodzie 60 cm i kącie ostrym, którego sinus jest równy 0,75. Znajdź długość ramienia tego trapezu należącego do zbioru T , który ma największe pole.
619. R W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 i 8 wpisujemy prostokąt w taki sposób, że dwa jego boki zawarte są w przyprostokątnych, a jeden z wierzchołków leży na przeciwprostokątnej. Zbadaj, jakie powinny być wymiary prostokąta, aby jego pole było możliwie największe.
620. Z kawałka blachy w kształcie trapezu równoramiennego o polu $1,2 \text{ m}^2$ i podstawach długości 60 cm i 140 cm należy wyciąć (w sposób pokazany na rysunku) prostokątny fragment o maksymalnym polu. Jakie wymiary będzie miał wycięty prostokąt?

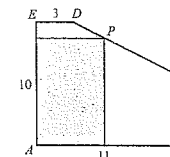


621. R W trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° i przeciwprostokątnej długości 40 cm wpisujemy prostokąt w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj, który z tych prostokątów ma największe pole.
622. W Boki trójkąta prostokątnego ABC mają długości: $|AC| = 3$, $|BC| = 4$, $|AB| = 5$. Prosta l , równoległa do prostej AB , przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach M i N . Niech S oznacza środek odcinka AB oraz $|MC| = x$.
- Pole $P(x)$ trójkąta MNS jest funkcją zmiennej x . Znajdź wzór tej funkcji.
 - Zbadaj, jaką największą wartość może przyjmować pole trójkąta MNS .
623. Suma długości wysokości trapezu równoramiennego i obu jego podstaw jest równa s . Wyznacz tangens kąta, jaki tworzy z podstawami przekątna tego trapezu, wiedząc, że jego pole jest największe z możliwych.

624. W trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 2, wpisujemy prostokąt i kwadrat w sposób pokazany na rysunku. Jaka powinna być długość boku kwadratu, jeżeli suma pól obu czworokątów ma być największa?



625. * W Spośród wszystkich czworokątów wypukłych, których suma długości przekątnych równa jest d , wyznacz te, które mają największe pole.
626. * W Z kawałka blachy należy wyciąć prostokąt o największym polu, w taki sposób, jak zostało to pokazane na rysunku (wierzchołek P prostokąta ma należeć do krawędzi CD). Wymiary blachy podane są w dm. Znajdź wymiary tego prostokąta.



GEOMETRIA ANALITYCZNA

627. Dane są punkty $A = (1, 2)$ i $B = (7, 6)$. Na osi OX znajdź taki punkt C , aby suma kwadratów długości odcinków AC i BC była najmniejsza.
628. Na prostej o równaniu $x + 5y - 20 = 0$ znajdź taki punkt P o dodatnich współrzędnych, że iloczyn odległości punktu P od osi układu współrzędnych jest największy z możliwych.
629. Na paraboli o równaniu $y = x^2 - 5x + 8$ znajdź taki punkt P o dodatnich współrzędnych, aby suma odległości punktu P od osi układu współrzędnych była najmniejsza.
630. Prosta k o równaniu $y = 0,5x + 4$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B . W trójkąt AOB , gdzie O jest początkiem układu współrzędnych wpisano prostokąt $MNOP$, którego dwa boki zawarte są w przyprostokątnych trójkąta AOB , a wierzchołek M należy do prostej k . Wyznacz współrzędne punktu M tak, aby pole prostokąta było największe. Oblicz to pole.
631. R Dany jest punkt $B = (6, 0)$ i prosta o równaniu $y = 2x - 4$ przecinająca oś OX w punkcie M . T jest trójkątem o największym polu wśród trójkątów równoramiennych takich, że jednym końcem podstawy jest punkt B , drugi jej koniec należy do odcinka BM , a trzeci wierzchołek trójkąta należy do danej prostej. Oblicz pole trójkąta T .
632. Dany jest punkt $B = (-2, 0)$ i prosta o równaniu $4x - 3y + 32 = 0$ przecinająca oś OX w punkcie M . T jest trójkątem o największym polu wśród trójkątów prostokątnych takich, że wierzchołek kąta prostego należy do odcinka BM , punkt B jest wierzchołkiem kąta ostrego, a trzeci wierzchołek należy do danej prostej. Oblicz obwód trójkąta T .
633. R Wyznacz największą wartość obwodu prostokąta, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli o równaniu $y = 3 - x^2$, a dwa pozostałe na odcinku, którego końcami są punkty przecięcia danej paraboli i prostej o równaniu $y = 0$.
634. Rozważamy prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku łączącym punkty wspólne osi OX i paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 5$, a dwa należą do tej paraboli. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, który ma największy obwód.

635. R Na paraboli $y = 1 - x^2$ znajdź punkt leżący najbliżej prostej $x + y - 2 = 0$.

636. Dane są punkty $A = (-2, 0)$ i $B = (0, -4)$. Na paraboli $y = x^2 + 1$ znajdź taki punkt C , aby pole trójkąta ABC
a) było równe 20;
b) było najmniejsze.

637. Dane są punkty $A = (4, 1)$, $B = (1, 5)$, $C = (0, t + 1)$, $D = (t, 0)$, gdzie $t \in (0; 4)$.
a) Dla $t = 1$ narysuj czworokąt $ABCD$.
b) Znajdź wzór funkcji P przyporządkowującej liczbie $t \in (0; 4)$ pole czworokąta $ABCD$.
c) Wśród czworokątów $ABCD$ znajdź czworokąt o najmniejszym oraz czworokąt o największym polu. Podaj pola oraz współrzędne wierzchołków C i D znalezionych czworokątów.

STEREOMETRIA

graniastosłupy

638. Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 50 cm na 70 cm wycinamy w narożach cztery jednakowe kwadraty. Z pozostałej części kartonu sklejamy otwarte prostopadłościenne pudełko. Wyznacz wymiary pudełka tak, aby pole jego powierzchni bocznej było największe.

639. Wśród prostopadłościanów, w których stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 2 : 3, a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 152 cm, znajdź ten o największym polu powierzchni całkowitej. Oblicz objętość znalezionej prostopadłościanu.

640. Wśród graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych charakteryzujących się tym, że obwód ich przekroju płaszczyzną zawierającą dwie krawędzie boczne i krótszą przekątną wynosi d , jest graniastosłup o największym polu powierzchni bocznej. Znajdź objętość tego graniastosłupa.

ostrosłupy

641. Rozważmy te ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma długości wysokości i krawędzi podstawy jest równa 8 cm. Spośród tych ostrosłupów wybrano taki, że pole trójkąta, którego bokami są dwie krawędzie boczne i przekątna podstawy ostrosłupa, jest największe.

- a) Znajdź długość krawędzi podstawy i wysokość tego ostrosłupa.
b) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

642. Wśród ostrosłupów prawidłowych trójkątnych takich, że suma długości wysokości ściany bocznej i wysokości ostrosłupa jest równa 14 cm, jest ostrosłup o największej objętości.

- a) Oblicz sinus kąta jaki ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy.
b) Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

643. Rozważamy ostrosłupy, które w podstawie mają sześciokąt foremny, jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, a suma długości najkrótszej i najdłuższej krawędzi bocznej jest równa 24 cm. Znajdź długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, który ma największą objętość.

bryły obrotowe

644. Rozważamy te walce, które powstają z obrotu prostokąta o obwodzie 60 cm wokół jednego z boków. Wyznacz długości boków prostokąta wiedząc, że pole powierzchni bocznej otrzymanej bryły jest największe.

645. Oblicz objętość tego walca o obwodzie przekroju osiowego równym 40 cm, którego pole powierzchni bocznej jest największe.

646. R Wśród stożków o sumie długości wysokości i tworzącej równej 6 dm znajdź ten, który ma największą objętość.

647. Jaką największą objętość może mieć bryła powstała z obrotu trójkąta równoramiennego o obwodzie 36 cm wokół prostej zawierającej podstawę trójkąta?

bryła wpisana w bryłę

648. Dany jest stożek o kącie rozwarcia 120° i tworzącej długości 4. Oblicz objętość tego walca wpisanego w dany stożek, którego pole powierzchni bocznej jest największe.

649. R W ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość a , wpisano walec o największym polu powierzchni bocznej. Wyznacz długość promienia podstawy tego walca.

650. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości a . Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa również ma długość a i jest prostopadła do podstawy. W ostrosłup ten wpisujemy graniastosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że dolna podstawa graniastosłupa zawiera się w podstawie ostrosłupa, a wierzchołki drugiej podstawy należą do krawędzi bocznych ostrosłupa. Znajdź długość krawędzi podstawy graniastosłupa o największym polu powierzchni bocznej.

651. W ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy ma długość 10, a wysokość ma długość $6\sqrt{3}$, wpisujemy prostopadłościan w ten sposób, że jedna podstawa prostopadłościanu zawiera się w podstawie ostrosłupa, a wierzchołki drugiej podstawy należą do krawędzi bocznych ostrosłupa. Oblicz objętość prostopadłościanu o największym polu powierzchni bocznej.

652. Dany jest stożek o promieniu podstawy 26 cm. Rozpatrzmy zbiór wszystkich prostopadłościanów wpisanych w ten stożek, w których stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 5 : 12. Jedna podstawa każdego prostopadłościanu zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki drugiej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka. Znajdź wymiary podstawy tego prostopadłościanu, który ma największe pole powierzchni bocznej.

653. W Dany jest stożek o promieniu podstawy 15, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym. W stożek ten wpisano graniastosłup prosty mający w podstawie trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości przyprostokątnych jest równy 3 : 4. Jedna podstawa graniastosłupa zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki drugiej podstawy należą do pobocznic stożka. Zbadaj, jakie powinny być długości krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa, aby pole jego powierzchni było największe.

INNE ZADANIA

654. Dane są funkcje $f(x) = 5x^2 + 5x + 7$ i $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Bierzemy dowolny argument a i od wartości funkcji f dla tego argumentu odejmujemy wartość funkcji g dla argumentu a . Jaką najmniejszą różnicę możemy otrzymać?
655. Liczbę 56 przedstaw w postaci sumy trzech takich liczb dodatnich, aby stosunek dwóch spośród nich był równy $1:2$, a suma kwadratów wszystkich trzech była najmniejsza.
656. Wśród ciągów arytmetycznych o różnicy 2 ciąg (a_n) wyróżnia się tym, że suma kwadratów jego czterech początkowych wyrazów jest najmniejsza. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów tego ciągu.
657. Wśród ciągów geometrycznych o pierwszym wyrazie równym 3, znajdź i podaj wzór na wyraz ogólny tego ciągu, którego suma trzech początkowych wyrazów jest najmniejsza.
658. Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą kolejnymi wynikami pewnego doświadczenia (lub pomiaru) powtórnego n razy. Za ostateczny wynik tego doświadczenia przyjmuje się jedną liczbę x taką, że suma kwadratów różnic $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n$ osiąga najmniejszą wartość. Wykonano pięć pomiarów średnicy sworznia będącego elementem pewnego urządzenia. Otrzymano następujące wyniki: $x_1 = 2,5$ mm, $x_2 = 2$ mm, $x_3 = 2,25$ mm, $x_4 = 2,25$ mm, $x_5 = 2,5$ mm. Opisaną wyżej metodą oblicz, jaki jest ostateczny wynik przeprowadzonego pomiaru średnicy sworznia.
659. Rolnik hoduje 400 krów mlecznych. Ze sprzedaży mleka osiąga dzienny dochód wynoszący 1200 zł. Oszacowano, że gdy zwiększy się liczbę hodowanych krów, to dochód, jaki przynosi dziennie jedna krowa, spadnie o 1‰ wraz z każdą dodatkowo zakupioną krową. Oblicz, ile krów należy hodować w tym gospodarstwie, aby osiągać możliwie największy dochód. Ile wynosi ten dochód?
660. W zbiorniku o objętości 480 litrów znajdowało się 230 litrów wody. Po odkręceniu zaworów, w ciągu pierwszej minuty do zbiornika napłynęło 20 litrów wody, a w każdej następnej minucie o 2 litry wody więcej niż w poprzedniej. Jednocześnie przez zawór odpływowy w ciągu każdej minuty wydostawało się ze zbiornika 39 litrów wody. Niech $V(n)$ oznacza objętość wody w zbiorniku po upływie n -tej minuty.
- Znajdź wzór funkcji V .
 - Oblicz, kiedy w zbiorniku było najmniej wody.
 - Oblicz, w której minucie woda przelała się ze zbiornika.
661. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej a przyporządkowuje resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^2 + 4x + 2$ przez wielomian $P(x) = x - a + 1$. Znajdź najmniejszą wartość funkcji f .
662. R Jednym z rozwiązań równania $x^2 + (p^2 + 2p)x + 2p^2 + 4p - 4 = 0$ jest -2 . Wyznacz tę wartość parametru p (o ile istnieje), dla której drugie rozwiązanie tego równania jest największe.
663. Znajdź tę wartość parametru p (o ile istnieje), dla której suma dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 2(p^2 - 2p)x + p^4 - 4p^3 + 6p = 0$ jest największa.

6. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

KOMBINATORYKA

- **Reguła mnożenia.** Jeżeli pewnego wyboru W dokonujemy w dwóch etapach i w pierwszym etapie możemy dokonać wyboru na k sposobów, a w drugim etapie na m sposobów, to wyboru W możemy dokonać na km sposobów.
- Regułę mnożenia stosować można także wtedy, gdy wyboru W dokonujemy więcej niż w dwóch etapach. Np. jeżeli pewnego wyboru W dokonujemy w trzech etapach i w pierwszym etapie możemy dokonać wyboru na k sposobów, w drugim etapie na m sposobów, a w trzecim na n sposobów, to wyboru W możemy dokonać na kmn sposobów.
- Silnia: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, gdy $n \in \mathbb{N}_+$, natomiast $0! = 1$.
- Symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$.
- Liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami n -elementowego zbioru A (czyli liczba k -wyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru A) jest równa n^k . (ozn. W_n^k)
- Liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń n -elementowego zbioru A (czyli liczba k -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru A) jest równa $\frac{n!}{(n-k)!}$. (ozn. V_n^k)
- Liczba permutacji n -elementowego zbioru A (czyli liczba n -wyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru A) jest równa $n!$. (ozn. P_n)
- Liczba k -elementowych kombinacji n -elementowego zbioru A (czyli liczba k -elementowych podzbiorów zbioru A) jest równa $\binom{n}{k}$. (ozn. C_n^k)

KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA

- Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne należące do zbioru Ω są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A ($A \subset \Omega$) wyraża się wzorem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, gdzie $|A|$ jest liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , a $|\Omega|$ jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych.

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA

Jeśli Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych, a P prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach zawartych w zbiorze Ω , to dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- $P(A) \leq 1$.
- $P(A) + P(A') = 1$, gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zadający potrafi	• obliczać wartości $n!$ i $\binom{n}{k}$
------------------	---

- 6.1 Oblicz a) $4!$; b) $\frac{6!}{0!}$; c) $R \frac{9!}{8!}$; d) $R \frac{11!}{8!}$; e) $R \frac{8!}{3! \cdot 5!}$; f) $R \frac{(7!)^2}{9!}$; g) $R \frac{31! - 30!}{29! + 28!}$

- 6.2 R Sprowadź do prostszej postaci wyrażenie a) $\frac{(n+2)!}{n!}$; b) $\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)!}$; c) $(2n)! + (2n-1)! + (2n-2)!$

6.3 Oblicz a) $R \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.4 R Rozwiąż równanie lub nierówność a) $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = 10$; b) $\begin{pmatrix} n+6 \\ 2 \end{pmatrix} = 28$; c) $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} = 20$; d) $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} < 21$; e) $\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}} > \frac{2}{3}$.

Zdający potrafi	• zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych • stosować regułę mnożenia • stosować wzory na liczbę: permutacji, kombinacji oraz wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń • rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem wzorów kombinatorycznych
-----------------	---

6.5 R W pewnym liceum są dwie klasy trzecie: IIIA i IIIB. W IIIA jest 10 dziewcząt i 20 chłopców, a w klasie IIIB 18 dziewcząt i 8 chłopców. Spośród maturzystów należy wybrać dwie osoby – po jednej z obu klas, które zaproszą dyrekcję szkoły na studniówkę.

- a) Na ile sposobów można dokonać wyboru takiej pary uczniów?
 b) Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, aby wśród wybranych osób były dwie dziewczyny?
 c) Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, aby wśród wybranych osób byli maturzystka i maturzysta?

6.6 R Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Oblicz liczbę wszystkich
 a) czterowyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru A ;
 b) trójiwyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru A ;
 c) dwuelementowych podzbiorów zbioru A .

6.7 Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Znajdź liczbę wszystkich
 a) trójiwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru A ;
 b) dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru A ;
 c) permutacji zbioru A ;
 d) czteroelementowych kombinacji zbioru A .

6.8 R Używając cyfr należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, zapisujemy liczby czterocyfrowe (cyfry w liczbie mogą powtarzać się). Oblicz, ile możemy zapisać
 a) liczb czterocyfrowych;
 b) liczb większych od 4999;
 c) takich liczb, że cyfra tysięcy i cyfra dziesiątek jest nieparzysta, a pozostałe dwie są parzyste;
 d) liczb podzielnych przez 5.

6.9 R Używając cyfr należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, zapisujemy liczby czterocyfrowe (cyfry w liczbie nie mogą powtarzać się). Oblicz, ile możemy zapisać
 a) liczb czterocyfrowych;
 b) liczb większych od 4999;
 c) takich liczb, że cyfra tysięcy i cyfra dziesiątek jest nieparzysta, a pozostałe dwie są parzyste;
 d) liczb podzielnych przez 5.

6.10 R Twinky Winky ma trzy torebki: czerwoną, niebieską i żółtą. Do torebek zamierza włożyć cztery różne zdjęcia pani Ewy.
 a) Na ile sposobów Twinky Winky może rozmieścić zdjęcia w swoich torebkach?
 b) Na ile sposobów może rozmieścić zdjęcia tak, aby w czerwonej torebce nie znalazło się żadne zdjęcie?
 c) Na ile sposobów może rozmieścić zdjęcia tak, aby w czerwonej torebce nie znalazło się żadne zdjęcie, a w niebieskiej i żółtej co najmniej jedno?
 d) Na ile sposobów może rozmieścić zdjęcia tak, aby w każdej torebce znalazło się co najmniej jedno zdjęcie?

6.11 W biegu na 100 metrów wystartuje ośmiu zawodników: czterej Jamajczycy, trzej Anglicy i Grek. Bieg rozegrany zostanie na bieżni składającej się z ośmiu torów. Przed biegiem przeprowadzone zostanie losowanie, które ustali na którym torze pobiegnie dany lekkoatleta.

- a) Ile jest wszystkich możliwych wyników losowania torów?
 b) Ile jest takich możliwych wyników losowania, że Grek wystartuje z pierwszego toru?
 c) Ile jest takich możliwych wyników losowania, że Grek wystartuje z piątego toru?
 d) Ile jest takich możliwych wyników losowania, że na torach 1 – 4 pobiegna Jamajczycy?
 e) R Ile jest takich możliwych wyników losowania, że żadnych dwóch zawodników z Europy nie pobiegnie na sąsiednich torach i żadnych dwóch zawodników z Jamajki nie pobiegnie na sąsiednich torach?
 f) R Ile jest takich możliwych wyników losowania, że żadnych dwóch zawodników z Europy nie pobiegnie na sąsiednich torach?

6.12 R Do klasy IIIC uczęszcza dwanaście dziewcząt i dziewięciu chłopców. Przed lekcją z tą klasą nauczyciel postanowił wybrać trzy osoby, które będą odpowiadać z kombinatoryki.

- a) Na ile sposobów nauczyciel może dokonać tego wyboru?
 b) Na ile sposobów może wybrać trójkę składającą się tylko z dziewcząt?
 c) Na ile sposobów może wybrać trójkę składającą się z chłopca i dwóch dziewcząt?
 d) Na ile sposobów może wybrać trójkę, w skład której wchodzić będą co najmniej dwie dziewczyny?
 e) Na ile sposobów może wybrać trójkę, w skład której będzie wchodził co najmniej jeden chłopiec?

Zdający potrafi	• określać zbiór (skończony) zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego • wyznaczać liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych
-----------------	--

U W A G A. Dla tego samego doświadczenia losowego można określić różne zbiory zdarzeń elementarnych. Dlatego, określając zbiór zdarzeń elementarnych, mówimy: „za zbiór zdarzeń elementarnych Ω przyjmujemy zbiór ...”, a nie „zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór ...”.

6.13 Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu dwóch różnych liter ze zbioru $Z = \{A, B, C, D, E, F\}$. Określ zbiór zdarzeń elementarnych Ω tego doświadczenia i wyznacz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

6.14 Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym losowaniu ze zwracaniem jednej litery ze zbioru $Z = \{A, B, C, D, E, F\}$. Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i wyznacz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

6.15 Gra polega na równoczesnym rzucie sześcienną kostką do gry i dwiema monetami. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Wyznacz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

Zdający potrafi	• wyznaczać liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu • obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej • obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie własności prawdopodobieństwa
-----------------	--

6.16 Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby mniejszej od 7, a zdarzenie B polega na wylosowaniu liczby parzystej. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$. Podaj wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom

- a) A ; b) B ; c) $A \cap B$; d) $A \cup B$; e) $A \cup B$.

6.17 R Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Zdarzenie A polega na wypadnięciu za każdym razem liczby oczek większej od 4, zaś B jest zdarzeniem polegającym na wypadnięciu co najmniej raz liczby oczek niepodzielnej przez 3. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór trzywyrazowych ciągów (a, b, c) takich, że $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniom

- a) A ; b) B ; c) B ; d) $A \cap B$; e) $A \cup B$.

- 6.18 R Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 150\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej
- przez 10;
 - przez 4;
 - przez 10 i przez 4;
 - przez 10 lub przez 4.
- 6.19 R Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ losujemy trzy cyfry ze zwracaniem i zapisujemy je w kolejności wylosowania, otrzymując liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby
- podzielnej przez 5;
 - parzystej;
 - większej od 300;
 - większej od 350;
 - podzielnej przez 4.
- 6.20 Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy cyfry i zapisujemy je w kolejności wylosowania, otrzymując liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby
- R podzielnej przez 5;
 - R parzystej;
 - większej od 300;
 - większej od 350;
 - podzielnej przez 4.
- 6.21 R Hania i Marcin są w grupie składającej się z sześciu dziewcząt i pięciu chłopców. Wszystkie dzieci ustawiły się w sposób losowy w kolejce. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
- A – na początku kolejki stanęła dziewczynka;
 - B – początkowe sześć miejsc w kolejce zajęły dziewczynki;
 - C – żadne dwie dziewczynki nie stały obok siebie;
 - D – pomiędzy żadnymi dwiema dziewczynkami nie stał ani jeden chłopiec;
 - E – pomiędzy Hanią i Marcinem nie stało żadne dziecko;
 - F – pomiędzy Hanią i Marcinem stało dokładnie pięcioro dzieci.
- 6.22 R Z urny, w której znajduje się dziesięć kul: sześć białych i cztery czarne, losujemy pięć kul. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania
- pięciu kul białych;
 - dokładnie czterech kul białych;
 - co najmniej czterech kul białych;
 - co najmniej jednej kuli czarnej.

Zdający potrafi • stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań

- 6.23 R Wiadomo, że $P(A)=0,4$, $P(B')=0,3$ i $P(A \cup B)=0,9$. Oblicz
- $P(B)$;
 - $P(A \cap B)$;
 - $P(A \setminus B)$.
- 6.24 R Zdarzenia A i B są rozłączne oraz $A \cup B = \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Wiedząc, że $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{16}$ i $P(A) > P(B)$, oblicz $P(A)$ i $P(B)$.
- 6.25 R Zdarzenia A i B są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω pewnego doświadczenia losowego. Wiedząc, że $P(A') \geq \frac{5}{7}$, uzasadnij, że
- $P(A) \leq \frac{2}{7}$;
 - $P(A' \cup B) > \frac{2}{3}$;
 - $P(A \cap B) < 0,3$.
- 6.26 R Zdarzenia A i B są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω pewnego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cap B$, jeżeli prawdopodobieństwa zdarzeń A i $A \cup B$ są równe odpowiednio 0,3 i 0,9.

ZADANIA MATURALNE

KOMBINATORYKA

silnia, symbol Newtona

664. O ile procent liczba $\frac{15!}{13!+12!}$ jest mniejsza od liczby $\binom{26}{2}$?
665. Dane są liczby $a=18!$ i $b=20!$.
- Ile razy liczba b jest większa niż liczba a ?
 - Liczbę a zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę jedności liczby a .
 - Liczbę b zapisano w systemie dziesiętnym. Podaj cyfrę tysięcy liczby b .
 - W Uzasadnij, że liczba a jest podzielna przez 119, a nie jest podzielna przez 19.
666. R Sprawdź, czy liczba $\binom{1}{0} + \binom{3}{2} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{39}{38} + \binom{41}{40}$ jest mniejsza od 500.
667. T w i e r d z e n i e. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.
Wykorzystując podaną równość, oblicz
- liczbę wszystkich podzbiorów zbioru pięcioelementowego;
 - liczbę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru sześćelementowego.
668. Rozwiąż równanie $\binom{n+2}{4} = 5 \cdot \binom{n}{3}$.
669. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające równanie $2 \cdot \binom{n}{n-4} = \binom{n+1}{n-3}$.
670. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} < \binom{n+1}{3}$.
671. Wykaż, że jeśli $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ i $k < n$, to $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
672. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

zadania kombinatoryczne

673. W jadłospisie baru mlecznego „Biedronka” znajduje się 8 zup, 7 drugich dań i 2 kompoty, natomiast konsument chcący zjeść obiad w barze „Gdańskim” ma do wyboru 6 zup, 5 drugich dań i 4 kompoty. Pan Kowalski zamierza zjeść obiad w jednym z tych barów. W którym barze ma większą możliwość wyboru zestawu obiadowego składającego się z zupy, drugiego dania i kompotu?

674. Od domu wczasowego do podnóża góry prowadzą 3 trasy autokarowe, a od podnóża góry na szczyt wiodą 4 szlaki turystyczne. Oblicz, ile różnych tras może zaplanować organizator wycieczki, jeżeli ze względów poznawczych droga powrotna będzie przebiegać
a) innym szlakiem turystycznym i tą samą trasą autokarową;
b) innym szlakiem turystycznym i inną trasą autokarową.
675. Wyznaczymy liczbę wszystkich dzielników liczby $a = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$. Zauważmy, że każdy dzielnik liczby a jest liczbą postaci $3^k \cdot 5^m \cdot 7^n$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Zatem liczba dzielników liczby a jest równa liczbie trójwyrazowych ciągów (k, m, n) , gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Wyznaczamy liczbę tych ciągów: $4 \cdot 5 \cdot 3$. Tak więc liczba a ma 60 dzielników. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, wyznacz liczbę dzielników liczby
a) $2^6 \cdot 11^7 \cdot 13$; b) 5400.
676. R Ile jest liczb naturalnych, które są dzielnikami liczby 10010?
677. W pewnym prostym edytorze tekstów użytkownik może pisać tekst używając tylko czterech typów czcionek: *Arial*, *Courier*, *Impact* i *Times New Roman*. Oblicz, na ile różnych sposobów można napisać w tym programie słowo
a) TRON; b) FOTEL, zmieniając tylko typ czcionki.
678. Uczniowie klasy matematyczno-informatycznej muszą uczęszczać na fakultety z trzech przedmiotów, w tym z co najmniej dwóch przedmiotów ścisłych. Wyboru dokonują spośród dziesięciu przedmiotów, wśród których są cztery przedmioty ścisłe. Oblicz, na ile sposobów może wybrać fakultety każdy uczeń tej klasy.
679. W galerii przygotowywana jest wystawa malarstwa olejnego. Na jednej ze ścian należy zawiesić w jednym rzędzie osiem obrazów. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, jeśli dwa największe płótna
a) mają być umieszczone na początku i na końcu ściany,
b) mają sąsiadować ze sobą.
680. W rozgrywkach piłkarskiej ekstraklasy występuje 16 zespołów. W jednym sezonie każda drużyna rozgrywa z każdą mecz i rewanż. Do ilu pojedynków dochodzi w ciągu sezonu w tych rozgrywkach?
681. Mając do dyspozycji farby w pięciu kolorach, Tomek ma za zadanie pomalować chorągiewkę składającą się z trzech części (patrz rys.). Każda część po obu stronach ma być pomalowana tym samym kolorem farby. Oblicz, na ile różnych sposobów Tomek może pomalować chorągiewkę, jeżeli
a) każda część ma mieć inny kolor;
b) pierwsza i trzecia część chorągiewki ma mieć ten sam kolor, a część środkowa inny.

Część 1
Część 2
Część 3

683. Przypuśćmy, że w pewnym kraju numer rejestracyjny każdego samochodu ma postać $L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3$, gdzie każdy z symboli L_1, L_2, L_3 oznacza jedną z 22 liter, a każdy z symboli C_1, C_2, C_3 oznacza cyfrę, przy czym litery występujące w numerze nie mogą powtarzać się.
a) Zbadaj, czy w tym kraju można zarejestrować 10 mln samochodów.
b) Oblicz, ile można byłoby zarejestrować samochodów, gdyby cyfry występujące w numerze rejestracyjnym również nie mogły powtarzać się. O ile procent zmniejszyłaby się wówczas liczba możliwych do utworzenia numerów rejestracyjnych?
684. Przed sklepem jest siedem miejsc parkingowych (jedno obok drugiego). Na ile sposobów na tym parkingu mogą zaparkować cztery samochody tak, aby
a) żadne dwa samochody nie parkowały na sąsiednich miejscach;
b) między żadnymi dwoma samochodami nie było wolnego miejsca.
685. W przedziale wagonu kolejowego znajduje się 8 ponumerowanych miejsc w dwóch rzędach po 4 miejsca. Do pustego przedziału weszło 5 osób: 3 panie i 2 panów. Panie zajęły miejsca w jednym rzędzie, a panowie usiedli na miejscach w drugim rzędzie. Oblicz, na ile sposobów osoby te mogły zająć miejsca tak, aby
a) panie siedziały zwrócone twarzą do kierunku jazdy;
b) R vis-à-vis każdego z panów siedziała pani.
686. R Ewa w dniu urodzin otrzymała pięć róż. Każda róża jest innego koloru, a wśród nich jest róża czerwona. Ewa zamierza wstawić róże do wazonów. Wiedząc, że Ewa ma trzy wazony różnej wielkości, oblicz
a) na ile sposobów może rozmieścić kwiaty w swoich wazonach;
b) na ile sposobów może rozmieścić kwiaty tak, aby w największym wazonie stała róża czerwona i dwie inne, a w każdym z pozostałych wazonów znalazła się jedna róża.
687. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których
a) cyfrą setek jest 7; b) cyfrą setek i cyfrą jedności jest 7;
c) cyfrą setek lub cyfrą jedności jest 7.
688. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których
a) cyfra setek jest dwa razy mniejsza niż cyfra dziesiątek;
b) cyfra setek jest o 2 większa od cyfry dziesiątek.
689. Na każdej z ośmiu kartek zapisano jedną z liczb 1, 2, ..., 8, na każdej kartce inną liczbę. Następnie każdą kartkę wkładamy do jednej z trzech szuflad biurka.
a) Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach?
b) Na ile sposobów można rozmieścić kartki w szufladach w taki sposób, aby w pierwszej szufladzie nie było kartek z parzystą liczbą?
c) R Na ile sposobów można rozmieścić kartki w taki sposób, aby sumy liczb zapisanych na kartkach znajdujących się w poszczególnych szufladach były równe?
690. R W turnieju szachowym każdy uczestnik rozegrał z każdym z pozostałych zawodników jedną partię. W całym turnieju rozegrano 66 partii. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?
691. Punkty A, B, C, D, E, F należą do prostej k , a punkty P, Q, R, S należą do prostej l równoległej do k ($k \neq l$).
a) Ile można narysować takich odcinków, że jeden koniec odcinka należy do zbioru $\{P, Q, R, S\}$, a drugi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$?
b) Ile można narysować czworokątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?
c) Ile można narysować trójkątów o wierzchołkach należących do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S\}$?

692. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów.
 a) Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
 b) Ile wielokątów o wierzchołkach w tych punktach możemy narysować?
693. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
 a) Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B ?
 b) Ile jest wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B , które dla różnych argumentów przyjmują różne wartości?
 c) Ile jest wszystkich funkcji rosnących ze zbioru A w zbiór B ?
694. R Ze zbioru wszystkich punktów, których odcięta należy do zbioru $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, a rzędna należy do zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, wybieramy trzy punkty. Ile mamy możliwości dokonania takiego wyboru, aby
 a) wszystkie wybrane punkty należały do jednej prostej równoległej do osi rzędnych;
 b) wszystkie wybrane punkty były z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.
695. Przed świętami Bożego Narodzenia do domu państwa Kowalskich, którzy mają troje dzieci, przybył Święty Mikołaj i przywiózł dzieciom pięć różnych zabawek. Na ile sposobów Mikołaj mógł obdarować dzieci zabawkami tak, aby najstarsze dziecko dostało co najwyżej dwie zabawki.
696. R Dwanaścioro uczniów klasy IIA – wśród nich Marta i Wojtek – po zakończeniu roku szkolnego pozostało w budynku szkoły, aby zrobić generalne porządki w sali lekcyjnej, którą się opiekują. Przed rozpoczęciem sprzątanina, uczniowie ustalili, że czworo z nich będzie myć okna, inna czwórka umyje ławki, a pozostałe cztery osoby zrobią porządki w klasowej bibliotece.
 a) Na ile sposobów uczniowie mogli dokonać podziału na czwórki?
 b) Na ile sposobów uczniowie mogli dokonać takiego podziału, aby Marta i Wojtek znaleźli się w tej samej czwórce?
697. R Wśród dwunastu dziewcząt ze szkolnego zespołu siatkarek są Krysia i Ula. Jeśli dziewczęta trenują w większej sali gimnastycznej, to grupa jest dzielona na dwa 6-osobowe zespoły, a jeśli w mniejszej, to na trzy zespoły 4-osobowe. Na ile sposobów można dokonać podziału grupy siatkarek na zespoły,
 a) jeśli dziewczyny trenują w większej sali;
 b) jeśli dziewczyny trenują w mniejszej sali;
 c) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w jednym zespole, jeśli trening odbywa się w większej sali;
 d) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w jednym zespole, jeśli trening odbywa się w mniejszej sali;
 e) tak, aby Krysia i Ula znalazły się w różnych zespołach, jeśli trening odbywa się w mniejszej sali?
698. Ośmiu kolegów postanowiło po lekcjach zagrać w piłkę. Przed rozpoczęciem meczu muszą podzielić się na dwa czteroosobowe zespoły. Na ile sposobów mogą dokonać tego podziału?
699. Każdy z sześciu skazanych ma być osadzony w jednym z trzech zakładów karnych.
 a) Na ile sposobów można rozmieścić skazanych w tych trzech zakładach karnych?
 b) Na ile sposobów można rozmieścić skazanych tak, aby w każdym zakładzie karnym wyrok odsiadywało dwóch z nich?
700. Komendant posterunku policji ma do dyspozycji siedmiu policjantów. Oblicz, na ile sposobów komendant może spośród tych policjantów utworzyć
 a) dwa trzyosobowe patrole;
 b) trzy dwuosobowe patrole.

701. Oblicz liczbę tych permutacji zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, w których
 a) liczby 1, 2 nie sąsiadują ze sobą;
 b) R liczby 1, 2, 3 występują w porządku rosnącym.
702. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których
 a) cyfra tysięcy jest mniejsza od cyfry setek, a cyfra setek jest mniejsza od cyfry dziesiątek;
 b) cyfra tysięcy jest większa od cyfry setek, a cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek?
- 703.* R Po płaszczyźnie z układem współrzędnych można wędrować w następujący sposób: z punktu (n, k) można przejść tylko do punktu $(n+1, k)$ albo do punktu $(n, k+1)$. Oblicz liczbę dróg prowadzących z punktu $(0, 0)$ do punktu $(4, 4)$.
- 704.* R Przekątne ośmiokąta wypukłego mają tę własność, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W ilu punktach przecinają się przekątne tego wielokąta?

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

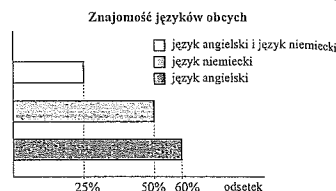
705. Ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 a) wylosowana liczba jest rozwiązaniem równania $x^3 + 2 = 2x^2 + x$;
 b) wylosowana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności $(5-x)(1-x) \geq 0$.
706. Wśród dziewięćdziesięciu nauczycieli pracujących w pewnym gimnazjum jest piętnastu mężczyzn. Stopień nauczyciela dyplomowanego ma 56% kobiet i 40% mężczyzn zatrudnionych w tej szkole na stanowisku nauczyciela. Dyrektor gimnazjum planuje w następnym tygodniu przeprowadzić hospitację lekcji jednego z nauczycieli. Wyboru hospitowanego nauczyciela dokona w sposób losowy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że hospitowana będzie osoba, która nie jest nauczycielem dyplomowanym?
707. W pewnym liceum sportowym klasa IIIA liczy 32 uczniów. 25% uczniów tej klasy trenuje rzut dyskiem, 50% trenuje pchnięcie kulą, a 12,5% trenuje zarówno rzut dyskiem, jak i pchnięcie kulą. Z klasy tej wybrano losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba nie trenuje żadnej z wymienionych konkurencji?
708. Badana grupa 250 rodzin podzielona została według dwóch kryteriów: wysokości rocznego dochodu i liczby posiadanych samochodów. Wyniki przedstawione są w tabeli:

Liczba samochodów w rodzinie	Roczny dochód rodziny		
	poniżej 25 tys. zł	od 25 tys. do 60 tys. zł	powyżej 60 tys. zł
0	40	10	0
1	25	65	45
2 i więcej	0	5	60

Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z badanej grupy rodzina

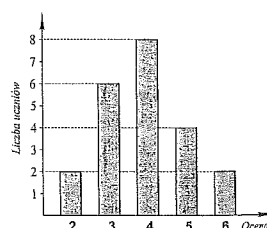
- a) posiada jeden samochód,
 b) ma roczny dochód nieprzekraczający 60 tys. zł,
 c) posiada przynajmniej jeden samochód i dochody nie mniejsze niż 25 tys. zł,
 d) nie posiada samochodu lub ma dochody niższe niż 25 tys. zł?

709. Na wykresie przedstawiono informacje dotyczące znajomości języka angielskiego oraz języka niemieckiego w pewnej 200-osobowej grupie studentów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany z tej grupy student
- zna język niemiecki i nie zna języka angielskiego;
 - nie zna języka angielskiego i nie zna języka niemieckiego.

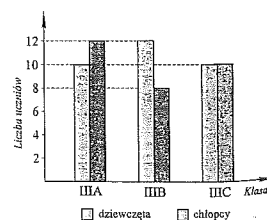


710. W urnie U_1 jest pięć kul ponumerowanych liczbami 1, 2, 3, 4, 5, a w urnie U_2 jest sześć kul ponumerowanych liczbami 9, 10, 11, 12, 13, 14. Losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich kul, że iloczyn ich numerów jest liczbą nieparzystą, jeśli
- losowanie polega na tym, że pierwszą kulę losujemy z urny U_1 , a drugą z U_2 ;
 - losujemy kolejno ze zwracaniem obie kule z urny U_2 ;
 - losujemy bez zwracania obie kule z urny U_1 .
- Opisz zbiór zdarzeń elementarnych dla każdego z tych doświadczeń.
711. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Rozważmy zdarzenia losowe: A – liczba oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie jest dzielnikiem liczby oczek wyrzuconych w drugim rzucie, B – liczby oczek otrzymane w obu rzutach są liczbami pierwszymi.
- Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.
 - Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .
 - Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B .

712. Na wykresie przedstawiono dane o ocenach z matematyki uzyskanych na koniec I semestru przez uczniów jednej z klas trzecich. Spośród uczniów tej klasy wybrano losowo dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
- $R A$ – wylosowano uczniów, z których każdy miał na koniec semestru ocenę co najmniej bardzo dobrą;
 - B – wylosowano uczniów, którzy mieli na koniec semestru różne oceny, przy czym były to oceny co najmniej dobre.



713. Na wykresie przedstawiono skład trzecich klas pewnego liceum. Z listy zawierającej spis wszystkich uczniów klas trzecich wybrano losowo dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że
- wylosowano dwóch chłopców;
 - wylosowano dwie dziewczyny z klasy IIIa;
 - jedna z wylosowanych osób jest dziewczyną z klasy IIIb, a druga chłopcem z klasy IIIc.



714. Oplata za los loterii pieniężnej wynosi 2,50 zł. Gdybyśmy chcieli kupić wszystkie losy tej loterii, to musielibyśmy zapłacić 3 mln zł. W loterii przygotowano losy z wygraną 5000 zł, losy z wygraną 100 zł oraz losy „puste”. Losów z wygraną 5000 zł jest 50 razy mniej niż z wygraną 100 zł, a na wygrane przeznaczono 2 mln zł. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza osoba kupująca los w tej loterii wyciągnie los z wygraną w wysokości 5000 zł.

715. R Samorząd szkolny zorganizował loterię. Uczniowie przygotowali 25 losów wygrywających i 27 losów pustych. Każda z trzech osób, które jako pierwsze wzięły udział w tej loterii, kupiła jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna spośród nich wylosowała los z wygraną. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.
716. Uczniowie zorganizowali dwie loterie. W pierwszej loterii pozostało 40 losów, w tym tylko jeden wygrywający, a w drugiej loterii 80 losów, w tym dwa wygrywające. W której z tych loterii osoba kupująca dwa losy ma większe szanse wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego?
717. Na parterze 6-piętrowego biurowca do windy wsiadły cztery osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiadła z windy na innym piętrze.
718. W każdym z dwóch koszyków znajduje się 5 klocków czerwonych, 10 zielonych i 6 białych. Wyjmujemy losowo po jednym klocku z każdego koszyka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
- $R A$ – wylosujemy dwa klocki białe;
 - B – wylosujemy klocki tego samego koloru.
719. Ze zbiorów $X = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy po jednej liczbie. Rozpatrujemy zdarzenia: A – iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, B – obie wylosowane liczby są parzyste.
- Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B .
 - Wyznacz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B .
720. Spośród liczb $-10, -8, -6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ losujemy kolejno dwie różne liczby x i y , a następnie tworzymy iloczyn xy . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
- $R A$ – iloczyn xy jest liczbą niedodatnią;
 - B – iloczyn xy jest liczbą większą od 60.
721. Spośród liczb $1, 2, 3, \dots, 121$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych drugą. Zdarzenia A i B określono są następująco: A – w pierwszym losowaniu otrzymano liczbę parzystą, B – w drugim losowaniu otrzymano liczbę parzystą.
- Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B ;
 - Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$.
722. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie jest mniejsza od liczby oczek wyrzuconych w trzecim rzucie.
723. Każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 namalowana jest na innym z pięciu klocków. Dziecko bawiąc się tymi klockami, ustawiło je obok siebie, tworząc liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dziecko utworzy liczbę podzielną
- R przez 2;
 - przez 3;
 - przez 5;
 - przez 9.
724. W każdej z dwóch szuflad biurka znajduje się 50 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 50 – każda kula w szufladzie ma inny numer. Z obu szuflad wyjmujemy losowo po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania
- kul z tym samym numerem;
 - kul, których suma numerów jest równa 51;
 - R kul, których numery różnią się o 10;
 - R kul z numerami, których suma jest podzielna przez 33.

725. Spośród liczb 1, 2, ..., 9 losujemy jedną liczbę, zwracamy ją i losujemy po raz drugi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 a) różnica wylosowanych liczb jest liczbą parzystą;
 b) wartość bezwzględna różnicy wylosowanych liczb jest większa od 1.
726. Gracz A rzuca raz sześcienną kostką z liczbami 2, 4 i 9 na ściankach, a gracz B rzuca raz kostką z liczbami 3, 5 i 7, przy czym każda liczba znajduje się na dwóch ściankach kostki. Wygrywa ten gracz, na którego kostce wypadnie większa liczba. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania gracza A.
727. Po południu w prywatnej przychodni pracuje trzech stomatologów. Pewnego popołudnia stomatologdy w tej przychodni przyjęli sześciu pacjentów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 a) A – każdy z lekarzy przyjął co najwyżej pięciu pacjentów
 b) B – każdy z lekarzy przyjął co najwyżej czterech pacjentów.
728. R W meczu piłki nożnej wystąpiło dwunastu piłkarzy drużyny A z numerami na koszulkach od 1 do 12 i trzynastu piłkarzy drużyny B oznaczonych numerami od 1 do 13. Po meczu dokonano losowego wyboru zawodników do kontroli antydopingowej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania zawodników, którzy grali z różnymi numerami na koszulkach, jeżeli
 a) wybrano dwóch zawodników – po jednym z każdego zespołu;
 b) wybrano czterech zawodników – po dwóch z każdego zespołu
 c) wybrano trzech zawodników.
729. Kuba dysponuje kostkami sześciennymi, których ścianki są oznaczone cyframi od 1 do 6 i kostkami w kształcie czworokąta foremnego, których ścianki są oznaczone cyframi 1, 2, 4, 6. Wybiera dwie spośród tych kostek i raz wykonuje nimi rzut. Zbadaj, jakie kostki powinien wybrać Kuba, aby prawdopodobieństwo zdarzenia A – suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 6 było największe?
730. Test egzaminacyjny składa się z 10 pytań. Do każdego pytania podane są 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawdziwa. Zdający egzamin postanowił udzielać odpowiedzi w sposób losowy. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że zdający
 a) R prawidłowo odpowie co najwyżej na jedno pytanie,
 b) zaliczy test na najwyższą ocenę, jeśli wiadomo, że musi wówczas udzielić co najmniej 90% prawidłowych odpowiedzi.
731. Z deklaracji złożonych we wrześniu przez maturzystów pewnego liceum wynika, że 32% z nich zamierza zdawać na maturze historię, 48% wos, a co dziesiąty trzecioklasista deklaruje chęć zdawania zarówno historii, jak i wos-u. Spośród maturzystów wybrano losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba nie zamierza zdawać na maturze ani historii, ani wos-u?
732. R Z deklaracji złożonych we wrześniu przez maturzystów pewnego liceum wynika, że 32% z nich zamierza zdawać na maturze historię, 48% wos, a co dziesiąty trzecioklasista deklaruje chęć zdawania historii lub wos-u, zamierza zdawać oba te przedmioty. Spośród maturzystów wybrano losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba nie zamierza zdawać na maturze ani historii, ani wos-u?
733. Sześciu znajomych opala się na plaży, każdy na swoim kocu. W pewnym momencie wszyscy wstają, biegną do wody, a po kąpieli wracają i kładą się na losowo wybranym kocu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie osoby nie położy się na swoich kocach.

734. Liczby 1, 2, 3, ..., 20 przestawiamy w dowolny sposób. Oblicz prawdopodobieństwo, że
 a) liczby 1 i 2 będą ustawione jedna obok drugiej;
 b) liczby 1, 2 i 3 będą ustawione jedna obok drugiej w kolejności wzrastania.
735. Każda litera należąca do zbioru $Z = \{A, B, M, R, S, Y\}$ napisana jest na jednej z sześciu kartek. Wybrano losowo cztery kartki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 a) wylosowano tylko kartki ze spółgłoskami;
 b) wybrano kartki zawierające wszystkie samogłoski należące do zbioru Z ;
 c) z liter na wylosowanych kartkach nie będzie można utworzyć słowa RYBA.
736. W loterii przygotowano 100 losów, wśród których 10 losów daje wygraną 10 zł, 5 losów wygraną 20 zł, 1 los wygraną 50 zł, zaś pozostałe są puste. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kupując 3 losy wygramy co najmniej 40 zł.
737. Nauczycielowi matematyki, sprawdzającemu próbną maturę swoich uczniów, do sprawdzenia pozostało dziesięć prac – w tym prace Eweliny i Magdy. Prace – ułożone losowo jedna na drugiej – leżą na biurku. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 A – między pracami Eweliny i Magdy leżą dokładnie trzy prace innych uczniów,
 B – praca Eweliny nie leży na pracy Magdy.
738. W sklepie owocowo-warzywnym w sprzedaży jest sześć odmian jabłek. Każdy z sześciu klientów, którzy dokonali zakupów w tym sklepie w ciągu ostatniej godziny, kupił kilogram jabłek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 A – co najmniej dwie osoby kupiły jabłka tej samej odmiany;
 B – trzy osoby kupiły jabłka tej samej odmiany, a pozostałe trzy osoby kupiły jabłka różnych odmian.
739. R Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ wybieramy losowo dwie liczby, a następnie z pozostałych liczb znów wybieramy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu za drugim razem co najmniej jednej liczby parzystej.
740. W pierwszej urnie jest 6 kul czarnych i 4 białe, a w drugiej urnie jest 7 kul czarnych i 8 białych. Losujemy dwie kule bez zwracania z pierwszej urny i dwie kule ze zwracaniem z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie trzech kul białych?
741. Grupa przedszkolaków składająca się z dziesięciu dziewcząt i dziesięciu chłopców uczestniczyła w pieszkiej wycieczce do lasu. W grupie tej byli Ala, Ania, Rafał i Tomek. Przed wyruszeniem na wycieczkę pani przedszkolanka ustawiła dzieci w pary w taki sposób, aby każdy chłopiec siedział w parze z dziewczynką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 A – Tomek siedział w parze z Alą, a Rafał w parze z Anią
 B – żaden z wymienionych chłopców nie siedział w parze ani z Alą, ani z Anią.
742. Na każdym z sześciennych klocków, które ma Tomek, zapisana jest jedna cyfra. Pewnego dnia chłopiec ustawił w szereg siedem klocków, otrzymując liczbę siedmiocyfrową. Po chwili z utworzonego szeregu wysunął wszystkie klocki z cyfrą 5. Wówczas cyfry na pozostawionych klockach utworzyły liczbę 2010. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba siedmiocyfrowa była
 a) większa od 5 000 000; b) podzielna przez 3; c) podzielna przez 5; d) podzielna przez 50.

743. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ wybieramy losowo dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma jest większa od 17.
744. Ze zbioru punktów o współrzędnych (x, y) , gdzie $x \in \{1, 2, 3\}$, zaś $y \in \{2, 4\}$, wybrano losowo dwa różne punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
 a) A – wylosowane punkty należą do prostej o równaniu $y=2x$;
 b) B – wylosowane punkty są końcami odcinka równoległego do osi OX .
745. W szufladzie znajduje się 15 kartek ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Losujemy kolejno 5 kartek bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer trzeciej z wylosowanych kartek jest liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie numer piątej jest liczbą podzielną przez 5.
746. W grze liczbowej *Express Lotek* losowanych jest pięć spośród liczb 1, 2, 3, ..., 41, 42. Gracz zawarł jeden zakład na najbliższe losowanie (czyli wytypował w kolekturze Totalizatora Sportowego pięć liczb spośród czterdziestu dwóch). Oblicz, ile razy prawdopodobieństwo trafienia „trójki” (czyli wytypowania dokładne trzech liczb spośród tych, które będą wylosowane) jest większe niż prawdopodobieństwo trafienia
 a) „piątki”; b) „czwórki”.
747. Na zajęcia SKS-u przyszedł Karol, Tomek i sześciu innych chłopców. Prowadzący zajęcia nauczyciel zdecydował, że na tych zajęciach czterech chłopców będzie ćwiczyć na siłowni, dwóch będzie grać w tenisa, a pozostałych dwóch w badminton. W związku z tym w sposób losowy dokonał podziału grupy chłopców na trzy grupy: 4-osobową i dwie 2-osobowe. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzenia
 A – na tych zajęciach Karol ćwiczył na siłowni;
 B – na tych zajęciach Karol ćwiczył w tej samej grupie co Tomek.
748. Z grupy 8 chłopców i 4 dziewcząt wybrano losowo 5 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców w tej grupie uległ zwiększeniu?
749. Mamy 40 kur – 30 białych i 10 czarnych. Kury zaganiamy do dwóch kurników – do każdego kurnika 20 kur, a następnie z obu kurników wybieramy losowo po jednej kurze. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kur o różnych kolorach upierzenia będzie najmniejsze wtedy, gdy do obu kurników zagamy po piętnaście białych i po pięć czarnych kur.
750. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 a) A – suma wylosowanych liczb będzie liczbą parzystą,
 b) B – iloczyn wylosowanych liczb będzie liczbą parzystą.
751. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest podzielną przez 3.
752. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich dwóch liczb, których iloczyn
 a) jest podzielny przez 4;
 b)* R przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

753. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 15, 16\}$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem i oznaczamy kolejno wylosowane liczby x_1, x_2, x_3 . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia
 a) A – iloczyn $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ jest liczbą podzielną przez 3,
 b)* B – suma $x_1 + x_2 + x_3$ jest liczbą podzielną przez 3.
754. R Za pomocą cyfr 0, 3, 4, 5, 6, 9 tworzymy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Spośród tych liczb wybieramy losowo trzy różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna spośród wylosowanych liczb jest podzielną przez 45?
755. W Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 4n+5\}$ losujemy dwie różne liczby. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb nieparzystych jest równe $\frac{15}{58}$. Ile liczb należy do zbioru A ?
- 756.* Zbiór $A = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$ podzielono w sposób losowy na dwa równoliczne podzbiory.
 a) Wyznacz prawdopodobieństwo takich zbiorów, że w obu jest tyle samo liczb podzielnych przez n .
 b) Zbadaj, dla jakich n prawdopodobieństwo to jest mniejsze od 0,5.
- 757.* Ze zbioru wszystkich trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ losujemy jeden ciąg.
 a) Wyznacz prawdopodobieństwo wylosowania ciągu rosnącego lub malejącego.
 b) Dla jakiej liczby naturalnej n prawdopodobieństwo to jest równe 0,125?
- 758.* R Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ losujemy dwukrotnie ze zwracaniem po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2)$.

zadania z danym prawdopodobieństwem

759. Klasa IIIB liczy 32 uczniów. Gdybyśmy losowali z tej klasy jedną osobę, to prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny jest równe 0,375, prawdopodobieństwo wylosowania osoby planującej zdawać na maturze fizykę równe jest 0,25, a prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny lub osoby planującej zdawać na maturze fizykę jest równe 0,5. Ilu chłopców z IIIB planuje zdawać na maturze fizykę.
760. R W torebecie jest 7 cukierków owocowych, 12 kawowych, a pozostałe cukierki mają smak miętowy. Gdybyśmy wyjęli losowo cukierka z torebki, to prawdopodobieństwo tego, że będzie to cukierek kawowy, jest równe 0,4.
 a) Oblicz, ile cukierków miętowych znajduje się w torebce.
 b) Dwoje dzieci wyjęło z torebki po jednym cukierku. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzieci wyjęły cukierki o smaku owocowym?
761. Pani Grażyna ma w portfelu tylko banknoty o nominałach 50 zł i 100 zł, przy czym liczba banknotów 50-złotowych jest o 4 mniejsza od liczby banknotów 100-złotowych. Mąż pani Grażyny przed wyjściem do sklepu zamierza wyjąć w sposób losowy jeden banknot z portfela żony. Prawdopodobieństwo tego, że wyjmie banknot stużłotowy, jest równe 0,75. Jaka kwota znajduje się w portfelu pani Grażyny?
762. 40% uczestników spotkania przedstawicieli koalicji rządowej stanowili członkowie partii A. Pozostałe osoby uczestniczące w tym spotkaniu należą do partii B. W dyskusji na temat obowiązkowej matury z matematyki zabrały głos tylko dwie osoby. Prawdopodobieństwo tego, iż pierwszą osobą zabierającą głos w dyskusji była osoba należąca do partii A, a drugą członek partii B, jest równe 0,25. Ile osób brało udział w tym spotkaniu?

763. R W pewnym technikum są trzy klasy maturalne. Co czwarty maturzysta z tej szkoły jest uczniem klasy IVA. Przy losowaniu jednego maturzysty, prawdopodobieństwo wylosowania ucznia klasy IVA lub IVB jest o 0,15 mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania ucznia klasy IVB lub IVC. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ucznia klasy IVC.

764. Uczniowie klasy IIIA jako drugiego języka obcego mogą uczyć się j. rosyjskiego albo j. niemieckiego albo j. hiszpańskiego. Wiadomo, że co szósty uczeń tej klasy uczy się j. niemieckiego. Gdybyśmy losowali z tej klasy jedną osobę, to prawdopodobieństwo wylosowania ucznia uczącego się j. niemieckiego lub j. hiszpańskiego jest trzy razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania ucznia uczącego się j. niemieckiego lub j. rosyjskiego.

- a) Jaki procent uczniów klasy IIIA uczy się j. rosyjskiego?
b) Ilu uczniów uczy się w tej klasie, jeżeli wiadomo, że jest ich więcej niż 15, ale mniej niż 40?

* * * * *

765. Z koszyka, w którym jest n piłeczek zielonych i 6 białych, losujemy dwie piłeczki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch piłeczek zielonych jest równe 0,5. Oblicz, ile piłeczek znajduje się w koszyku.

766. Z urny zawierającej n kul, w tym 6 białych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul będzie większe od 0,25?

767. R Z pudełka, w którym jest 6 kul czarnych i n kul białych losujemy dwie kule. Zbadaj, dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul jest mniejsze od 0,5.

768. Z pudełka, w którym znajduje się dwa razy więcej kul czarnych niż białych, wylosowano dwie kule. Oblicz, ile kul każdego koloru znajduje się w pudełku, jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych jest równe prawdopodobieństwu wylosowania kul tego samego koloru.

769. W klasie IIIA jest dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt. Jeśli losowalibyśmy dwie osoby z tej klasy, to prawdopodobieństwo wylosowania dwóch chłopców jest o $\frac{1}{39}$ mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania chłopca i dziewczyny. Ilu uczniów liczy klasa IIIA?

770. Z urny, w której jest dwa razy więcej kul czarnych niż białych i trzy razy więcej kul zielonych niż białych, losujemy trzy kule. Prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul różnokolorowych wynosi $\frac{27}{136}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul, wśród których dokładnie dwie będą tego samego koloru.

771. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 kule czarne, losujemy n kul. Znajdź najmniejszą wartość n taką, przy której prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej kuli czarnej jest większe od 0,5.

zadania z funkcjami

772. Wzór funkcji $f(x) = ax + b$ tworzymy w następujący sposób: dwukrotnie losowo wskazujemy liczbę należącą do zbioru $Z = \{x \in \mathbb{C} : x^2 + x - 6 \leq 0\}$ (wskazane liczby mogą być równe), pierwsza ze wskazanych liczb jest równa współczynnikowi a , zaś druga jest równa współczynnikowi b . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

- a) A – otrzymana funkcja jest rosnąca; b) B – otrzymana funkcja nie ma miejsca zerowego.

773. Spośród liczb całkowitych należących do przedziału $\langle a; b \rangle$, gdzie $a = \log 0,01$ i $b = \log \sqrt{5} 25$, losujemy (bez zwracania) najpierw współczynnik c , a następnie współczynnik d funkcji $g(x) = cx + d$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy

- a) funkcję stałą;
b) funkcję, do wykresu której należy początek układu współrzędnych;
c) funkcję, do wykresu której należy punkt $A = (1, 3)$.

774. Ze zbioru $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ losujemy jedną liczbę. Wylosowana liczba jest równa współczynnikowi c we wzorze funkcji $g(x) = x^2 + x + c$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana w ten sposób funkcja

- a) dla argumentu -2 przyjmuje dodatnią wartość;
b) nie ma miejsc zerowych.

775. Ze zbioru $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno bez zwracania współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

- a) A – otrzymana funkcja jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R}$;
b) B – otrzymana funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$ i rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$;
c) C – prosta o równaniu $x = 0$ jest osią symetrii wykresu otrzymanej funkcji.

776. Zbiór A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych należących do przedziału $\langle c; d \rangle$, gdzie $c = \log_{0,1} \binom{5}{2}$ i $d = \log_2 16! - \log_2 15!$. Funkcję $h(x) = ax^2 + b$ tworzymy w następujący sposób: wskazujemy losowo kolejno dwie liczby należące do zbioru A (wskazane liczby mogą być równe). Pierwsza ze wskazanych liczb jest równa współczynnikowi a , zaś druga współczynnikowi b . Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania funkcji, która

- a) przyjmuje tylko dodatnie wartości;
b) ma dwa miejsca zerowe.

777. Wzór funkcji $f(x) = \frac{a}{x} + b$ tworzymy w następujący sposób: ze zbioru $Z = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno dwie liczby (bez zwracania), pierwsza z wylosowanych liczb jest równa współczynnikowi a , zaś druga jest równa współczynnikowi b . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

- a) A – otrzymana funkcja w przedziale $(-\infty; 0)$ jest rosnąca;
b) B – otrzymana funkcja nie ma miejsca zerowego.

zadania z ciągami

778. Ze zbioru miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^3 - 9x$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że z liczb $-4, -2$ i wylosowanej liczby można utworzyć 3-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnych wyrazach.

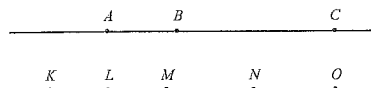
779. Ze zbioru $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ losujemy liczbę a . Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg $(1, 5, a, 6)$ będzie ciągiem geometrycznym?

780. Ze zbioru $Z = \{-6, -\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 4, 6, 18, 48\}$ losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z liczb 3, 12 i wylosowanej liczby można utworzyć 3-wyrazowy ciąg geometryczny o różnych wyrazach?

781. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 a) A – wyniki rzutów utworzą ciąg arytmetyczny,
 b) B – wyniki rzutów utworzą ciąg geometryczny.
782. Dane są zbiory $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Z obu zbiorów losujemy po dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń
 A – wylosowano dokładnie jedną liczbę nieparzystą;
 B – wylosowane liczby są wyrazami pewnego czterowyrazowego ciągu arytmetycznego.
783. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ losujemy pięć liczb i tworzymy z nich rosnący pięciowyrazowy ciąg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy
 a) ciąg arytmetyczny;
 b) ciąg geometryczny;
 c) ciąg, którego pierwszy wyraz jest większy od 6;
 d) ciąg, którego środkowy wyraz jest mniejszy od 5.

zadania z figurami geometrycznymi

784. Spośród 20 różnych punktów leżących na prostej wybieramy losowo dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania punktów sąsiednich.
785. Na dwóch prostych zaznaczono osiem punktów (patrz rys.).



Każdy z punktów A, B, C losowo łączymy odcinkiem z jednym z punktów K, L, M, N, O . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

- a) R – punkty A, B, C zostaną połączone z punktem M ;
 b) E – każdy z punktów A, B, C połączony zostanie z innym punktem;
 c) F – żadne dwa odcinki nie będą miały punktów wspólnych.
786. Ze zbioru wierzchołków dwunastokąta foremnego wybrano losowo dwa różne punkty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że prosta poprowadzona przez wylosowane punkty
 a) R zawiera przekątną wielokąta;
 b) dzieli wielokąt na trójkąt i jedenastokąt.
787. R Wybieramy losowo dwa wierzchołki wielokąta wypukłego W . Prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków, które są końcami jednej przekątnej tego wielokąta jest mniejsze od 0,75, a prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków będących końcami jednego boku jest mniejsze od $\frac{1}{3}$. Ile wierzchołków ma wielokąt W ?
788. Na okręgu zaznaczono sześć różnych punktów. Następnie w sposób losowy poprowadzono trzy różne cięciwy, których końcami są zaznaczone punkty. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania trójkąta, którego wierzchołkami są końce poprowadzonych cięciw.

789. Drewniany sześciąg pomalowano, a następnie pocięto na 64 mniejsze sześciąki jednakowej wielkości. Spośród otrzymanych sześciaków wybrano w sposób losowy jeden. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania sześciaku, który
 a) ma pomalowane trzy ściany;
 b) ma pomalowane dwie ściany;
 c) nie ma pomalowanej żadnej ściany.
790. R Wybrano losowo trzy krawędzie prostopadłościanu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrane odcinki są krawędziami jednej ściany prostopadłościanu.
791. Wybieramy losowo dwa wierzchołki sześciangu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane wierzchołki
 a) są końcami jednej krawędzi sześciangu;
 b) nie należą do jednej ściany.
792. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane wierzchołki sześciangu wyznaczają trójkąt równoboczny.
793. R Spośród wierzchołków sześciangu wybieramy losowo cztery. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie istnieje prostokąt, którego wierzchołkami są wylosowane punkty.

własności prawdopodobieństwa

794. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiemy, że $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Oblicz a) $P(A \cup B)$; b) $P(B \setminus A)$.
795. Wiadomo, że $P(A) = P(A')$, $P(B) = 2 \cdot P(B')$ i $P(A \cap B) = 0,4$. Oblicz $P(A \cup B)$.
796. Oblicz $P(A)$ wiedząc, że $P(A) > P(A')$ i $P(A) \cdot P(A') = 0,16$.
797. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest trzy razy mniejsze niż prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B oraz pięć razy większe niż prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A , jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi 0,55.
798. O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $A \cup B = \Omega$, prawdopodobieństwo zdarzenia A jest o 0,2 większe od prawdopodobieństwa zdarzenia B , a prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B jest równe 0,3. Oblicz $P(A)$ i $P(B')$.
799. O zdarzeniach A i B wiemy, że $P(A) = P(B')$ i $P(A \cup B) = 4 \cdot P(A \cap B)$. Oblicz $P(A \cup B)$.
800. R Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są jednakowo prawdopodobne. Wiedząc, że prawdopodobieństwo zdarzenia $A \setminus B$ jest równe $\frac{1}{4}$, a zdarzenia $A \cup B$ równe jest $\frac{2}{3}$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$.

801. R Zdarzenia A i B są podzbiorem pewnego skończonego zbioru zdarzeń elementarnych. Suma zdarzeń A i B jest zdarzeniem pewnym, a prawdopodobieństwo zdarzenia B jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia przeciwnego do A . Uzasadnij, że iloczyn zdarzeń A i B jest zdarzeniem niemożliwym.
802. R Jednakowo prawdopodobne zdarzenia A i B są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Prawdopodobieństwo tego, że zajdzie zdarzenie A i zdarzenie B jest równe 0,23, a prawdopodobieństwo zajścia co najmniej jednego z nich jest równe 0,51. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zajdzie zdarzenie A i nie zajdzie zdarzenie B .
803. Ustawiając liczby $P(A)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ w odpowiedniej kolejności otrzymamy ciąg arytmetyczny o różnicy 0,5.
a) Wskaż środkowy wyraz tego ciągu.
b) Ile jest równe prawdopodobieństwo zdarzenia B ?
804. Wykaż, że jeżeli liczby $P(A \cap B)$, $P(A)$ i $P(B)$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, to liczba $P(A \cup B)$ jest czwartym wyrazem tego ciągu.
805. Liczby $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \setminus B$.
806. W Zdarzenia A i B są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$ jest równe $\frac{7}{12}$, a prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ równe jest $\frac{1}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cup B$.
807. W O zdarzeniach A , $B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Oblicz $P(A' \cap B')$.
808. Niech A , $B \subset \Omega$. Wiedząc, że $P(A' \cup B') = 0,7$ oraz $P(A' \cap B') = 0,1$, oblicz $P(A) + P(B)$.
809. R Wykaż, że jeśli A , $B \subset \Omega$, $P(A) < \frac{4}{7}$, $P(A \cap B) > \frac{3}{8}$, to $P(A \setminus B) < 0,2$.
810. R Udowodnij, że jeżeli $P(A) = 0,67$ i $P(B) = 0,83$, to $P(A \cap B) \geq 0,5$.

7. STATYSTYKA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

⇒ Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę $\bar{x}$ określoną wzorem $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

ŚREDNIA WAŻONA

⇒ Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami równymi odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ nazywamy liczbę $\bar{x}_w$ określoną wzorem

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

W praktyce często suma wag jest równa 1. Wówczas średnia ważona równa jest $\bar{x}_w = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$.

MEDIANA

⇒ Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będzie zestawem danych liczbowych uporządkowanych niemalejąco, tzn. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Jeśli liczba danych jest nieparzysta, to medianą tego zestawu danych nazywamy środkową liczbę w zestawie. Jeśli liczba danych jest parzysta, to medianą tego zestawu danych nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb w zestawie.

WARIANCJA

⇒ Wariancją zestawu danych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\text{Wariancję możemy obliczać korzystając z równoważnego wzoru } s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2.$$

ODCHYLENIE STANDARDOWE

⇒ Niech s^2 oznacza wariancję pewnego zestawu danych. Odchyleniem standardowym tego zestawu danych nazywamy liczbę s taką, że $s = \sqrt{s^2}$.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający potrafi	- przeprowadzać analizę ilościową przedstawianych danych - obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę zbiorów danych - obliczać wariancję i odchylenie standardowe danej próby
-----------------	--

- 7.1 Oblicz średnią arytmetyczną i wyznacz medianę podanego zestawu danych statystycznych.
a) R 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; b) 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 9, 9; c) R 4, 9, 2, 8, 3, 3, 1, 6, 4, 3, 9, 2.
- 7.2 R Znajdź liczbę a wiedząc, że średnia arytmetyczna zestawu danych 1, 3, 4, 3, 4, a , 7, 2 jest równa 3,75.
- 7.3 Zestaw danych ZD uporządkowano niemalejąco, a następnie wyznaczono medianę M i obliczono średnią arytmetyczną $\bar{x}$. Znajdź liczby a i b , jeżeli
a) R ZD: 2, 5, 5, a , 11, b , $M = 7$, $\bar{x} = 8$; b) ZD: 2, 2, 3, a , b , 8, 8, 9, $M = 4,5$, $\bar{x} = 5,25$.
- 7.4 R Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci jest równa 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek dziadka, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Oblicz, ile lat ma dziadek.

817. W 2000 roku egzamin wstępny na pierwszy rok studiów pewnej Akademii Ekonomicznej składał się z czterech sprawdzianów. Z każdego sprawdzianu można było uzyskać maksymalnie 100 punktów. Ostateczny wynik egzaminu obliczany był jako średnia ważona wyników z poszczególnych sprawdzianów. W poniższej tabeli podano wyniki uzyskane przez Anię i Tomka.

	Matematyka	Geografia	Język angielski	Test wiedzy ekonomicznej
Waga	0,40	0,25	0,20	0,15
Wyniki Ani	50	70	90	90
Wyniki Tomka	90	60	80	50

Sprawdź, która z tych dwóch osób uzyskała lepszy ostateczny wynik z egzaminu.

818. W pierwszym semestrze Jarek i Marek otrzymali następujące oceny: 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 – oceny Jarka, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 – oceny Marka. Oblicz odchylenie standardowe ocen każdego z uczniów.
819. Uczniowie klasy III na lekcjach matematyki otrzymują oceny z prac klasowych, kartkówek i odpowiedzi ustnych. Nauczyciel wystawia ocenę semestralną w następujący sposób: oblicza średnią ocen z prac klasowych, średnią ocen z kartkówek i średnią ocen z odpowiedzi ustnych, następnie oblicza średnią ważoną otrzymanych średnich z wagami równymi odpowiednio 0,5, 0,3, 0,2, a otrzymaną średnią ważoną zaokrągla do jedności. Oblicz, jaką ocenę semestralną wystawi nauczyciel uczniowi, który otrzymał w semestrze następujące oceny: 2, 3, 3, 4 z prac klasowych, 4, 4, 5, 5 z kartkówek i 2, 3, 4 z odpowiedzi.
820. Uczniowie klasy III na lekcjach historii otrzymują oceny z prac klasowych (PK), kartkówek (K) i referatów (R). Nauczyciel historii wystawia uczniowi ocenę semestralną licząc średnią ważoną otrzymanych ocen z następującymi wagami: PK z wagą równą 4, K z wagą 1 i R z wagą 3. Otrzymana średnia ważona zaokrąglana jest do jedności. Ania w semestrze otrzymała oceny: 5, 3, 4 (PK), 3, 3, 1, 2 (K) i 5 (R).
- a) Oblicz średnią arytmetyczną ocen Ani.
b) Jaką ocenę semestralną otrzymała Ania?
821. Każdy z dziesięciu skoczków narciarskich oddał jeden skok. Średnia długość skoku wyniosła 116 m. Najlepszy skoczek z tej grupy osiągnął odległość 134 m. Oblicz średnią długość skoków pozostałych dziewięciu skoczków.
822. W pewnym liceum są dwie klasy trzecie. W klasie IIIA jest o czterech uczniów mniej niż w klasie IIIB. Obie klasy pisały sprawdzian ze statystyki. Średnia ocen uczniów z IIIA wyniosła 4,8, średnia ocen uczniów z IIIB była niższa o 0,3, a średnia ocen wszystkich trzecioklasistów jest równa 4,640 625. Ile uczniów liczy każda z klas?
823. Rolnik 30% zbiorów truskawek sprzedał po 2 zł za kilogram, 50% zbiorów po 1,60 zł za kg i 20% po 1,20 zł za kg. Jaką średnią cenę za kilogram truskawek uzyskał rolnik?
824. Przeprowadzone wśród 160 uczniów badania ankietowe dostarczyły następujących informacji: 20% uczniów nie miało rodzeństwa, 85% miało nie więcej niż jednego brata lub siostrę, a 95% uczniów miało nie więcej niż dwoje rodzeństwa. Wśród badanych uczniów nie było takiego, który miał więcej niż troje rodzeństwa.
- a) Jaki procent badanych uczniów ma dwoje rodzeństwa?
b) Ile było uczniów mających troje rodzeństwa?
c) Ile było uczniów mających przynajmniej jednego brata lub siostrę?
d) Przedstaw za pomocą wykresu słupkowego zależność liczby uczniów od liczby posiadanego rodzeństwa.

825. Z danych GUS wynika, że średnia powierzchnia mieszkania w mieście w 1999 roku wynosiła 56 m², natomiast na wsi 72 m². Wiedząc, że w 1999 roku mieszkańcy na wsi stanowiły 33% wszystkich mieszkań, oblicz średnią powierzchnię ogółu mieszkań w Polsce.
826. Powierzchnia województwa mazowieckiego jest o 82,56% większa od średniej powierzchni województw w naszym kraju. Oblicz powierzchnię województwa mazowieckiego przyjmując, że powierzchnia Polski wynosi 312 tys. km². Wynik podaj w tys. km² i zaokrąglij do części dziesiętnych.
827. Do punktu skupu dostarczono 70 sztuk bydła o średniej wadze 350,5 kg oraz 92 tuczniaki o średniej wadze 130 kg. Do przewozu zwierząt podstawiono 8 wagonów kolejowych o ładowności 4 tony każdy.
- a) Uzasadnij, że liczba przygotowanych wagonów nie wystarczy do transportu wszystkich zwierząt.
b) Ile potrzeba 4 tonowych wagonów do przewozu tych zwierząt?

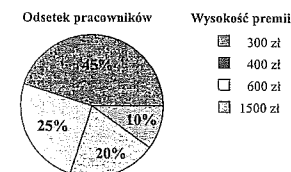
828. Na świadectwie Oli znalazło się dwanaście ocen, przy czym każda ocena to „trójka” lub „czwórka”. Ile czwórek otrzymała na koniec roku szkolnego Ola, jeżeli wariancja jej ocen wynosi $\frac{3}{16}$?

829. W tabeli zamieszczone są informacje dotyczące trzech graniczących ze sobą wsi.

Wies	Średnia wielkość gospodarstwa (w ha)	Liczba gospodarstw
Brzozowiec	2,4	35
Lubotka	6,0	120
Miękinki	3,6	75

- a) Oblicz, ile wynosi łączna powierzchnia gospodarstw w każdej wsi.
b) Planowano połączenie wymienionych wsi w jedną wieś. Jaka byłaby wówczas średnia powierzchnia gospodarstwa w tej wsi?

830. W pewnej firmie w grudniu każdy pracownik otrzymał premię. Na wykresie pokazany jest rozkład przyznanych premii.



- a) Oblicz średnią wysokość premii.
b) Wiedząc, że łączna wartość najwyższych premii była równa 9000 zł, oblicz liczbę osób zatrudnionych w tej firmie oraz łączną kwotę pieniędzy przeznaczonych na wypłatę premii.

831. Przedsiębiorstwo zatrudnia: 5 dyrektorów zarabiających po 6000 zł, 50 pracowników administracyjnych, których średnia płaca wynosi 1500 zł i 145 pracowników produkcyjnych o średniej płacy 1200 zł.
- a) Jaka jest średnia płaca w tym przedsiębiorstwie?
b) Czy można obliczyć, ile pracowników zarabia poniżej średniej płacy? Jeśli tak, to oblicz, ile jest takich pracowników.
c) Ile powinna wynosić średnia płaca w grupie pracowników produkcyjnych, aby średnia płaca w całym przedsiębiorstwie była równa 1540 zł.

832. Pięćdziesięciu klientów pewnego sklepu poproszono o dokonanie oceny jakości dwóch gatunków herbaty przez wskazanie jednego z określeń: *zła*, *przeciętna*, *dobra*, *bardzo dobra*. Wyniki przedstawione są w tabeli. Przyjmując następujące oceny liczbowe jakości herbaty: *zła* = 0, *przeciętna* = 1, *dobra* = 2, *bardzo dobra* = 3, wykorzystaj średnią arytmetyczną jako miarę jakości i zbadaj, który gatunek herbaty cieszył się lepszą opinią wśród badanych klientów.

Ocena jakości herbaty	Liczba klientów	
	gatunek A	gatunek B
<i>zła</i>	1	4
<i>przeciętna</i>	7	12
<i>dobra</i>	24	14
<i>bardzo dobra</i>	18	20

833. W tabeli podano wybrane informacje dotyczące liczby dzieci w rodzinach, uzyskane w wyniku przeprowadzonego w 2002 roku Narodowego Spisu Powszechnego.

Wyszczególnienie	Liczba dzieci w wieku 0–24 lat				Rodziny bez dzieci
	1	2	3	4 i więcej	
Miasta (rodziny w tys.)	2 071	1 538	403	129	2 456
Wieś (odsetek rodzin)	23,1%	23,4%	11,1%	6,4%	36,0%

Źródło: GUS, Narodowy Spis Powszechny 2002

Uwzględniając rodziny bez dzieci, oblicz średnią arytmetyczną liczby dzieci

- a) w rodzinach mieszkających w miastach;
b) w rodzinach mieszkających na wsi.

W przypadku rodzin z 4 i większą liczbą dzieci przyjmij do obliczeń, że w rodzinach tych jest dokładnie 4 dzieci. Wyniki zaokrąglj do pierwszego miejsca po przecinku.

834. Firma zatrudnia 2 razy więcej pracowników na stanowiskach produkcyjnych niż na stanowiskach administracyjnych. W miesiącu maju średnia płaca w tej firmie wynosiła 1500 zł, przy czym średnia płaca w grupie pracowników produkcyjnych była równa 1400 zł. Oblicz jaka była średnia płaca, w danym miesiącu, w grupie pracowników administracyjnych.

835. W pewnej klasie średnia wzrostu dziewcząt jest równa 168 cm, średnia wzrostu chłopców 176 cm, a średnia wzrostu wszystkich uczniów 174 cm. Uzasadnij, że w tej klasie uczy się trzy razy więcej chłopców niż dziewcząt.

836. Obszar pewnej gminy podzielony jest na trzy regiony. W tabeli podano dane dotyczące powierzchni zasiewów oraz plonów pszenicy w poszczególnych regionach. Wysokość plonów wyrażona jest w kwintalach na hektar (q/ha).

Wyszczególnienie	Region I	Region II	Region III
Powierzchnia zasiewów (w ha)	600	1500	900
Wysokość plonów (w q/ha)	35	45	40

Oblicz średnią wysokość plonów pszenicy w tej gminie.

837. Z ankiety przeprowadzonej wśród 10 osób wynika, że: 1 osoba pracuje nie więcej niż 4 lata, 6 osób pracuje nie więcej niż 8 lat, a każda z ankietowanych osób pracuje nie więcej niż 12 lat. Wyznaczmy przybliżoną wartość średniej lat pracy tych osób w następujący sposób:

- dane przedstawiamy w tabeli;
- przyjmujemy następujące założenie: liczba lat pracy jest równa liczbie będącej środkiem odpowiedniego przedziału, tzn. zakładamy, że 1 osoba przepracowała 2 lata, 5 osób przepracowało 6 lat, a 4 osoby przepracowały 10 lat;

Lata pracy	Środek przedziału	Liczba osób
(0; 4)	2	1
(4; 8)	6	5
(8; 12)	10	4

- obliczamy średnią lat pracy za pomocą formuły ważonej: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 10}{10} = 7$ lat.

Zapytano 20 osób o ich wiek i uzyskano od nich następujące informacje: 2 osoby mają mniej niż 16 lat, 8 osób ma mniej niż 20 lat, a 17 osób ma mniej niż 24 lata. Dodatkowo ustalono, że najmłodsza osoba w grupie ma przynajmniej 12 lat, a najstarsza mniej niż 28 lat. Wykorzystując podaną wyżej metodę, oblicz przybliżoną wartość średniej wieku pytanych osób.

838. W tabeli przedstawiono wyniki ankiety dotyczące czasu dojazdu uczniów do szkoły, przeprowadzonej w pewnym dniu w jednym z liceów.

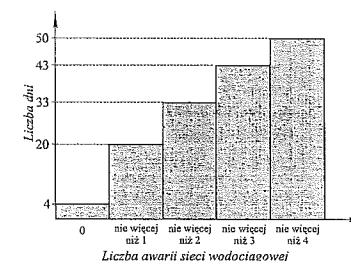
Czas dojazdu do szkoły	Odsetek liczby uczniów
nie więcej niż 15 min	27%
nie więcej niż 30 min	64%
nie więcej niż 45 min	83%
nie więcej niż 60 min	83%
nie więcej niż 75 min	100%

- a) Jaki procent uczniów potrzebuje na dojazd więcej niż 45 min?
b) Jaki procent uczniów potrzebuje na dojazd więcej niż 30 min, ale nie więcej niż 60 min?
c) Odsetek liczby uczniów w dwóch wierszach tabeli jest taki sam. Wyjaśnij, co to oznacza.
d) Z analizy zebranych ankiet wynika, że 222 uczniów potrzebuje na dojazd do szkoły więcej niż 15 min, ale nie więcej niż 30 min. Ilu uczniów wzięło udział w badaniach?
e) Ilu uczniów uczęszcza do tej szkoły, jeśli wiadomo, że w dniu w którym przeprowadzono ankietę nie przyszło do szkoły 4% uczniów?

839. Za pomocą wykresu przedstawiono dane o liczbie dziennych awarii sieci wodociągowej, które miały miejsce w ciągu 50 kolejnych dni na obszarze pewnego miasta.

- a) Uzupełnij poniższą tabelę.

Dzienna liczba awarii	Liczba dni
0	
1	
2	
3	
4	



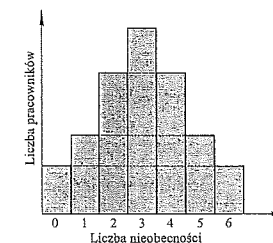
- b) Wyniki otrzymane w tabeli zilustruj za pomocą wykresu słupkowego.
c) Oblicz średnią i odchylenie standardowe odnotowanych liczby awarii.

840. W jednej ze stacji meteorologicznych w kwietniu zaobserwowano ciekawe zmiany temperatury powietrza. Każdego dnia w południe dokonywano pomiaru temperatury powietrza i okazało się, że średnia dwóch pierwszych pomiarów była równa 12°C, średnia trzech pierwszych pomiarów wynosiła 12,25°C, a każda następna średnia temperatura, liczona zawsze od początku miesiąca, była większa od poprzedniej o dokładnie 0,25°C.

- a) Oblicz, jaka była średnia temperatura w kwietniu (mierzona w południe).
b) Oblicz, jaką temperaturę odnotowano w południe 30 kwietnia.

841. Na wykresie obok zamieszczono dane dotyczące liczby dni nieobecności w pracy pracowników pewnej firmy w miesiącu styczniu. Na osi pionowej nie zaznaczono wartości liczbowych.

- a) Jaka była średnia liczba dni nieobecności pracowników w miesiącu styczniu?
b) Oblicz, ilu pracowników zatrudnia ta firma, jeżeli łączna liczba dni nieobecności w pracy w styczniu była równa 243.



8. ZADANIA ZAMKNIĘTE

Od roku 2010 arkusz egzaminacyjny z matematyki dla poziomu podstawowego oprócz zadań otwartych zawiera 20–30 zadań zamkniętych (w arkuszu dla poziomu rozszerzonego nie ma zadań zamkniętych). Do każdego z tych zadań podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Za wskazanie poprawnej odpowiedzi zdający otrzymuje 1 punkt.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI ALGEBRAICZNE

842. Zbiorem rozwiązań nierówności $(1-\sqrt{2})x < \sqrt{2}-1$ jest przedział
a) $(-\infty; -1)$; b) $(-\infty; 1)$; c) $(-1; +\infty)$; d) $(1; +\infty)$.
843. Równanie $x^2+4=(x-2)^2+4x$
a) nie ma rozwiązań; b) ma tylko jedno rozwiązanie;
c) spełnia każda liczba rzeczywista; d) ma dokładnie dwa rozwiązania.
844. Równanie $\pi^2+(x+1)\pi+x=0$
a) ma dwa rozwiązania; b) nie ma rozwiązań;
c) ma jedno rozwiązanie ujemne; d) ma jedno rozwiązanie dodatnie.
845. Liczba $a=\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ jest pierwiastkiem równania $3x^2+5x+1=0$. Zatem
a) $3a^2+5a+1>0$; b) $3a^2+5a+1<0$; c) $3a^2+5a+1\leq 0$; d) $3a^2+5a>0$.
846. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2-4x+6>0$. Zatem
a) $A=(-4; 6)$; b) $A=\mathbb{R}$; c) $A=\emptyset$; d) $A=(-8; +\infty)$.
847. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2\leq 9x$ jest przedział
a) $\langle 0; 9 \rangle$; b) $\langle -3; 3 \rangle$; c) $\langle -3; 0 \rangle$; d) $(-\infty; 9)$.
848. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2+9>6x$. Zatem
a) $A=\langle 0; +\infty \rangle$; b) $A=(3; +\infty)$; c) $A=(3; +\infty)$; d) $A=(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
849. Liczba ujemnych pierwiastków równania $(x-4)(2x+3)(4x+5)((x^2-25)=0$ jest równa
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.
850. Liczba niewymiernych pierwiastków równania $(x^4-4)(x^2+4x+1)=0$ jest równa
a) 0; b) 2; c) 3; d) 4.
851. Liczba rozwiązań równania $\frac{x^2+3x+2}{x+2}=0$ jest równa
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

121

LICZBY RZECZYWISTE

852. Dany jest zbiór $A=\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 2\frac{3}{7}, \sqrt[3]{\frac{5}{9}}, \pi\}$. Ile liczb należących do zbioru A ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe?
a) dwie; b) trzy; c) cztery; d) pięć.
853. Iloraz liczb 7560 i 8820 jest równy
a) $\frac{601}{701}$; b) $\frac{61}{71}$; c) $\frac{52}{61}$; d) $\frac{6}{7}$.
854. Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{32}+\sqrt{50}$ jest równa
a) $8\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{2}$; c) $\sqrt{84}$; d) $\sqrt{200}$.
855. Liczba $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$ jest równa
a) $\frac{-\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{11}}{2}$.
856. Która nierówność opisuje przedział $(2; 10)$?
a) $|x-7|<3$; b) $|x-5|<5$; c) $|x-6|<4$; d) $|x-7|<5$.
857. Oprocentowanie kredytu hipotecznego w pewnym banku, które dotychczas wynosiło 8%, wzrosło o 2 punkty procentowe. Zatem oprocentowanie tego kredytu wzrosło
a) o 2%; b) o 10%; c) o 20%; d) o 25%.
858. W głosowaniu nad ustawą wzięło udział 352 posłów. Za przyjęciem ustawy było 62,5% biorących udział w głosowaniu parlamentarzystów. Zatem za przyjęciem ustawy głosowało
a) 180 posłów; b) 220 posłów; c) 240 posłów; d) 270 posłów.
859. W minionym roku w pewnym liceum 85% maturzystów nie zdawało matury z biologii. Na maturze biologię zdawało 27 osób. Wobec tego w minionym roku maturę w tej szkole zdawało
a) mniej niż sto osób; b) 150 osób; c) 180 osób; d) więcej niż 240 osób.
860. W pierwszej części zbioru maturalnego zamieszczono 700 zadań, a w drugiej 840 zadań. Liczba zadań w drugiej części jest większa od liczby zadań w pierwszej części o
a) 15%; b) 20%; c) 40%; d) 120%.
861. Liczba $|2-\pi|$ jest równa
a) $2+\pi$; b) $2-\pi$; c) $\pi-2$; d) 1,14.
- ### FUNKCJE
862. Funkcja $g(x)=x^2+6x+9$ dla argumentu $x=\sqrt{2}$ przyjmuje wartość
a) $(\sqrt{2}+3)^2$; b) $9+8\sqrt{2}$; c) $17\sqrt{2}$; d) 11.
863. Funkcje $g(x)=x^{10}+x^5+2x+3$ i $h(x)=x^{10}+x^5-2x-7$ dla argumentu a przyjmują tę samą wartość. Zatem
a) $a=-0,5$; b) $a=-1,5$; c) $a=-2,5$; d) $a=-3,5$.

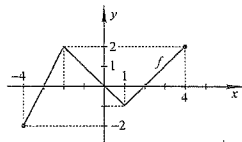
864. Dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x}$ jest zbiór
 a) $D = (-\infty; 4)$; b) $D = (2; 4)$; c) $D = (-\infty; 2)$; d) $D = (0; +\infty)$.

865. Do wykresu funkcji $g(x) = \frac{x+3}{x-3}$ należy punkt

- a) $A = (3, 0)$; b) $B = (0, -3)$; c) $C = (0, -1)$; d) $D = (0, 3)$.

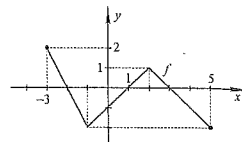
866. Obok zamieszczono wykres funkcji f . Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór

- a) $A = \{-2; 2\}$; b) $B = \{-4; 4\}$;
 c) $C = \{-2; 2\}$; d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



867. Dziedzina funkcji f jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$. Obok zamieszczono wykres tej funkcji. Funkcja f jest malejąca w zbiorze

- a) $A = \langle -2; 1 \rangle$; b) $B = \langle 2; 5 \rangle$;
 c) $C = \langle -2; 2 \rangle$; d) $D = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$.



868. Przesuwając wykres funkcji g wzdłuż osi OX o 5 jednostek w prawo, otrzymano wykres funkcji f . Zatem funkcja f określona jest wzorem

- a) $f(x) = g(x-5)$; b) $f(x) = g(x+5)$; c) $f(x) = g(x)-5$; d) $f(x) = g(x+5)$.

869. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x \geq 2 \\ x^2-4 & \text{dla } x < 2 \end{cases}$ jest liczba

- a) 2; b) 1; c) 0; d) -2.

870. Liczba -1 jest miejscem zerowym funkcji $g(x) = x^3 + mx^2 + x + 2010$. Zatem

- a) $m = -2010$; b) $m = -2008$; c) $m = 0$; d) $m = 2010$.

871. Punkt $A = (-1; 2011)$ należy do wykresu funkcji $h(x) = x^3 + mx^2 + x + 2010$. Zatem

- a) $m = 0$; b) $m = 1$; c) $m = 2$; d) $m = 3$.

FUNKCJA LINIOWA

872. Wykresem funkcji $g(x) = 2x - 5$ jest prosta równoległa do wykresu funkcji

- a) $h(x) = -2x - 5$; b) $h(x) = 2x + 7$; c) $h(x) = -0,5x + 5$; d) $h(x) = 0,5x - 7$.

873. Wykres funkcji $h(x) = \sqrt{3}x + 1$ tworzy z osią OX kąt rozwarty o mierze

- a) mniejszej niż 120° ; b) 120° ; c) 150° ; d) większej niż 150° .

874. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(x - \sqrt{6})$ jest

- a) 1; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{6}$.

875. Funkcja $g(x) = (a-3)x + 3$ nie ma miejsc zerowych. Wobec tego liczba a jest równa

- a) -3; b) 0; c) 3; d) 6.

876. Wskaż funkcję, której wykres przecina prostą o równaniu $y = 3$ w punkcie o dodatnich współrzędnych.
 a) $h(x) = -0,5x + 2$; b) $h(x) = 0,5x + 4$; c) $h(x) = -2x + 5$; d) $h(x) = 2x + 3$.

FUNKCJA KWADRATOWA

877. Suma odległości wierzchołka paraboli o równaniu $y = (x-5)^2 - 3$ od osi układu współrzędnych jest równa
 a) 2; b) 3; c) 5; d) 8.

878. Wskaż funkcję, która nie przyjmuje wartości ujemnych.

- a) $f(x) = (x+2)^2 - 2$; b) $g(x) = 2(x-3)^2 - 1$;
 c) $h(x) = -3(x-2)^2 + 2$; d) $k(x) = 4(x-1)^2 + 1$.

879. Wskaż funkcję, która w przedziale $(-\infty; 2)$ jest malejąca.

- a) $f(x) = (x+2)^2$; b) $g(x) = 2(x-3)^2$; c) $h(x) = -3(x-2)^2$; d) $k(x) = 4(x-1)^2$.

880. Wskaż postać iloczynową trójmianu $y = 3x^2 + 3x - 6$.

- a) $y = (x+1)(x-2)$; b) $y = (x-1)(x+2)$;
 c) $y = 3(x-1)(x+2)$; d) $y = 3(x+1)(x-2)$.

881. Zbiór A jest zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja $f(x) = -2(x-5)(x+3)$ przyjmuje wartości nieujemne. Zatem

- a) $A = \langle -3; 5 \rangle$; b) $A = \langle 5; +\infty \rangle$; c) $A = \langle -3; 5 \rangle$; d) $A = (-\infty; -3) \cup \langle 5; +\infty \rangle$.

882. Ośią symetrii wykresu funkcji $g(x) = -2x^2 + 20x + 5$ jest prosta o równaniu

- a) $y = 5$; b) $x = 5$; c) $y = -5$; d) $x = -5$.

883. Funkcja $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ nie przyjmuje wartości

- a) 0,5; b) $\sqrt{2}$; c) 3,5; d) 100.

884. Liczba punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 7$ z osiami układu współrzędnych jest równa

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

885. Wykres funkcji $g(x) = x^2 - 100$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu

- a) $y = 100$; b) $x = 100$; c) $y = 100x$; d) $y = -100x$.

886. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 4x^2 + 8x + c$ jest przedział $\langle 0; +\infty \rangle$. Zatem współczynnik c należy do zbioru

- a) $A = (-\infty; 0)$; b) $B = \{0\}$; c) $C = \langle 0; 4 \rangle$; d) $D = \langle 4; +\infty \rangle$.

WIELOMIANY

887. Wielomian $W(x)$ jest sumą wielomianów $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ i $Q(x) = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$. Wobec tego, $W(x)$ jest wielomianem stopnia

- a) szesnastego; b) ósmego; c) czwartego; d) trzeciego.

888. Wielomian $W(x)$ jest iloczynem wielomianów $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ i $Q(x) = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$. Wobec tego, $W(x)$ jest wielomianem stopnia
a) szesnastego; b) ósmego; c) czwartego; d) trzeciego.
889. Wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ i $P(x) = x^3 + (a+b)x^2 + bx + 4$ są równe. Zatem
a) $a = -5$ i $b = 3$; b) $a = -1$ i $b = 3$; c) $a = 1$ i $b = -5$; d) $a = 1$ i $b = -3$.
890. Liczba pierwiastków wielomianu $W(x) = (x^2 + 16)(x^2 - 2x + 2)$ jest równa
a) 0; b) 1; c) 2; d) 4.
891. Liczba pierwiastków wielomianu $Q(x) = x^3 - 100x$, które są liczbami parzystymi, jest równa
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA

892. Wskaż zbiór, który jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$.
a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $(0; +\infty)$.
893. Wskaż zbiór, w którym funkcja $f(x) = \frac{-3}{x}$ jest rosnąca.
a) $(-\infty; 3)$; b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; d) $(3; +\infty)$.
894. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt $P = (2010, 2011)$. Zatem funkcja f
a) nie przyjmuje wartości ujemnych; b) jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$;
c) jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.
895. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{6}{x}$. Zbiór A jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych c takich, że $f(c)$ jest liczbą całkowitą. Zatem A jest zbiorem
a) dwuelementowym; b) czteroelementowym;
c) sześciuelementowym; d) ośmioelementowym.
896. Wykres funkcji $f(x) = -\frac{5}{x}$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu
a) $y = -5x$; b) $y = -5$; c) $x = -5$; d) $y = 5x$.

FUNKCJA WYKŁADNICZA

897. Liczba $5^{30} \cdot 125^{20}$ jest równa
a) 5^{90} ; b) 5^{50} ; c) 5^{1800} ; d) 5^{53} .
898. Liczba $3^5 \cdot 27^{15} \cdot 81^{25}$ jest równa
a) 9^{150} ; b) 9^{105} ; c) 9^{75} ; d) 9^{45} .
899. Liczba $7^{16} + 7^{18}$ jest podzielna przez
a) 10; b) 9; c) 8; d) 6.

900. Liczba 8^9 jest większa od liczby 32^5
a) o 100%; b) o 200%; c) o 300%; d) o 400%.
901. Liczba $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{7}$ jest równa
a) $\sqrt[3]{7}$; b) $\sqrt[3]{7}$; c) $(\sqrt[3]{7})^5$; d) $\sqrt[3]{49}$.
902. Liczba $\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$ jest równa
a) $\sqrt[3]{6}$; b) $\sqrt[3]{6}$; c) $\sqrt[3]{6}$; d) $12\sqrt[3]{6}$.
903. Funkcja $f(x) = 8^x$ dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość
a) 4; b) 2; c) 0,5; d) 0,25.
904. Funkcja $f(x) = 2^x$ nie przyjmuje wartości
a) 2010; b) $\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{2}$; d) $5^{-5\sqrt{3}}$.
905. Funkcją malejącą jest funkcja
a) $f(x) = -(0,5)^x$; b) $g(x) = (0,5)^{-x}$; c) $h(x) = (0,5)^{x+2}$; d) $k(x) = 2^x - 2$.
906. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 3^x$. Funkcja $g(x) = f(x) + 3$ z prostą o równaniu $y = 3$
a) nie ma punktów wspólnych; b) ma jeden punkt wspólny;
c) ma dwa punkty wspólne; d) ma nieskończenie wiele punktów wspólnych.

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

907. Wyrażenie $\log_c(4 - c)$ ma sens liczbowy dla każdej liczby c należącej do zbioru
a) $(0; 1) \cup (1; 4)$; b) $(0; +\infty)$; c) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; d) $(-\infty; 4)$.
908. Wiadomo, że $\log_{32} c = 0,4$. Zatem liczba c jest
a) wymierna; b) niewymierna; c) mniejsza od 4; d) większa od 4.
909. Liczba $\log_2(\log_{25} 5)$ jest równa
a) -2; b) -1; c) 1; d) 2.
910. Rozwiązaniem równania $(2x - 1)(x + 2)x(x^2 + 9) = 0$ nie jest liczba
a) $\log_7 1$; b) $\log_3 \sqrt{3}$; c) $\log_{0,5} 8$; d) $\log_{0,5} 4$.
911. Która z liczb nie jest liczbą całkowitą?
a) $\log_{12} 18 + \log_{12} 8$; b) $\log_5 100 - \log_5 4$; c) $\log_4 32$; d) $\log_2 0,125$.
912. Liczba $\frac{\log_6 27}{\log_6 9}$ jest równa
a) 6; b) 3; c) 2; d) 1,5.

913. Liczba $\log_3 72 - 3\log_3 2$ jest równa
a) $\log_3 12$; b) $\log_3 64$; c) $\log_2 4$; d) $\log_3 66$.
914. Liczba $\log 50$ jest równa
a) $\log 20 + \log 30$; b) $(\log 5)^2 + \log 2$; c) $1 + \log 5$; d) $\log 25 \cdot \log 2$.
915. Liczba $\log_3 1000$ jest mniejsza od liczby $\log_3 10\,000$
a) o 90%; b) o 50%; c) o 25%; d) o 10%.
916. Liczba $\log^2 500 - \log^2 2$ jest równa
a) $2\log 250$; b) $3\log 250$; c) $\log^2 125$; d) $\log^2 250$.

TRYGONOMETRIA

917. Sinus kąta ostrego α jest równy 0,2. Kosinus kąta α jest równy
a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{24}{25}$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; d) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
918. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 1 i 7. Sinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy
a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{5}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; d) $\frac{7}{\sqrt{50}}$.
919. Liczba $\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ$ jest
a) niewymierna; b) wymierna; c) mniejsza od 0,9; d) większa od 1,1.
920. Prosta o równaniu $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ jest nachylona do osi OX pod kątem α . Zatem
a) $\alpha < 30^\circ$; b) $\alpha = 30^\circ$; c) $\alpha = 60^\circ$; d) $\alpha > 60^\circ$.
921. Liczba $\cos^3 89^\circ + \sin^2 89^\circ \cdot \cos 89^\circ$ jest równa
a) $\sin 89^\circ$; b) $\cos 89^\circ$; c) $\lg 89^\circ$; d) $\sin 89^\circ \cdot \cos 89^\circ$.

CIĄGI

922. Który wyraz ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5n+8}{2n-1}$ jest równy 3?
a) siódmy; b) dziewiąty; c) jedenasty; d) trzynasty.
923. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 100$. Liczba ujemnych wyrazów ciągu (a_n) jest równa
a) 9; b) 10; c) 20; d) 21.
924. Czwarty wyraz ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 2\log_3(5n-2) - \log_3(n+8)$ jest równy
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.
925. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n = n^2 + 2n + 1$. Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy
a) 4; b) 9; c) 16; d) 25.

926. Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5-4n}{2}$ jest równa
a) -4; b) -2; c) $\frac{5}{2}$; d) 5.
927. Suma pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{2}{3}n + 3$ jest równa
a) 100; b) 300; c) 500; d) 1000.
928. Ciąg $(\log_7 98, k, \log_7 0,5)$ jest arytmetyczny. Wobec tego
a) $k = 1$; b) $k = 2$; c) $k = 3$; d) $k = 4$.
929. Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5^{2n-1}}{2}$ jest równy
a) 5^{-1} ; b) $\frac{5}{2}$; c) 5; d) 25.
930. Pierwszy wyraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy -100, a iloraz tego ciągu należy do zbioru $\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\}$. Wobec tego iloraz ciągu (a_n) jest równy
a) -3; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 3.
931. Ciąg $(\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, p)$ jest geometryczny. Wobec tego
a) $p = \sin 60^\circ$; b) $p = \lg 30^\circ$; c) $p = \lg 45^\circ$; d) $p = \lg 60^\circ$.

PLANIMETRIA

932. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 40° . Wysokość tego trójkąta poprowadzona do ramienia tworzy z podstawą kąt o mierze
a) 20° ; b) 40° ; c) 50° ; d) 70° .
933. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ma długość 3. Zatem bok tego trójkąta ma długość
a) $4\frac{1}{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $3\sqrt{3}$; d) 6.
934. Liczby $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$ są długościami boków trójkąta ABC . Trójkątem podobnym do trójkąta ABC jest trójkąt o bokach długości
a) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$; b) 5, 6, 7; c) 25, 36, 49; d) 50, 72, 98.
935. Środek S okręgu opisanego na trójkącie ABC należy do boku BC . Suma miar kątów ABC i BCA trójkąta ABC jest równa
a) 45° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 120° .
936. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 3 i dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden ma długość 1. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość
a) 7; b) 9; c) 10; d) 12.
937. Stosunek miar kątów czworokąta jest równy $1:2:3:4$. Zatem największy kąt tego wielokąta ma miarę
a) 112° ; b) 120° ; c) 144° ; d) 160° .

938. Kwadrat i trójkąt równoboczny mają równe pola. Stosunek długości boku kwadratu do długości boku trójkąta jest wtedy równy
 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
939. Bok rombu tworzy z krótszą przekątną kąt o mierze 50° . Kąt ostry tego rombu ma miarę
 a) 40° ; b) 50° ; c) 60° ; d) 80° .
940. Stosunek długości ramion trapezu prostokątnego jest równy $2:1$. Miara kąta rozwartego tego trapezu jest
 a) mniejsza od 120° ; b) równa 120° ; c) równa 150° ; d) większa od 150° .
941. Cięciwa okręgu o promieniu 41 cm ma długość 80 cm. Odległość środka okręgu od tej cięciwy wynosi
 a) 5 cm; b) 9 cm; c) 12 cm; d) 15 cm.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

942. Punkty $A=(-1, 6)$ i $C=(4, 1)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe
 a) 12,5; b) 25; c) 50; d) 100.
943. Punkty $A=(-1, 6)$ i $B=(5, -2)$ są końcami podstawy trójkąta równoramiennego ABC . Prosta zawierająca wysokość CD tego trójkąta przecina prostą AB w punkcie o współrzędnych
 a) $(3, -4)$; b) $(-3, 4)$; c) $(2, 2)$; d) $(2, -4)$.
944. Punkt $D=(1, 1)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$. Prosta o równaniu $y=6x-7$ zawiera podstawę AB . Podstawa CD zawiera się w prostej o równaniu
 a) $y=7x-6$; b) $y=-6x+7$; c) $y=6x-5$; d) $y=6x-7$.
945. Punkt $A=(0, 0)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$. Prosta o równaniu $y=6x-7$ zawiera przekątną BC . Przekątna AC zawiera się w prostej o równaniu
 a) $y=6x$; b) $y+6x=0$; c) $x-6y=0$; d) $x+6y=0$.
946. Punkty $A=(-1, 6)$ i $C=(5, 4)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Środkiem okręgu wpisanego w romb $ABCD$ jest punkt
 a) $O=(3, 1)$; b) $O=(-3, -1)$; c) $O=(2, 5)$; d) $O=(5, 2)$.
947. Środkiem okręgu o równaniu $x^2+y^2-10x+y=0$ jest punkt
 a) $S=(5, -1)$; b) $S=(5, -0,5)$; c) $S=(-5, 0,5)$; d) $S=(-5, 1)$.
948. Punkt $A=(1, 1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABC . Punkt $S=(5, 1)$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wskaż równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
 a) $(x-5)^2+(y-1)^2=4$; b) $(x-5)^2+(y-1)^2=16$;
 c) $(x+5)^2+(y+1)^2=4$; d) $(x-5)^2+(y-1)^2=2$.
949. Okrąg o równaniu $x^2+y^2-16x+y=0$ przecina oś OX w punktach
 a) $A=(0, 0)$ i $B=(0, 1)$; b) $C=(0, 0)$ i $D=(0, -1)$;
 c) $E=(-4, 0)$ i $F=(4, 0)$; d) $G=(0, 0)$ i $H=(16, 0)$.

950. Prosta k jest styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2-6x-16=0$. Odległość środka tego okręgu od prostej k jest równa
 a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.
951. Wskaż równanie prostej, która zawiera średnicę okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y+1)^2=5$.
 a) $y=x+1$; b) $y=x-1$; c) $y=2x$; d) $y=-2x$.

STEREOMETRIA

952. Ostrosłup, który ma 12 krawędzi, ma
 a) 6 ścian; b) 7 ścian; c) 8 ścian; d) 9 ścian.
953. Graniastosłup, który ma 22 ściany, ma
 a) 20 wierzchołków; b) 22 wierzchołki;
 c) 40 wierzchołków; d) 42 wierzchołki.
954. Istnieje graniastosłup, który ma
 a) 50 krawędzi; b) 51 krawędzi;
 c) 52 krawędzi; d) 53 krawędzi.
955. Przekątna ściany sześciangu ma długość 6. Przekątna tego sześciangu ma długość
 a) $2\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $3\sqrt{6}$; d) $4\sqrt{6}$.
956. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{6}$. Przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 60° . Wysokość tego graniastosłupa ma długość
 a) 3; b) $2\sqrt{3}$; c) $3\sqrt{2}$; d) 6.
957. Długość wysokości walca jest równa długości promienia jego podstawy. Jeśli P oznacza sumę pól podstaw tego walca, zaś B pole jego powierzchni bocznej, to
 a) $P=B$; b) $P=2B$; c) $2P=B$; d) $P=4B$.
958. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 6. Objętość tego stożka jest równa
 a) π ; b) 3π ; c) 9π ; d) 27π .
959. Stosunek pól powierzchni dwóch kul jest równy $1:4$. Wobec tego stosunek objętości tych kul jest równy
 a) $1:2$; b) $1:4$; c) $1:8$; d) $1:16$.
960. Po rozwinięciu powierzchni bocznej walca na płaszczyźnie otrzymano kwadrat o boku 4π . Objętość tego walca jest równa
 a) 4π ; b) $4\pi^2$; c) 16π ; d) $16\pi^2$.
961. Po rozwinięciu powierzchni bocznej stożka na płaszczyźnie otrzymano jedną czwartą koła o promieniu 8. Promień podstawy tego stożka ma długość
 a) 1; b) 2; c) 4; d) 8.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

962. Liczba punktów, których odcięta należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a rzędna do zbioru $\{50, 51, 52, 53\}$, jest równa
a) $6+4$; b) $6 \cdot 4$; c) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$; d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.
963. Liczb naturalnych dwucyfrowych o różnych cyfrach, większych od 36 jest
a) 21; b) 54; c) 57; d) 63.
964. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej jest równe
a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{5}{8}$.
965. W pudełku znajdują się tylko kule białe i czerwone. Stosunek liczby kul białych do liczby kul czerwonych jest równy $2:3$. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest równe
a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$.
966. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz liczby oczek podzielnej przez 3 jest równe
a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{9}$; c) $\frac{4}{9}$; d) $\frac{5}{9}$.
967. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest 7 razy mniejsze niż prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A . Wobec tego prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe
a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{7}{8}$.
968. Zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, a prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ jest równe 0,25. Wobec tego suma prawdopodobieństw zdarzeń A i B jest równa
a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{4}{3}$; c) 1; d) $\frac{5}{4}$.
969. Zdarzenia A i B są podziorami zbioru zdarzeń elementarnych Ω . Wiadomo, że $P(A \cup B) + P(A \cap B) = 2$. Zatem
a) $P(A) \in (0; 1)$; b) $P(A \cap B) \in (0; 1)$; c) $P(A \setminus B) \in (0; 1)$; d) $P(B) \in (0; 1)$.
970. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{1}{6}$, a prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B jest równe $\frac{2}{3}$. Wobec tego prawdopodobieństwo zdarzenia $B \setminus A$ jest równe
a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{5}{6}$.
971. Z grupy dzieci wybieramy losowo dwoje. Prawdopodobieństwo wybrania co najmniej jednej dziewczynki jest równe $\frac{14}{15}$, a prawdopodobieństwo wybrania co najwyżej jednej dziewczynki jest równe $\frac{8}{15}$. Wobec tego prawdopodobieństwo wybrania dwóch dziewczynek jest równe
a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{6}{15}$; c) $\frac{7}{15}$; d) $\frac{11}{15}$.

9. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA

ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI I ROZWIĄZANIA DO ZADAŃ WPROWADZAJĄCYCH

CIĄGI

- 1.1 a) $a_1=17, a_2=7, a_3=5$; b) $a_1=1, a_2=16, a_3=49$; c) $a_1=0, a_2=0, a_3=0$; d) $a_1=-1, a_2=2, a_3=-3$; e) $a_1=0,5, a_2=1, a_3=2$; f) $a_1=1, a_2=5, a_3=14$.

Rozwiązanie. a) $a_1 = \frac{4+1+13}{2 \cdot 1 - 1} = 17, a_2 = \frac{4+2+13}{2 \cdot 2 - 1} = 7, a_3 = \frac{4+3+13}{2 \cdot 3 - 1} = 5$. f) $a_1=1^2=1, a_2=1^2+2^2=5, a_3=1^2+2^2+3^2=14$.

- 1.2 b) $4=7$.

Rozwiązanie. Sprawdzimy, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie n , że $b_n=7$, tzn. spełniające równanie $2n^2-9n+11=7$. Rozwiązaniem równania $2n^2-9n+4=0$ są liczby $n_1=0,5 \in \mathbb{C}$ i $n_2=4 \in \mathbb{C}_+$. Zatem czwarty wyraz ciągu (b_n) jest równy 7.

- 1.3 Dwa dziesięć trzy wyrazy.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $a_n < 89$, czyli ile jest liczb $n \in \mathbb{C}_+$ spełniających nierówność $4n-5 < 89$. Nierówność $4n-5 < 89$ spełniają liczby $n < 23,5$. Są 23 liczby całkowite dodatnie mniejsze od 23,5, a więc są 23 wyrazy mniejsze od 89 (wyrazy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{23}$).

- 1.4 Dziewięć wyrazów.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $a_n < 0$, czyli ile jest liczb $n \in \mathbb{C}_+$ spełniających nierówność $n^2-7n-30 < 0$. Nierówność kwadratową $n^2-7n-30 < 0$ spełniają liczby $n \in (-3, 10)$, liczbami całkowitymi dodatnimi należącymi do przedziału $(-3; 10)$ są $n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Zatem ciąg (a_n) ma dziewięć ujemnych wyrazów (wyrazy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$).

- 1.5 a) $2n+1$; b) $3n^2$.

Rozwiązanie. a) $a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1, a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. b) $a_{2n} = (2n)^2 = 4n^2, a_{2n} - a_n = 4n^2 - n^2 = 3n^2$.

- 1.6 Ciąg (a_n) jest malejący.

Rozwiązanie. $a_{n+1} = \frac{2(n+1)+5}{n+1+2} = \frac{2n+7}{n+3}, a_{n+1} - a_n = \frac{2n+7}{n+3} - \frac{2n+5}{n+2} = \frac{(2n+7)(n+2) - (2n+5)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$. Mianownik

wyrażenia $\frac{-1}{(n+3)(n+2)}$ jest dodatni dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$, więc wyrażenie $\frac{-1}{(n+3)(n+2)}$ jest ujemne dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$.

Wykazaliśmy, że $a_{n+1} - a_n < 0$, czyli, że $a_{n+1} < a_n$, a to oznacza, że ciąg (a_n) jest malejący.

- 1.7 a) $a_n = 2n$; b) $a_n = \frac{1}{n}$; c) $a_n = 5n - 4$.

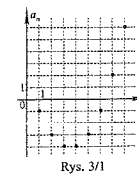
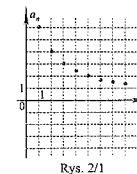
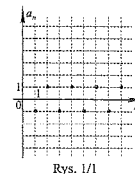
- 1.8 a) $a_n = n^3$; b) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$; c) $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

- 1.9 a) $a_1=6$; b) $a_2=5$; c) $a_n=5$.

Rozwiązanie. S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , więc $S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3$ itd. Ogólnie $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$. a) $a_1=S_1=5 \cdot 1 + 1 = 6$. b) $a_2=S_2-S_1=(5 \cdot 2 + 1) - 6 = 5$. c) Jeśli $n \geq 2$, to $a_n = S_n - S_{n-1} = 5n + 1 - [5(n-1) + 1] = 5$ (pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 6, a pozostałe równe są 5).

- 1.10 a) $a_9=-2$; b) siedem; c) ujemna.

Rozwiązanie. c) Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, więc $a_{2000} < a_{1000}$. Zatem różnica $a_{2000} - a_{1000}$ jest liczbą ujemną.



- 1.11 a) Rys. 1/1; b) Rys. 2/1; c) Rys. 3/1.

1.12 a) Jest; b) jest; c) nie jest; d) jest; e) jest; f) jest.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała, tzn. nie zależy od liczby n .

a) $a_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$, $a_{n+1} - a_n = 2n+2 - 2n = 2$. Różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa 2 dla każdej liczby całkowitej dodatniej n , więc (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2. c) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$, $a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$. Różnica między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu (a_n) nie jest stała, więc ciąg nie jest arytmetyczny.

1.13 a) Tworzą; b) nie tworzą; c) tworzą.

Rozwiązanie. Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b = \frac{a+c}{2}$.

c) $a+c = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 + (\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}-1} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}$. $\frac{a+c}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = b$, więc liczby a, b, c tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny.

1.14 a) $x=2$; b) $x=2$ lub $x=3$; c) $x=35$; d) $x=k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Musimy znaleźć takie liczby x , aby środkowy wyraz ciągu był równy średniej arytmetycznej wyrazów skrajnych.

a) Szukana liczba jest rozwiązaniem równania $4x-1 = \frac{2x+1+x+7}{2}$. Mnożąc obie strony równania przez 2, otrzymujemy równanie $2(4x-1) = 3x+8$. Stąd $x=2$.

d) Założenia: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Z równości $\frac{\tan x}{2} = \frac{1}{\cos x} + \frac{(-\cos x)}{2}$ otrzymujemy równanie $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy równanie $\sin x = \sin^2 x$, a stąd równanie $\sin x(\sin x - 1) = 0$, gdzie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{C}$.

$\sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0 \vee \sin x = 1) \Leftrightarrow (x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Uwzględniając założenie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, stwierdzamy, że szukany liczbami są liczby $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

1.15 a) 1,4; b) $a_{21} = 35$; c) $a_n = 1,4n + 5,6$.

Rozwiązanie. a) Wiemy, że $2a_1 = a_6$. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, więc $a_6 = a_1 + (6-1)r$, gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) . Zatem $2 \cdot 7 = 7 + 5r$, stąd $r = \frac{7}{5} = 1,4$. b) $a_{21} = a_1 + 20r = 7 + 20 \cdot 1,4 = 35$. c) $a_n = a_1 + (n-1)r = 7 + (n-1) \cdot 1,4 = 1,4n + 5,6$.

1.16 a) $a_1 = 5$, $r = 3$; b) $a_n = 3n + 2$.

Rozwiązanie. a) Ciąg (b_n) jest arytmetyczny, więc wyrazy b_2, b_3 i b_7 możemy wyrazić za pomocą b_1 i r , gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) :

$b_2 = b_1 + r$, $b_3 = b_1 + 4r$, $b_7 = b_1 + 6r$. Wiemy, że $b_2 = 8$ i $b_5 + b_7 = 40$. Mamy więc układ równań $\begin{cases} b_1 + r = 8 \\ b_1 + 4r + b_1 + 6r = 40 \end{cases}$ którego rozwiązaniem jest para liczb $b_1 = 5$ i $r = 3$. a) $b_n = b_1 + (n-1)r = 5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$.

1.17 a) 1225; b) 1640; c) 532.

Rozwiązanie. W każdym z przykładów mamy sumę n kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Obliczając sumy korzystać będziemy ze wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

a) Mamy sumę 49 początkowych wyrazów ciągu, $S_{49} = \frac{1+49}{2} \cdot 49 = 1225$.

b) Mamy sumę 41 początkowych wyrazów ciągu, więc $S_{41} = \frac{20+60}{2} \cdot 41 = 1640$.

c) Mamy sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , którego pierwszy wyraz jest równy 1, a różnica równa jest 3. n -ty wyraz jest równy 55, więc $1 + (n-1) \cdot 3 = 55$. Stąd $n = 19$. Zatem $S_{19} = \frac{1+55}{2} \cdot 19 = 532$.

1.18 21.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$. $189 = \frac{2 \cdot 4 + (n-1) \cdot 0,5}{2} \cdot n$, stąd otrzymujemy równanie $378 = 0,5n^2 + 7,5n$, a następnie równanie $n^2 + 15n - 756 = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $n_1 = -36$ i $n_2 = 21$. n jest liczbą naturalną, więc ciąg (a_n) składa się z dwudziestu jeden wyrazów.

1.19 a) $r = -2$; b) -140.

Rozwiązanie. a) $a_1 = 3$, $a_4 = 3 + 3r$, $a_5 = 3 + 4r$, gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) . Równanie kwadratowe $(3+3r)(3+4r) = 15$ sprowadzamy do postaci $12r^2 + 21r - 6 = 0$, a po podzieleniu obu stron równania przez 3, do postaci $4r^2 + 7r - 2 = 0$. Rozwiązaniami równania są liczby $r_1 = -2$ i $r_2 = 0,25$. Ciąg (a_n) jest malejący, więc różnica ciągu jest ujemna. Zatem $r_1 = -2$.

b) $S_{14} = \frac{2 \cdot 3 + 13 \cdot (-2)}{2} \cdot 14 = -140$.

1.20 a) 7 godzin; b) młodszy zarobił 175 zł, a starszy 280 zł.

Rozwiązanie. a) t – czas trwania przyjęcia (w godzinach). Kwoty płacone za kolejne godziny każdemu z kelnerów tworzą ciąg arytmetyczny.

Młodszy kelner zarobił $z_M = \frac{2 \cdot 10 + (t-1) \cdot 5}{2} \cdot t$, a starszy $z_S = \frac{2 \cdot 10 + (t-1) \cdot 10}{2} \cdot t$ (zł).

Wiemy, że $1,6 \cdot z_M = z_S$, zatem $1,6 \cdot \frac{2 \cdot 10 + (t-1) \cdot 5}{2} \cdot t = \frac{2 \cdot 10 + (t-1) \cdot 10}{2} \cdot t$, stąd otrzymujemy równanie $1,6 \cdot (5t + 15) = 10t + 10$, którego rozwiązaniem jest liczba $t = 7$.

b) Młodszy kelner zarobił $z_M = \frac{20 + 6 \cdot 5}{2} \cdot 7 = 175$, starszy kelner zarobił $z_S = \frac{20 + 6 \cdot 10}{2} \cdot 7 = 280$ (zł).

1.21 a) Jest; b) nie jest; c) jest; d) nie jest; e) jest; f) jest; g) jest; h) jest.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od 0 jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały, tzn. nie zależy od liczby n .

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$. Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest równy 3 dla każdej liczby całkowitej dodatniej n , więc (a_n) jest ciągiem geometr. o ilorazie 3.

b) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = 1,5$. Iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) nie jest stały, więc ciąg nie jest geometryczny.

1.22 a) Są; b) są; c) nie są.

Rozwiązanie. Aby sprawdzić, czy liczby a, b, c ($a \neq 0$) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, wystarczy sprawdzić, czy $b^2 = ac$.

Uwaga. Jeśli $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, to wyrazy ciągu (a, b, c) spełniają równość $b^2 = ac$, ale ciąg ten nie jest geometryczny. W zadaniu pierwsze wyrazy ciągów są różne od zera, więc jeśli wyrazy a, b, c spełniają równość $b^2 = ac$, to ciąg (a, b, c) jest geometryczny.

a) $b^2 = (-12)^2 = 144$, $ac = 18 \cdot 8 = 144$. $b^2 = ac$, więc liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny.

c) $b^2 = (3 + \sqrt{3})^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$, $ac = (\sqrt{3} + 1)(3\sqrt{3} + 1) = 9 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 1 = 10 + 4\sqrt{3}$. $b^2 \neq ac$, więc liczby a, b, c nie tworzą ciągu geometrycznego.

1.23 a) $x = -6$ lub $x = 6$; b) nie ma takich liczb; c) $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$; d) $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Musimy znaleźć takie liczby x , aby kwadrat środkowego wyrazu ciągu był równy iloczynowi wyrazów skrajnych, a otrzymany ciąg nie był ciągiem postaci $0, 0, c$, gdzie $c \neq 0$.

a) Równanie $x^2 = 2 \cdot 18$ spełniają liczby -6 i 6 .

b) Rozwiązaniem równania $(2x-6)^2 = 4x(x-3)$ jest liczba $x=3$. Jeśli $x=3$, to otrzymamy ciąg $0, 0, 12$, który nie jest geometryczny. Zatem nie istnieje taka liczba x , aby $x-3, 2x-6, 4x$ był geometryczny.

c) Założenia: $x \neq 0$ (bo $x^{-1} = \frac{1}{x}$). Równanie $(x^2)^2 = \frac{1}{x} \cdot (5x^3 - 4x)$ sprowadzamy do postaci $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Rozwiązaniami równania są liczby $-1, 1, -2$ i 2 (równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ można rozwiązać, wprowadzając niewiadomą pomocniczą $t = x^2$).

1.24 a) -2; b) -192; c) $a_n = 6 \cdot (-2)^{n-1}$ [$= -3 \cdot (-2)^n$].

Rozwiązanie. a) $a_{10} = a_6 \cdot q^4$, gdzie q jest ilorazem ciągu (a_n) . Wiemy, że $\frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_6 \cdot q^4}{a_6} = q^4 = 16$. Rozwiązaniami równania $q^4 = 16$ są liczby

-2 i 2 . Gdy $q = 2$, to ciąg (a_n) jest rosnący. Gdy $q = -2$, to wyrazy ciągu (a_n) są na przemian dodatnie i ujemne, więc ciąg nie jest monotoniczny.

Zatem $q = -2$.

b) $a_1 = 6$, $q = -2$, więc $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 6 \cdot (-2)^5 = -192$.

c) $a_n = 6 \cdot (-2)^{n-1}$.

1.25 a) 2047; b) $\frac{55}{32}$.

Rozwiązanie. b) Mamy sumę pięciu kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego. Aby znaleźć jego iloraz q , wystarczy podzielić dowolny wyraz

(oprócz pierwszego) przez wyraz poprzedni: $q = \frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$. $S_5 = \frac{81}{32} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{81}{32} \cdot \frac{1 - \frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} = \frac{81}{32} \cdot \frac{275}{81} = \frac{275}{32}$.

1.26 a) $a_1 = -405$; b) ciąg (a_n) jest rosnący.

Rozwiązanie. a) $S_5 = a_1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = a_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = a_1 \cdot \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = a_1 \cdot \frac{121}{81} = -605$. Z równości $a_1 \cdot \frac{121}{81} = -605$ otrzymujemy $a_1 = -405$.

b) Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest ujemny, a iloraz należy do przedziału $(0; 1)$, więc ciąg jest rosnący.

1.27 32 cm.

Rozwiązanie. Wysokość 2,43 m i maksymalne wysokości, na jakie wznosi się piłeczka po kolejnych odbiciach, tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{2}{3}$. Największa wysokość, na której znalazła się piłka pomiędzy piątym i szóstym odbiciem jest szóstym wyrazem tego ciągu (pierwszy wyraz jest równy 2,43, drugi – to największa wysokość po pierwszym odbiciu, trzeci – po drugim odbiciu, itd.). Szukaną wysokość znajdujemy, korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego: $243 \cdot (\frac{2}{3})^{6-1} = 243 \cdot \frac{32}{243} = 32$ (cm).

1.28 52 tony.

Rozwiązanie. Pewna wielkość (tu wielkość zbiorów) w takich samych okresach (tu jednym okresem jest rok) zwiększa się o ten sam procent. Mamy więc do czynienia z procentem składanym i możemy skorzystać ze wzoru $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ (tu $K_0 = 25$ (ton), $p\% = 20\%$ i $n = 4$).

Pan Kargul zebrał w 2004 roku $25 \cdot (1 + \frac{20}{100})^4 = 25 \cdot (\frac{6}{5})^4 = \frac{6^4}{5^2} = \frac{1296}{25} = 51,84 = 52$ (tony).

1.29 32 000 zł.

Rozwiązanie. k – pożyczona kwota. $k \cdot (1 + \frac{50}{100})^5 = k \cdot (\frac{3}{2})^5 = k \cdot \frac{243}{32} = 243000$, stąd $k = 32000$.

1.30 20%.

Rozwiązanie. p – oprocentowanie lokaty (w skali roku). $200000 \cdot (1 + \frac{p}{100})^4 = 414720$, zatem $(1 + \frac{p}{100})^4 = \frac{20736}{100000} = \frac{1296}{625} = (\frac{6}{5})^4$. $1 + \frac{p}{100}$ jest liczbą dodatnią, więc $1 + \frac{p}{100} = \frac{6}{5}$. Stąd otrzymujemy $p = 20$. Oprocentowanie lokaty wynosiło 20%.

1.31 a) $a_2 = 2$, $a_3 = 5$; b) $a_2 = 3$, $a_3 = 5$; c) $a_2 = 6$, $a_3 = 33$; d) $a_2 = 3$, $a_3 = 2$.

Rozwiązanie. a) $a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. b) $a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $a_3 = a_2 + 1 = 3 + 1 = 4$.

1.32 a) $a_4 = -3$; b) $a_4 = 0$.

Rozwiązanie. a) Aby obliczyć czwarty wyraz ciągu (a_n), musimy najpierw obliczyć wyraz trzeci: $a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 3 = 1$. $a_4 = a_3 - a_2 = 1 - 4 = -3$.

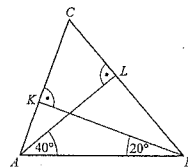
PLANIMETRIA

2.1 $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

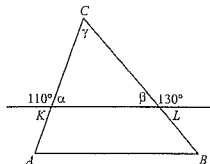
Rozwiązanie. Ozn. α – miara kąta BAC . Wiemy, że $\angle ABC = \alpha - 20^\circ$ i $\angle ACB = 3\alpha$. Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc $\alpha + \alpha - 20^\circ + 3\alpha = 180^\circ$. Stąd $\alpha = 40^\circ$, zaś $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle ACB = 120^\circ$.

2.2 50° , 60° , 70° .

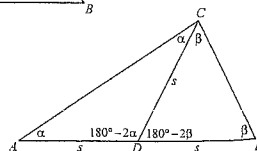
Rozwiązanie. W trójkącie ABL $40^\circ + \angle ABL + 90^\circ = 180^\circ$, więc $\angle ABL = 50^\circ$. W trójkącie KAB $\angle KAB + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, więc $\angle KAB = 70^\circ$. W trójkącie ABC $70^\circ + 50^\circ + \angle ACB = 180^\circ$, więc $\angle ACB = 60^\circ$.

2.3 50° , 60° , 70° .

Rozwiązanie. $\alpha + 110^\circ = 180^\circ$, więc $\alpha = 70^\circ$. $\beta + 130^\circ = 180^\circ$, więc $\beta = 50^\circ$. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc $\gamma = 60^\circ$. Kąty BAC i LKC są kątami odpowiadającymi, więc $\angle BAC = \angle LKC = \alpha = 70^\circ$. Kąty ABC i KLC są kątami odpowiadającymi, więc $\angle ABC = \angle KLC = \beta = 50^\circ$.

2.4 90° .

Rozwiązanie. Trójkąty ADC i DBC są równoramienne, więc przy podstawach mają równe kąty. $\angle ADC + \angle BDC = 180^\circ$, zatem $180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$. Stąd $\alpha + \beta = 90^\circ = \angle ACB$.

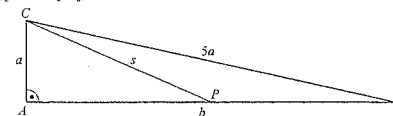
2.5 $a\sqrt{7}$.

Rozwiązanie. $5a$ – długość przeciwprostokątnej. b – długość drugiej przyprostokątnej. s – długość środkowej poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABC mamy $a^2 + b^2 = (5a)^2$.

Stąd $b^2 = 25a^2 - a^2 = 24a^2$, więc $b = \sqrt{24a^2} = \sqrt{4 \cdot 6a^2} = 2\sqrt{6}a$.

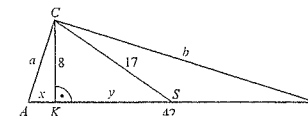
$|AP| = 0,5b = \sqrt{6}a$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta APC mamy

$s^2 = a^2 + (\sqrt{6}a)^2$. Stąd otrzymujemy $s = \sqrt{7}a$.

2.6 10, $4\sqrt{85}$.

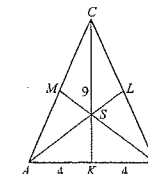
Rozwiązanie. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta KSC $8^2 + y^2 = 17^2$, stąd $y = 15$. Punkt S jest środkiem boku AB , więc $x = 21 - y = 6$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta AKC obliczmy $a = 10$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta KBC obliczmy $b = 4\sqrt{85}$.

2.7 $7\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 9.

Rozwiązanie. Środkowa poprowadzona do podstawy ma długość 9. Z tw. o środkowych trójkąta $|KS| = \frac{1}{3}|KC| = 3$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta AKS otrzymujemy $|AS| = 5$.

$|AS| = \frac{2}{3}|AL|$, stąd $|AL| = 7,5 = |BM|$.

2.8 $|AB| = 10$, $|AC| = 4\sqrt{13}$.

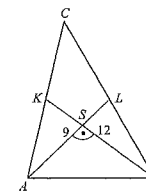
Rozwiązanie. Z tw. o środkowych trójkąta $|AS| = \frac{2}{3} \cdot |AL| = 6$,

$|BS| = \frac{2}{3} \cdot |BK| = 8$, $|SK| = \frac{1}{3} \cdot |BK| = 4$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABS $|AB|^2 = 6^2 + 8^2$.

Stąd $|AB| = 10$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ASK $|AK|^2 = 6^2 + 4^2$.

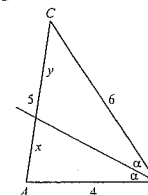
Stąd $|AK| = 2\sqrt{13}$. $|AC| = 2 \cdot |AK| = 4\sqrt{13}$.



2.9 2 i 3.

Rozwiązanie. $\frac{x}{y} = \frac{4}{6}$ (skorzystaliśmy z tw. o dwusiecznej kąta w trójkącie) i $x + y = 5$.

Rozwiązaniem otrzymanego układu równań jest para $x = 2$ i $y = 3$.

2.10 $\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

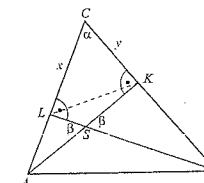
Wskazówka. Skorzystaj z tw. o dwusiecznej kąta trójkąta i z tw. Pitagorasa.

2.11

Rozwiązanie. a) Trójkąty AKC i BLC są prostokątne i mają wspólny kąt ostry (kąt α), więc są podobne (cecha kąt-kąt).

b) Trójkąty LAS i BKS są prostokątne i mają kąt ostry o tej samej mierze (kąt β), więc są podobne (cecha kąt-kąt).

c) Z podobieństwa trójkątów AKC i BLC mamy $\frac{x}{y} = \frac{|BC|}{|AC|}$, trójkąty ABC i LKC mają wspólny kąt (kąt α), więc są podobne (cecha bok-kąt-bok).



2.12 45.

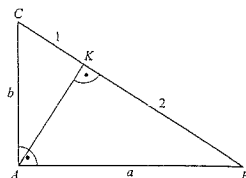
Rozwiązanie. Trójkąty są podobne, a skala tego podobieństwa jest równa $\frac{2}{6}$, czyli $\frac{1}{3}$.

Obwód trójkąta o bokach długości 6, 10 i 14 wynosi 30.

Stosunek obwodów obu trójkątów jest równy skali podobieństwa, zatem obwód większego trójkąta jest równy $\frac{3}{2} \cdot 30 = 45$.

2.13 $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 3.

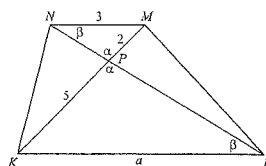
Rozwiązanie. Trójkąty ABK i ABC są podobne (cecha kat-ka), więc stosunki odpowiednich boków są równe: $\frac{a}{5} = \frac{2}{a}$. Stąd $a = \sqrt{6}$. Z podobieństwa trójkątów AKC i ABC lub z tw. Pitagorasa obliczamy długość drugiej przyprostokątnej: $b = \sqrt{3}$.

2.14 $|OC| = 16\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Z tw. Talesa wynika, że $\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Zatem $|OC| = \frac{15 \cdot 13}{12} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$.

2.15 $|KL| = 7\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Kąty trójkątów KLP i MNP mają równe miary (kąty KPL i MPN – kąty wierzchołkowe, kąty KLP i PNM – kąty naprzemianległe) więc trójkąty te są podobne. Jeśli trójkąty są podobne, to stosunki odpowiednich boków są równe: $\frac{a}{3} = \frac{5}{2}$. Stąd otrzymujemy $a = 7,5$.



2.16 14:17.

Rozwiązanie. k – skala podobieństwa wielokątów. Stosunek obwodów tych wielokątów jest równy k . Stosunek pól wielokątów podobnych jest równy k^2 . $k^2 = \frac{196}{289}$, więc $k = \frac{14}{17}$.

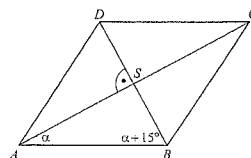
2.17 64 cm^2 , 36 cm^2 .

Rozwiązanie. $k = \frac{3}{4}$ – skala podobieństwa wielokątów. Stosunek pól P_1 i P_2 tych wielokątów jest równy kwadratowi skali podobieństwa,

zatem $\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16}$. Wiemy, że $P_2 = P_1 + 28$, więc $\frac{P_1}{P_1 + 28} = \frac{9}{16}$. Stąd otrzymujemy $P_1 = 36$. $P_2 = P_1 + 28 = 36 + 28 = 64$.

2.18 $2 - \sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Jeśli bok kwadratu ma długość a , to przekątna ma długość $a\sqrt{2}$. Musimy więc rozwiązać równanie $a\sqrt{2} + a = 1$. Rozwiązanie otrzymamy wyłączając a przed nawias: $a(\sqrt{2} + 1) = 1$, a następnie dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{2} + 1$: $a = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$. Przekątna kwadratu ma długość $a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$. Po usunięciu niewymierności z mianownika długość przekątnej możemy zapisać w postaci $2 - \sqrt{2}$.

2.19 75° i 105° .

Rozwiązanie. Przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów, więc kat ostry ma miarę 2α , a kat rozwarty miarę $2\alpha + 30^\circ$. Trójkąt ABS jest prostokątny, więc $\alpha + \alpha + 15^\circ = 90^\circ$. Stąd $2\alpha = 75^\circ$. Zatem kat ostry rombu ma miarę 75° , a rozwarty 105° .

2.20 13 cm.

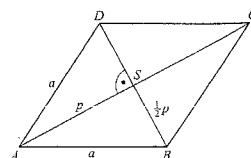
Wskazówka. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowy.

2.21 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Rozwiązanie. p – długość krótszej przekątnej. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta

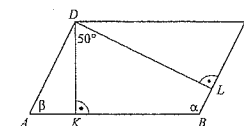
ABS $a^2 = p^2 + \frac{1}{4}p^2$. Stąd $a = \frac{\sqrt{5}}{2}p$.

Szukany stosunek: $\frac{4a}{3p} = \frac{2\sqrt{5}p}{3p} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

2.22 53° i 127° .

Rozwiązanie. α – miara kąta ostrego równoległoboku, $\alpha + 74^\circ$ – miara kąta rozwartego.

Suma miar dwóch kolejnych kątów równoległoboku wynosi 180° , zatem $\alpha + \alpha + 74^\circ = 180^\circ$. Stąd $\alpha = 53^\circ$, $\alpha + 74^\circ = 127^\circ$.

2.23 50° .

Rozwiązanie. W czworokącie $KBLD$ $90^\circ + \alpha + 90^\circ + 50^\circ = 360^\circ$, stąd $\alpha = 130^\circ$. $\alpha + \beta = 180^\circ$, więc $\beta = 50^\circ$.

2.24 $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $\angle D = 144^\circ$.

Wskazówka. Suma miar kątów przyległych do ramienia trapezu wynosi 180° .

2.26 9.

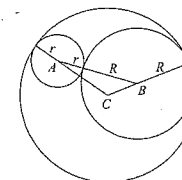
Rozwiązanie. a, b – długości podstaw. $a + b + 4 + 8 = 30$, więc $a + b = 18$. Długość d odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa połowie sumy długości podstaw, zatem $d = 9$.

2.27 1 lub 7.

Wskazówka. Prowadząc promienie do końców cięciw, otrzymamy trójkąty równoramienne.

2.28 $R = 3$.

Rozwiązanie. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym $|AB| = 3$, $|BC| = R + 2$ i $|AC| = R + 1$. Korzystając z tw. Pitagorasa, otrzymujemy równanie $(R + 1)^2 + 3^2 = (R + 2)^2$. Rozwiązaniem tego równania jest liczba $R = 3$.



2.29 8.

Rozwiązanie. Okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie, więc $|AB| = r + R$. Okręgi o środkach A i B są styczne wewnętrznie do okręgu $o(C, 4)$, więc $|AC| = 4 - r$ i $|BC| = 4 - R$. Obwód trójkąta ABC : $r + R + 4 - r + 4 - R = 8$.

2.30 140° .

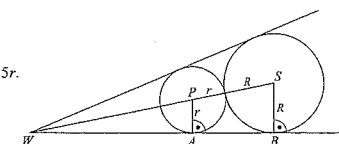
Rozwiązanie. α – miara kąta między stycznymi. Oba promienie i poprowadzone styczne wyznaczają czworokąt. Styczna tworzy z promieniem, przez którego koniec została poprowadzona, kąt prosty. Zatem wyznaczony czworokąt ma kąty o miarach $90^\circ, 90^\circ, 40^\circ, \alpha$. Suma miar kątów każdego czworokąta jest równa 360° , zatem $90^\circ + 90^\circ + 40^\circ + \alpha = 360^\circ$. Stąd otrzymujemy $\alpha = 140^\circ$.

2.31 $\frac{8}{5}$ i $\frac{12}{5}$.

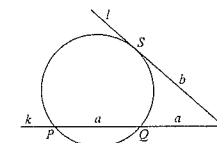
Rozwiązanie. Z podobieństwa trójkątów WAP i WBS mamy $\frac{R}{r} = \frac{12}{8}$, stąd $R = 1,5r$.

$|PS| = |WS| - |WP| = 4 = r + R = r + 1,5r = 2,5r$.

Zatem $r = 1,6$, zaś $R = 2,4$.

2.32 $|PQ| : |SK| = 1 : \sqrt{2}$.

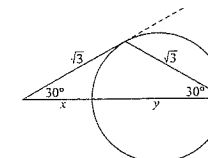
Rozwiązanie. Z tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej mamy $a \cdot 2a = b^2$. Stąd $b = a\sqrt{2}$. Zatem $|PQ| : |SK| = 1 : \sqrt{2}$.



2.33 1 i 2.

Rozwiązanie. Podstawa trójkąta ma długość 3. $x + y = 3$, a z tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej mamy $x(x + y) = (\sqrt{3})^2$.

Zatem $x = 1$, zaś $y = 2$.



2.34 a) $\lg(\angle BAC) = \frac{3}{4}$, $\cos(\angle BAC) = \frac{4}{5}$; b) $\angle ABC = 60^\circ$.

Rozwiązanie. a) $\lg(\angle BAC) = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ADC : $|AC|^2 = 8^2 + 6^2$. Stąd $|AC| = 10$. $\cos(\angle BAC) = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

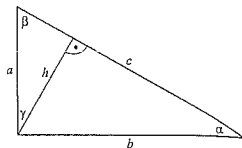
b) $\lg(\angle ABC) = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, więc $\angle ABC = 60^\circ$.

2.35 Przyprostokątne: $\frac{h}{\sin \alpha}$ i $\frac{h}{\cos \alpha}$, przeciwprostokątna: $\frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

Rozwiązanie. $\frac{h}{b} = \sin \alpha$, stąd $b = \frac{h}{\sin \alpha}$. $\frac{h}{c} = \cos \alpha$, stąd $c = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Suma miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego wynosi 90° , więc $\alpha + \beta = 90^\circ$ i $\gamma + \beta = 90^\circ$.

Stąd wynika, że $\gamma = \alpha$. $\frac{h}{a} = \cos \gamma = \cos \alpha$, więc $a = \frac{h}{\cos \alpha}$.

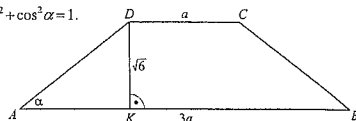


2.36 $24\sqrt{6}$.

Rozwiązanie. Pole trapezu: $P = \frac{3a+a}{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}a$. $|AK| = \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{3a-a}{2} = a$. $\lg \alpha = \frac{\sqrt{6}}{|AK|}$, więc $a = \frac{\sqrt{6}}{\lg \alpha}$. Znajdąc wartość sinus kąta α , możemy obliczyć jego tangens. Korzystamy z jedynki trygonometrycznej: $(0,2)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

Stąd otrzymujemy: $\cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$, więc $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. $\lg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Zatem $P = 2\sqrt{6}a = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\lg \alpha} = 24\sqrt{6}$.

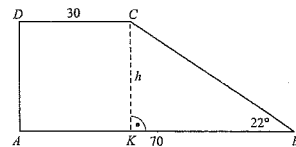


2.37 808.

Rozwiązanie. Pole trapezu: $P = \frac{30+70}{2} \cdot h = 50h$. $|KB| = |AB| - |AK| = 70 - 30 = 40$.

$\frac{h}{|KB|} = \lg 22^\circ = 0,404$, zatem $h = 0,404 \cdot 40 = 16,16$. Możemy teraz obliczyć pole trapezu:

$P = 50h = 50 \cdot 16,16 = 808$.

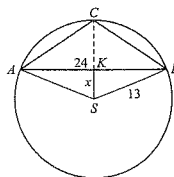


2.38 Promień okręgu wpisanego: $\frac{1}{2}R$, obwód: $3\sqrt{3}R$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: a – długość boku trójkąta, h – długość wysokości trójkąta, r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość równą jednej trzeciej długości wysokości trójkąta, a długość promienia okręgu opisanego równa jest dwóm trzecim długości wysokości. Zatem $r = \frac{1}{2}R$.

Wiemy, że $R = \frac{2}{3}h$ i $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd otrzymujemy $a = \sqrt{3}R$. Obwód trójkąta jest równy $3a$, czyli $3\sqrt{3}R$.



2.39 96.

Rozwiązanie. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta SBK : $x^2 + 12^2 = 13^2$. Stąd $x = 5$.

$|CK| = |CS| - x = 13 - 5 = 8$.

Pole trójkąta ABC : $P = 0,5 \cdot |AB| \cdot |CK| = 0,5 \cdot 24 \cdot 8 = 96$.

2.40 $\frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \alpha)$, a po skorzystaniu ze wzoru redukcyjnego (poziom rozszerzony): $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

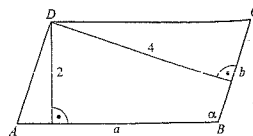
Rozwiązanie. Trzeci kąt ma miarę $180^\circ - \alpha$, zatem pole $P = \frac{1}{2}ab \sin(180^\circ - \alpha)$.

2.41 32.

Wskazówka. Wysokość rombu jest równa średnicy okręgu wpisanego w romb.

2.42 20.

Rozwiązanie. Wiemy, że ① $2a + 2b = 30$. Ze wzoru na pole równoległoboku $P = 2a$ i $P = 4b$, więc ② $2a = 4b$. Z układu równań ① i ② otrzymujemy $b = 5$. Obliczamy pole równoległoboku: $P = 4b = 4 \cdot 5 = 20$.



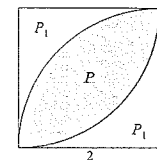
2.43 21.

Rozwiązanie. Kąt ostry równoległoboku ma miarę $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Pole równoległoboku: $P = 6 \cdot 7 \cdot \sin 30^\circ = 21$.

2.44 $2\pi - 4$.

Rozwiązanie. Pole kwadratu $S = 4$. $P = S - 2P_1$, $P_1 = S - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = S - \pi$.

Zatem $P = S - 2(S - \pi) = 2\pi - S = 2\pi - 4$.



2.45 40° , 65° , 75° .

Rozwiązanie. Miara kąta wpisanego jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku, więc $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle ASB = 40^\circ$ i

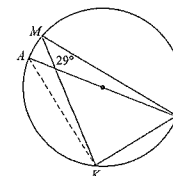
$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BSC = 65^\circ$. $\angle ABC = 180^\circ - (40^\circ + 65^\circ) = 75^\circ$.

2.46 40° , 60° , 80° .

Wskazówka. Stosunek miar kątów środkowych opartych na wyznaczonych łukach wynosi $2:3:4$. Suma tych kątów środkowych jest kątem pełnym.

2.47 29° , 61° , 90° .

Rozwiązanie. Kąty KML i KAL są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, więc mają równe miary. Zatem $\angle KAL = 29^\circ$. Kąt AKL jest kątem wpisanym opartym na średnicy, więc jest kątem prostym. $\angle KLA = 180^\circ - (29^\circ + 90^\circ) = 61^\circ$.



2.48 $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCA = 46^\circ$, $\angle CAB = 54^\circ$.

Rozwiązanie. Odpowiednie kąty wpisane i kąty między styczną a cięciwami okręgu są równe, więc $\angle BCA = 46^\circ$ i $\angle CAB = 54^\circ$. $\angle ABC = 180^\circ - (46^\circ + 54^\circ) = 80^\circ$.

2.49 5.

Wskazówka. Każdy punkt należący do symetralnej odcinka jest jednakowo oddalony od końców odcinka.

2.50 3.

Wskazówka. Każdy punkt należący do dwusiecznej kąta jest równo oddalony od ramion kąta.

2.51 $\angle ASB = 140^\circ$, $\angle BSC = 100^\circ$, $\angle ASC = 120^\circ$.

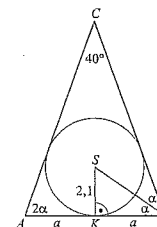
Wskazówka. S jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów trójkąta ABC .

2.52 6 cm.

Rozwiązanie. Trójkąt ABC jest równoramienny, więc miary kątów przy podstawie są równe.

Środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na dwusiecznej kąta ABC .

$4\alpha + 40^\circ = 180^\circ$, stąd $\alpha = 35^\circ$. $\frac{2,1}{a} = \lg 35^\circ = 0,7$, stąd $a = 3$, zaś $|AB| = 6$ (cm).



2.53 Przyprostokątne: $1 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, przeciwprostokątna: $2 + 2\sqrt{3}$.

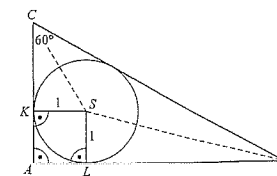
Rozwiązanie. Czworokąt $ALSK$ jest kwadratem, więc $|AK| = 1$.

S jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów trójkąta ABC , więc $\angle KCS = 30^\circ$.

$\frac{1}{|KC|} = \lg 30^\circ$, stąd $|KC| = \sqrt{3}$. Zatem $|AC| = 1 + \sqrt{3}$.

$\frac{|AC|}{|BC|} = \cos 60^\circ$, więc $|BC| = 2(1 + \sqrt{3})$. $\frac{|AB|}{|AC|} = \lg 60^\circ$, więc $|AB| = 3 + \sqrt{3}$.

2.54 $\angle L = 15^\circ$, $\angle K = 65^\circ$, $\angle M = 115^\circ$, $\angle N = 165^\circ$.



2.55 120° .

Rozwiązanie. Trójkąt ABD jest równoboczny, więc miara kąta BAD wynosi 60° . Z tw. o czworokącie wpisanym w okrąg wiemy, że suma miar kątów BAD i BCD jest równa 180° . Zatem kąt BCD ma miarę 120° .

2.56 $|KL|=7$, $|MN|=10$.

2.57 Sześć razy.

Rozwiązanie. Oznaczenia: x – długość boku AB , y – długość boku AD . Wiemy, że $|CD|=7x$ i $|BC|=3y$. Z tw. o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że $x+7x=y+3y$. Zatem $y=2x$. $|BC|=3y=6x=6 \cdot |AB|$.

2.58 2 i $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Sześciokąt foremny o boku 1 można podzielić na sześć trójkątów równobocznych o boku 1. Dłuższa przekątna ma długość dwa razy większą niż bok takiego trójkąta, więc ma długość 2. Krótsza przekątna ma długość dwa razy większą niż wysokość trójkąta o boku 1, więc ma długość $\sqrt{3}$.

2.59 a) 108° ; b) 120° ; c) 140° .

Wskazówki. I. Suma kątów wielokąta o n kątach jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.

II. Kąty wielokąta foremnego mają równe miary.

2.60 a) Trzy; b) nie ma osi symetrii; c) dwie – jeśli nie jest kwadratem, cztery – jeśli jest kwadratem; d) sześć.

2.61 Równoległobok i prosta.

2.62 4.

Rozwiązanie. R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Z tw. sinusów $2R = \frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{4}{\sin 150^\circ} = \frac{4}{\sin(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{4}{0,5} = 8$. Stąd $R=4$.

2.63 a) Promień okręgu opisanego: $\frac{b}{2 \sin \alpha}$; b) Promień okręgu wpisanego: $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Rozwiązanie. Ozn. $2a, R, r$ – długości odpowiednio podstawy, promienia okręgu opisanego, promienia okręgu wpisanego.

a) Z tw. sinusów $2R = \frac{b}{\sin \alpha}$, więc $R = \frac{b}{2 \sin \alpha}$.

b) $\frac{a}{b} = \cos \alpha$, stąd $a = b \cos \alpha$. Środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc $\frac{r}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Stąd $r = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = b \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

2.64 a) Promień okręgu opisanego: $\frac{a}{2 \sin(\alpha+\beta)}$; b) Długości boków: $\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

c) Promień okręgu wpisanego: $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta) + \sin \alpha + \sin \beta}$.

Rozwiązanie. W a) i b) skorzystamy z równości $\sin(180^\circ - x) = \sin x$.

Równość tę otrzymujemy np. ze wzoru na sinus różnicy.

a) R – promień okręgu opisanego.

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Z tw. sinusów: $2R = \frac{a}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$,

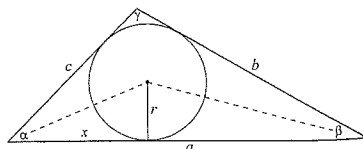
zatem $R = \frac{a}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

b) Z tw. sinusów $\frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{b}{\sin \alpha}$, stąd $b = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Analogicznie dostajemy $c = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

c) I SPOSÓB. Środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc ① $\frac{r}{x} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ i ② $\frac{r}{a-x} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$.

Wyznaczając x z równania ①: $x = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ i podstawiając do równania ②, otrzymamy równanie $r = (a - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$. Z otrzymanego równania

wyznaczamy r : $r = \frac{a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$.



II SPOSÓB. Z b) wiemy, że $b = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

$P = \frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{1}{2} r(a + \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}) = \frac{1}{2} ra \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Z równości $\frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2} ra \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ otrzymujemy $r = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta}$.

2.65 a) Promień okręgu opisanego: $\sqrt{\frac{13}{3}}$; b) Promień okręgu wpisanego: $\frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{13}}$.

Rozwiązanie. c – długość trzeciego boku. Z tw. kosinusów $c^2 = 1 + 16 - 8 \cos 60^\circ$. Stąd $c = \sqrt{13}$.

a) Z tw. sinusów $2R = \frac{c}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$, więc $R = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

b) Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. $P = \frac{1}{2} r \cdot (1 + 4 + \sqrt{13})$, zatem $r = \frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{13}}$.

2.66 a) Kosinus: $\frac{37}{40}$; Tangens: $\frac{\sqrt{231}}{37}$; b) Środkowa: $\sqrt{15}$.

Rozwiązanie. a) Z tw. kosinusów $4^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = \frac{37}{40}$.

Korzystając z „jedynki trygonometrycznej” otrzymujemy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{231}}{40}$.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{231}}{37}$.

b) Z tw. kosinusów $s^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 89 - 74 = 15$, więc $s = \sqrt{15}$.

2.67 $-\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: α – miara największego kąta trójkąta, $2x, 3x, 4x$ – długości boków trójkąta. Z tw. kosinusów: $16x^2 = 4x^2 + 9x^2 - 12x^2 \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = -0,25$.

2.68 a) Stosunek pól: 1 : 4; b) stosunek promieni: 1; c) sinus kąta LKA : $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Rozwiązanie. a) $P_{\Delta KLA} = \frac{1}{2} ah$, $P_{\Delta KAM} = \frac{1}{2} \cdot 4ah$, więc $\frac{P_{\Delta KLA}}{P_{\Delta KAM}} = \frac{1}{4}$.

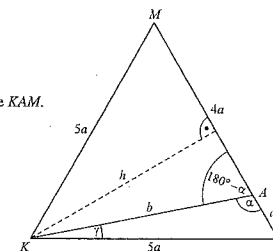
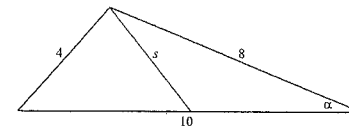
b) R_L – promień okręgu opisanego na trójkącie KLA , R_M – promień okręgu opisanego na trójkącie KAM .

Skorzystamy z tw. sinusów i równości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

$2R_L = \frac{5a}{\sin \alpha}$, $2R_M = \frac{5a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{5a}{\sin \alpha}$. Zatem $\frac{R_L}{R_M} = 1$.

c) Z tw. kosinusów dla trójkąta KLA : $b^2 = a^2 + (5a)^2 - 2a \cdot 5a \cdot \cos 60^\circ = 21a^2$. Stąd $b = \sqrt{21}a$.

Z tw. sinusów dla trójkąta KLA : $\frac{\sqrt{21}a}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin \gamma}$. Zatem $\sin \gamma = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.



GEOMETRIA ANALITYCZNA

3.1 a) Postać ogólna: $4x - 2y - 5 = 0$, postać kierunkowa: $y = 2x - 2,5$; b) postać ogólna: $y - 6 = 0$, postać kierunkowa: $y = 6$; c) postać ogólna: $7x - 8 = 0$, nie ma postaci kierunkowej.3.2 a) $3x - 12y - 18 = 0$; b) $-0,5x + 2y + 3 = 0$; c) $x - 4y - 6 = 0$.

Rozwiązanie. Równanie $y = 0,25x - 1,5$ sprowadzamy do postaci ogólnej $0,25x - y - 1,5 = 0$.

a) Aby współczynnik A był równy 3, musimy pomnożyć obie strony równania $0,25x - y - 1,5 = 0$ przez 12. Otrzymamy wówczas równanie $3x - 12y - 18 = 0$.

b) Aby współczynnik B był równy 2, musimy pomnożyć obie strony równania $0,25x - y - 1,5 = 0$ przez -2 . Otrzymamy wówczas równanie $-0,5x + 2y + 3 = 0$.

3.3 a) $y = x + 5$; b) $y = \sqrt{3}x - 4$; c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$.

Rozwiązanie. b) Znajdziemy równanie kierunkowe prostej, czyli równanie postaci $y = ax + b$. Współczynnik a w równaniu prostej jest równy tangensowi kąta, pod jakim prosta nachylona jest do osi OX . Zatem $a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Prosta przecina oś OY w punkcie $P = (0, -4)$, więc $b = -4$. Równanie prostej: $y = \sqrt{3}x - 4$.

3.4 a) $y = 2x$; b) $y = 3x - 1$; c) $y = 2$; d) $x = 1$.

Rozwiązanie. a) Prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc jej równanie ma postać $y = ax$. Punkt $B = (1, 2)$ należy do prostej, więc $2 = a \cdot 1$. Zatem prosta określona jest równaniem $y = 2x$.

b) I SPOSÓB. Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty: $(y + 4)(1 + 1) = (2 + 4)(x + 1)$, stąd $y = 3x - 1$.

II SPOSÓB. Znajdziemy równanie kierunkowe prostej, czyli równanie postaci $y = ax + b$. Punkt $A = (-1, -4)$ należy do prostej, więc

$-4 = -a + b$. Punkt $B = (1, 2)$ należy do prostej, więc $2 = a + b$. Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $a = 3$, $b = -1$.

Zatem prosta ma równanie $y = 3x - 1$.

c) Punkty A i B mają rzędną równą 2, więc prosta ma równanie $y = 2$.

d) Punkty A i B mają odciętą równą 1, więc prosta ma równanie $x = 1$.

3.5 a) Są współliniowe; b) nie są współliniowe.

Wskazówka. Znajdź równanie prostej AB , a następnie sprawdź, czy punkt C do niej należy.

3.6 a) $y = 3x - 2$; b) $2x + 3y - 16 = 0$; c) $y = 4$; d) $x = 2$.

Rozwiązanie. I – prosta równoległa do prostej k i przechodząca przez punkt P .

a) Równanie każdej prostej równoległej do prostej k można zapisać w postaci $y = 3x + b$. Punkt $P = (2, 4)$ należy do prostej l , zatem $4 = 3 \cdot 2 + b$. Stąd $b = -2$. Prosta l ma równanie $y = 3x - 2$.

b) Równanie każdej prostej równoległej do prostej k można zapisać w postaci $2x + 3y + C = 0$. Punkt $P = (2, 4)$ należy do prostej l , zatem

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + C = 0$. Stąd $C = -16$. Prosta l ma równanie $2x + 3y - 16 = 0$.

c) Prosta k jest równoległa do osi OX , więc równanie każdej prostej do niej równoległej możemy zapisać w postaci $y = b$. Prosta l przechodzi przez punkt P , którego rzędna jest równa 4, więc ma równanie $y = 4$.

d) Prosta k jest równoległa do osi OY , więc równanie każdej prostej do niej równoległej możemy zapisać w postaci $x = c$. Prosta l przechodzi przez punkt P , którego odcięta jest równa 2, więc ma równanie $x = 2$.

3.7 a) $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$; b) $3x - 2y + 2 = 0$; c) $x = 2$; d) $y = 4$.

Rozwiązanie. I – prosta prostopadła do prostej k i przechodząca przez punkt P .

a) Równanie każdej prostej prostopadłej do prostej k można zapisać w postaci $y = -\frac{1}{3}x + b$. Punkt $P = (2, 4)$ należy do prostej l , zatem

$4 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b$. Stąd $b = 4\frac{2}{3}$. Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

b) Równanie każdej prostej prostopadłej do prostej k można zapisać w postaci $3x - 2y + C = 0$. Punkt $P = (2, 4)$ należy do prostej l , zatem

$3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + C = 0$. Stąd $C = 2$. Prosta l ma równanie $3x - 2y + 2 = 0$.

c) Prosta k jest równoległa do osi OX , więc równanie prostej do niej prostopadłej możemy zapisać w postaci $x = c$. Prosta l przechodzi przez punkt P , którego odcięta jest równa 2, więc ma równanie $x = 2$.

d) Prosta k jest równoległa do osi OY , więc równanie prostej do niej prostopadłej możemy zapisać w postaci $y = b$. Prosta l przechodzi przez punkt P , którego rzędna jest równa 4, więc ma równanie $y = 4$.

3.8 a) $(1, 6)$; b) każdy punkt o współrzędnych $(a, -2a + 0,5)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą; c) $(-2, -5)$.

Rozwiązanie. a) Współrzędne punktu wspólnego danych prostych znajdziemy rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 7 \end{cases}$. Rozwiązaniem tego

układu jest para liczb $x = 1$, $y = 6$. Zatem punktem wspólnym obu prostych jest punkt $A = (1, 6)$.

b) Równanie $12x = 3 - 6y$ sprowadzamy do postaci $12x + 6y - 3 = 0$, a po podzieleniu obu stron otrzymanego równania przez 3, do postaci

$4x + 2y - 1 = 0$. Równania obu prostych są takie same, więc szukany punktami są punkty, których współrzędne spełniają równanie

$4x + 2y - 1 = 0$, czyli równanie $y = -2x + 0,5$. Zatem są to punkty o współrzędnych $(a, -2a + 0,5)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

c) Punktem, którego współrzędne spełniają oba równania, jest punkt $A = (-2, -5)$.

3.9 a) 13; b) $2\sqrt{5}$; c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie. a) $|AB| = \sqrt{(-2 - 10)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$.

b) Uwaga. Znajomość wzoru na odległość punktu od prostej wymagana jest tylko na poziomie rozszerzonym.

I SPOSÓB. Z wykorzystaniem wzoru na odległość punktu od prostej.

Zapisujemy równanie prostej k w postaci $x + 2y - 6 = 0$. Obliczamy odległość punktu A od prostej k : $d = \frac{|-2 + 2 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

II SPOSÓB. Bez wykorzystania wzoru na odległość punktu od prostej.

Znajdujemy równanie prostej l przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej k . Równanie prostej l ma postać $y = 2x + b$. Punkt A należy do prostej l , więc $-1 = 2 \cdot (-2) + b$. Zatem $b = 3$, a prosta l ma równanie $y = 2x + 3$.

Rozwiązując układ równań $y = -0,5x + 3$ i $y = 2x + 3$, znajdujemy współrzędne punktu P przecięcia obu prostych: $P = (0, 3)$.

Odległość punktu A od prostej k jest równa długości odcinka AP . $|AP| = \sqrt{(-2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

c) Uwaga. Znajomość wzoru na odległość między prostymi równoległymi wymagana jest tylko na poziomie rozszerzonym.

I SPOSÓB. Z wykorzystaniem wzoru na odległość między prostymi równoległymi.

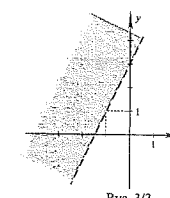
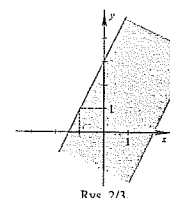
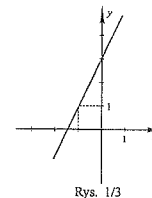
Zapisujemy równania prostych w postaci ogólnej: $x + 2y - 6 = 0$ i $x + 2y - 4 = 0$.

Obliczamy odległość między prostymi: $d = \frac{|-6 - (-4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

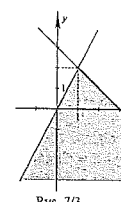
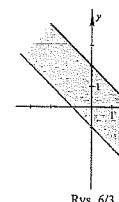
II SPOSÓB. Bez wykorzystania wzoru na odległość między prostymi równoległymi (szkiełko rozwiązania).

Weźmy dowolny punkt należący do prostej k (np. punkt $P = (0, 3)$). Odległość między danymi prostymi jest równa odległości punktu P od prostej o równaniu $y = -0,5x - 2$. Jak znaleźć odległość punktu od prostej, pokazano w punkcie b).

3.10 a) Rys. 1/3; b) Rys. 2/3; c) Rys. 3/3.



3.11 a) Rys. 4/3; b) Rys. 5/3; c) Rys. 6/3; d) Rys. 7/3; e) Rys. 8/3.



3.12 $\begin{cases} y > 2x \\ y < 2x + 3 \end{cases}$

3.13 a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq x \\ y \geq -x - 4 \end{cases}$

Rozwiązanie. b) Zapisujemy równania prostych zawierających boki trójkąta ABC . Równanie prostej AB : $y = 0$, równanie prostej AC : $y = x$, równanie prostej BC : $y = -x - 4$. Wnętrze trójkąta ABC znajduje się pod prostą AB i nad prostymi AC i BC , zatem zbiór punktów należących do trójkąta ABC opisuje układ nierówności $y \leq 0$ i $y \geq x$ i $y \geq -x - 4$.

3.14 a) $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ y - 4 < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y - 4 \leq 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$

3.15 a) $\vec{v} = [-4, 2]$; b) $\vec{v} = [3, 2]$; c) $\vec{v} = [-5, 20]$; d) $\vec{v} = [9, 20]$; e) $\vec{v} = [3, -26]$.

Rozwiązanie. a) $\vec{v} = [-3, -2] + [-1, 4] = [-3 - 1, -2 + 4] = [-4, 2]$. c) $\vec{v} = 5 \cdot [-1, 4] = [-5, 20]$.

3.16 a) $\overline{AB} = [2, 4]$, $\overline{BA} = [-2, -4]$; b) $\overline{AB} = |\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$; c) $D = (7, 12)$; d) $(2, 5)$; e) $K = (5, 11)$; f) $x + 2y - 12 = 0$.

Rozwiązanie. a) $\overline{AB} = [3 - 1, 7 - 3] = [2, 4]$. $\overline{BA} = -\overline{AB} = [-2, -4]$. b) $|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

c) Szukany punkt: $D = (x_D, y_D)$. $\overline{AB} = [2, 4]$, $\overline{CD} = [x_D - 5, y_D - 8]$. Zatem $x_D - 5 = 2$ i $y_D - 8 = 4$. Stąd $x_D = 7$ i $y_D = 12$.

d) $S = (x_S, y_S)$ – środek odcinka AB . $x_S = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_S = \frac{3+7}{2} = 5$.

e) $K = (x_K, y_K)$, punkt $B = (3, 7)$ jest środkiem odcinka AK , więc $3 = \frac{x_K + 1}{2}$ i $7 = \frac{y_K + 3}{2}$. Stąd $x_K = 5$ i $y_K = 11$.

f) I SPOSÓB. Symetralna odcinka AB przechodzi przez punkt $S = (2, 5)$ (patrz punkt d)) i jest prostopadła do prostej AB . Równanie prostej AB : $y = 2x + 1$. Równanie każdej prostej prostopadłej do prostej AB możemy zapisać w postaci $y = -0,5x + b$. Punkt S należy do symetralnej odcinka AB , więc $5 = -0,5 \cdot 2 + b$. Stąd $b = 6$. Szukana prosta ma równanie $y = -0,5x + 6$.

II SPOSÓB. (Z wykorzystaniem zależności między współrzędnymi wektora i współczynnikami prostej do niego prostopadłej – poziom rozszerzony).

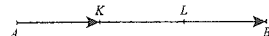
Środek odcinka AB : $S = (2, 5)$. $\overline{AS} = [1, 2]$. Symetralna odcinka AB jest prostopadła do wektora $\overline{AS}$, więc jej równanie możemy zapisać w postaci $x + 2y + D = 0$. Punkt S należy do symetralnej odcinka AB , więc $2 + 2 \cdot 5 + D = 0$. Stąd $D = -12$. Szukana prosta ma równanie $x + 2y - 12 = 0$.

3.17 (29, 40) i (41, 49).

Rozwiązanie. $K = (x_K, y_K)$, $L = (x_L, y_L)$.

$\overline{AB} = 3 \cdot \overline{AK}$, $\overline{AB} = [36, 27]$, $3 \cdot \overline{AK} = 3 \cdot [x_K - 17, y_K - 31] = [3x_K - 51, 3y_K - 93]$. Zatem $3x_K - 51 = 36$ i $3y_K - 93 = 27$. Stąd $x_K = 29$ i $y_K = 40$.

Punkt L jest środkiem odcinka KB , więc $x_L = \frac{29+53}{2} = 41$ i $y_L = \frac{40+58}{2} = 49$.



3.18 $a = 2,5$, $b = -1,25$.

3.19 $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{BD})$, $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$.

3.20 a) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$; b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

3.21 a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$; b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 4$; c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 > 4$.

3.22 a) $(0, 0)$, 2; b) $(4, -1)$, $\sqrt{5}$; c) $(0, 1)$, 1; d) $(2, -3)$, $2\sqrt{3}$; e) $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie. c) Dodając do obu stron równości liczbę 1, otrzymamy równanie $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia dostajemy $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Zatem jest to równanie okręgu o środku $S = (0, 1)$ i promieniu $r = 1$.

e) $x^2 + y^2 + 3x - y + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}y + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 = (x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + 1$. Dane równanie możemy więc zapisać w postaci $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{6}{4}$. Środkiem tego okręgu jest punkt $S = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, a promień ma długość $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3.23 a) Okrąg o środku $S = (1, 1)$ i promieniu $\sqrt{2}$; b) okrąg o środku $S = (0, 0)$ i promieniu 2; c) punkt $(-2, -3)$; d) parabola;

e) hiperbola; f) suma dwóch prostych o równaniach $x = 0$ i $y = 0$; g) suma dwóch prostych o równaniach $y = x$ i $y = -x$; h) suma

dwóch prostych o równaniach $3x - 2y = 0$ i $3x + 2y = 0$; i) suma dwóch prostych o równaniach $x + y = 0$ i $x = 0$; j) prosta $x - 2y = 0$.

k) suma dwóch prostych o równaniach $x = 3$ i $y = 1$.

Rozwiązanie. g) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x - y = 0 \vee x + y = 0)$. Równania $x - y = 0$ i $x + y = 0$ są równaniami prostych, więc zbiór wszystkich punktów (x, y) , których współrzędne spełniają równanie $x^2 = y^2$ jest sumą dwóch prostych.

j) $x^2 + 4y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$. Równanie $x - 2y = 0$ jest równaniem prostej.

k) $xy + 3 = x + 3y \Leftrightarrow xy - 3y - x + 3 = 0 \Leftrightarrow y(x - 3) - (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 3 = 0 \vee y - 1 = 0)$. Zatem zbiór wszystkich punktów (x, y) , których współrzędne spełniają równanie $xy - 3y - x + 3 = 0$ jest sumą dwóch prostych.

3.24 a) Zewnętrzne koła o środku $(-1, 0)$ i promieniu 1;

b) koło o środku $(1, -2)$ i promieniu 2;

c) II i IV ćwiartka układu współrzędnych wraz z osiami układu;

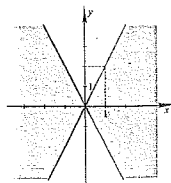
d) Rys. 9/2.

3.25 a) Okręgi mają dwa punkty wspólne; b) okręgi styczne wewnętrznie;

c) okręgi rozłączne i jeden z nich zawiera się w kole, którego brzegiem jest drugi okrąg.

Rozwiązanie. a) Środkami okręgów są punkty $S_1 = (1, 1)$ i $S_2 = (4, 0)$. $|S_1S_2| = \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$.

Promienie okręgów mają długości $r_1 = 4$ i $r_2 = 1$. $|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$, więc okręgi przecinają się.



Rys. 9/2

b) Równanie $x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x - 120 = 0$ sprowadzamy do postaci $(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 128$. Środkami okręgów są punkty $S_1 = (2\sqrt{2}, 0)$ i $S_2 = (0, 0)$, więc długość odcinka S_1S_2 równa jest $2\sqrt{2}$. Promienie okręgów mają długości $r_1 = 8\sqrt{2}$ i $r_2 = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. $|r_1 - r_2| = 2\sqrt{2} = |S_1S_2|$, zatem okręgi są styczne wewnętrznie.

3.26 a) $(2, 1)$ i $(4, 0)$; b) z osią OX : $(-1, 0)$ i $(4, 0)$, z osią OY : $(0, \frac{-5-\sqrt{41}}{2})$ i $(0, \frac{-5+\sqrt{41}}{2})$.

Rozwiązanie. Aby znaleźć współrzędne punktów wspólnych okręgu i prostej należy rozwiązać układ równań, którego jednym równaniem jest równanie okręgu, a drugim równanie prostej.

a) Rozwiążemy układ równań ① $x + 2y - 4 = 0$ i ② $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$. Z równania ① wyznaczamy x : $x = 4 - 2y$ i podstawiamy do równania ②: $(4 - 2y)^2 + y^2 - 3(4 - 2y) + 5y - 4 = 0$. Otrzymane równanie kwadratowe sprowadzamy do postaci $5y(y - 1) = 0$; spełniają je liczby $y = 0$ i $y = 1$. Jeśli $y = 0$, to $x = 4$, a jeśli $y = 1$, to $x = 2$. Rozwiązaniami układu równań ① i ② są więc pary $(x, y) = (4, 0)$ i $(2, 1)$. Zatem punktami wspólnymi danego okręgu i danej prostej są punkty $A = (4, 0)$ i $B = (2, 1)$.

b) Aby znaleźć punkty wspólne danego okręgu i osi OX , rozwiążemy układ równań ① $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ i ② $y = 0$. Podstawiając $y = 0$ do równania ①, otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 - 3x - 4 = 0$, które spełniają liczby $x = -1$ i $x = 4$. Rozwiązaniami układu równań ① i ② są więc pary $(x, y) = (-1, 0)$, $(x, y) = (4, 0)$. Zatem punktami wspólnymi danego okręgu i danej prostej są punkty $A = (-1, 0)$ i $B = (4, 0)$. Aby znaleźć punkty wspólne danego okręgu i osi OY , wystarczy rozwiązać układ równań $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ i $x = 0$.

3.27 a) $x - 2y - 5 = 0$; b) $2x - y + 5 = 0$ lub $-2x - y + 5 = 0$; c) $2x - y + 5 = 0$ lub $2x - y - 5 = 0$; d) $x + 2y + 5 = 0$ lub $x + 2y - 5 = 0$.

Rozwiązanie. Środkiem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 5$ jest punkt $S = (0, 0)$, a długość promienia tego okręgu jest równa $\sqrt{5}$.

a) Punkt A należy do danego okręgu, $\overline{SA} = [1, -2]$. Styczna w punkcie A jest prostopadła do wektora $\overline{SA}$, więc jej równanie można zapisać w postaci $x - 2y + C = 0$. Punkt $A = (1, -2)$ należy do stycznej, więc $1 - 2(-2) + C = 0$. Stąd $C = -5$. Styczna ma równanie $x - 2y - 5 = 0$.

b) Styczna przechodzi przez punkt $B = (0, 5)$, więc jej równanie można zapisać w postaci $y = ax + 5$. Odległość środka okręgu od stycznej jest równa długości promienia, zatem $\frac{|a \cdot 0 - 0 + 5|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$. Stąd otrzymujemy równość $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{5}$, którą spełniają liczby $a = -2$ oraz $a = 2$. Równania prostych przechodzących przez punkt B i stycznych do danego okręgu: $y = -2x + 5$, $y = 2x + 5$.

c) Styczna jest równoległa do prostej o równaniu $2x - y = 0$, więc jej równanie można zapisać w postaci $2x - y + C = 0$. Odległość środka okręgu od stycznej jest równa długości promienia, zatem $\frac{|2 \cdot 0 - 0 + C|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$. Stąd otrzymujemy równość $|C| = 5$, którą spełniają liczby $C = -5$ oraz $C = 5$. Równania prostych równoległych do prostej $2x - y = 0$ i stycznych do danego okręgu: $2x - y - 5 = 0$, $2x - y + 5 = 0$.

3.28 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Rozwiązanie. Środkiem S okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych jego boków.

Znajdujemy równanie symetralnej boku AB .

I SPOSÓB. (poziom podstawowy) Prosta AB ma równanie $y = -x + 6$. Równanie symetralnej AB możemy więc zapisać w postaci $y = x + b$. Punkt $K = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ jest środkiem odcinka AB i należy do symetralnej, więc $\frac{3}{2} = \frac{9}{2} + b$. Stąd $b = -3$. Symetralna boku AB ma więc równanie ① $y = x - 3$.

II SPOSÓB. (poziom rozszerzony) $\overline{AB} = [7, -7] = 7 \cdot [1, -1]$, więc równanie symetralnej ma postać $x - y + c = 0$. Środkiem odcinka AB jest punkt $K = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$, zatem $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} + c = 0$, stąd $c = -3$; symetralna boku AB ma równanie ① $x - y - 3 = 0$.

W ten sam sposób znajdujemy równanie symetralnej boku AC : ② $2x - y - 7 = 0$.

Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $x = 4$, $y = 1$, więc środkiem okręgu jest punkt $S = (4, 1)$.

Obliczamy kwadrat długości promienia okręgu: $r^2 = |SC|^2 = (9 - 4)^2 = 25$.

Okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

3.29 $C = (1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$ lub $C = (1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$.

Rozwiązanie. Punkt C jest punktem wspólnym symetralnej odcinka AB i danego okręgu. Symetralna odcinka AB określona jest równaniem

$x - y + 1 = 0$. Aby znaleźć punkty przecięcia symetralnej AB i danego okręgu, należy rozwiązać układ równań ① $x - y + 1 = 0$ i

② $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$.

Wyznaczając $y = x + 1$ z równania ① i podstawiając do ②, otrzymamy równanie kwadratowe $x^2 + (x + 1)^2 - 2x - 4(x + 1) - 5 = 0$, które spełniają liczby $x = 1 - \sqrt{5}$ i $x = 1 + \sqrt{5}$. Zatem rozwiązaniami układu równań ① i ② są pary liczb $(1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$ i $(1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$. Otrzymane pary są współrzędnymi trzeciego wierzchołka trójkąta ABC .

3.30 a) $A' = (12, 6)$; b) $A' = (-12, -6)$; c) $A' = (4, 2)$; d) $A' = (20, 4)$; e) $A' = (4, -2)$.

Rozwiązanie. $A' = (p, q)$ – obraz punktu A .

c) $\overline{SA} = [12, 6]$, $\overline{SA'} = [p, q]$. $\overline{SA'} = \frac{1}{3} \cdot \overline{SA} = \frac{1}{3} \cdot [12, 6] = [4, 2]$. Zatem $p = 4$ i $q = 2$.

e) $\overline{SA} = [2, 2]$, $\overline{SA'} = [p - 10, q - 4]$. $\overline{SA'} = -3 \cdot \overline{SA} = -3 \cdot [2, 2] = [-6, -6]$. Zatem $p - 10 = -6$ i $q - 4 = -6$. Stąd $p = 4$ i $q = -2$.

3.31 Środek: (8, 11), promień: 7,5.

Rozwiązanie. $x^2 + y^2 - 6x + 8y = (x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16$. Dane równanie okręgu możemy więc zapisać w postaci $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$. Środkiem tego okręgu jest punkt $O = (3, -4)$, a promień ma długość $r = 5$.

Promień okręgu o ma długość $|k| \cdot r = 1,5 \cdot 5 = 7,5$. Środkiem okręgu o jest punkt $O' = (p, q)$ – obraz punktu O w jednokładności o środku $S = (5, 2)$ i skali $k = -1,5$. $\vec{SO} = [3-5, -4-2] = [-2, -6]$. $\vec{SO'} = [p-5, q-2]$.

Wiemy, że $\vec{SO'} = k \cdot \vec{SO}$, więc $[p-5, q-2] = -1,5[-2, -6] = [3, 9]$. Stąd $p-5=3$ i $q-2=9$. Zatem $O' = (8, 11)$.

3.32 Jest izometria.

Rozwiązanie. Aby sprawdzić, czy przekształcenie płaszczyzny jest izometrią, należy sprawdzić, czy przekształcenie zachowuje odległość, tzn. czy odległość dowolnych dwóch punktów płaszczyzny równa jest odległości ich obrazów. Weźmy dowolne dwa punkty $K = (a, b)$, $L = (c, d)$ i znajdziemy ich obrazy $K' = P(a, b) = (-a, b+1)$, $L' = P(c, d) = (-c, d+1)$.

Sprawdzamy, czy $|K'L'| = |KL|$. $|K'L'| = \sqrt{[-(-c) - (-a)]^2 + [d+1 - (b+1)]^2} = \sqrt{[(a-c)]^2 + (d-b)^2} = |KL|$, więc przekształcenie jest izometrią.

3.33 a) $A' = (5, 3\frac{2}{5})$; b) $A' = (-5\frac{1}{5}, 7\frac{3}{5})$; c) $A' = (2\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

Rozwiązanie. $A' = (p, q)$ – obraz punktu A w danym przekształceniu.

a) Jeśli punkt A' jest obrazem punktu A w symetrii środkowej o środku S , to punkt S jest środkiem odcinka AA' . Korzystamy ze wzorów na współrzędne środka odcinka: $2\frac{1}{2} = \frac{0+p}{2}$ i $3\frac{1}{3} = \frac{3+q}{2}$. Stąd $p=5$ i $q=1\frac{1}{3}$. Zatem $A' = (5, 1\frac{1}{3})$.

b) $\vec{AA'} = [p, q-3] = \vec{v} = [-5\frac{1}{5}, 4\frac{3}{5}]$. Stąd $p = -5\frac{1}{5}$ i $q-3 = 4\frac{3}{5}$. Zatem $A' = (-5\frac{1}{5}, 7\frac{3}{5})$.

c) Znajdujemy równanie prostej k przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x$: równanie prostej k ma postać $y = -0,5x + b$, do prostej k należy punkt A , więc $b = 3$, a prosta k ma równanie $y = -0,5x + 3$.

Znajdujemy punkt wspólny S obu prostych, rozwiązując układ równań $y = -0,5x + 3$ i $y = 2x$. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x = \frac{6}{5}$ i $y = \frac{12}{5}$, więc $S = (\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$. Punkt S jest środkiem odcinka AA' . Korzystamy ze wzoru na współrzędne środka odcinka: $\frac{6}{5} = \frac{0+p}{2}$ i $\frac{12}{5} = \frac{3+q}{2}$.

Stąd $p = \frac{12}{5}$ i $q = \frac{9}{5}$. Zatem $A' = (\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$.

3.34 a) $y = 2x + 1$; b) $y = 2x + 1$; c) $y = 0,5x$.

Rozwiązanie. a) Skorzystamy z własności symetrii środkowej: *obrazem prostej l w symetrii środkowej jest prosta równoległa do l* .

Znajdziemy obraz $A' = (p, q)$ dowolnego punktu należącego do danej prostej, np. punktu $A = (0, -3)$. Punkt $S = (2, 3)$ jest środkiem odcinka AA' , więc $2 = \frac{p}{2}$ i $3 = \frac{q-3}{2}$. Stąd $p = 4$ i $q = 9$. Zatem $A' = (4, 9)$. Szukana prosta przechodzi przez punkt A' i jej równanie ma postać $y = 2x + b$.

Zatem $b = 1$, a prosta, która jest obrazem danej prostej, ma równanie $y = 2x + 1$.

b) Równanie prostej, która jest obrazem prostej o równaniu $y = 2x - 3$: $y = 2(x + 1\frac{1}{4}) - 3 + 1\frac{1}{4}$, czyli $y = 2x + 1$.

c) Obrazem prostej w symetrii osiowej jest prosta, więc aby znaleźć obraz prostej, wystarczy znaleźć obrazy dwóch jej punktów.

Proste o równaniach $y = 2x - 3$ i $y = x - 1$ przecinają się w punkcie $P = (2, 1)$, więc obrazem punktu P w symetrii względem prostej $y = x - 1$ jest punkt P . Znajdziemy obraz $A' = (p, q)$ dowolnego punktu różnego od P należącego do prostej $y = 2x - 3$, np. punktu $A = (0, -3)$.

Prosta k prostopadła do prostej $y = x - 1$ i przechodząca przez punkt A ma równanie $y = -x - 3$. Punktem wspólnym prostej k i prostej $y = x - 1$ jest punkt $S = (-1, -2)$. S jest środkiem odcinka AA' , więc $-1 = \frac{p}{2}$ i $-2 = \frac{q-3}{2}$. Stąd $p = -2$ i $q = -1$. Zatem $A' = (-2, -1)$. Znając współrzędne punktów P i A' znajdujemy równanie prostej PA' : $y = 0,5x$.

3.35 Przekształceniem, w którym obrazem paraboli p jest parabola q jest a) przesunięcie o wektor $[-2, -3]$; b) symetria osiowa względem prostej $y = -1$.

Rozwiązanie. a) Musimy uzasadnić, że istnieje izometria (np. symetria środkowa, symetria osiowa, przesunięcie równoległe), w której obrazem paraboli o równaniu $y = x^2$ jest parabola o równaniu $y = x^2 + 4x + 1$.

Sprawdzamy wzór paraboli $y = x^2 + 4x + 1$ do postaci kanonicznej: $y = (x+2)^2 - 3$. Parabole o równaniu $y = (x+2)^2 - 3$ otrzymamy przesuwając parabolę o równaniu $y = x^2$ o wektor $[-2, -3]$, więc parabole są przystające.

3.36 9.

Rozwiązanie. Obrazem koła $x^2 + y^2 + 6y \leq 0$ w dowolnej izometrii jest koło o takim samym promieniu, więc pole figury F jest równe polu danego koła. Nierówność $x^2 + y^2 + 6y \leq 0$ sprowadzamy do postaci $x^2 + (y+3)^2 \leq 9$. Zatem promień koła ma długość równą 3, a jego pole jest równe 9 π .

STEREOMETRIA

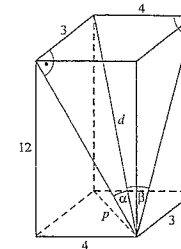
4.1 22 ściany boczne.

Wskazówka. Ile krawędzi ma graniastosłup, którego podstawą jest wielokąt o n bokach?

4.2 a) 13; b) $\frac{3}{13}$ i $\frac{4}{13}$.

Rozwiązanie. a) Obliczamy długość przekątnej podstawy: $p^2 = 3^2 + 4^2$, stąd $p = 5$. Obliczamy długość przekątnej graniastosłupa: $d^2 = 5^2 + 12^2$, stąd $d = 13$.

b) Kreśląc z tego samego wierzchołka przekątną prostopadłościannu oraz przekątne ścian bocznych otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne, w których przekątna prostopadłościannu jest przeciwprostokątną (patrz rysunek obok). Wobec tego $\sin \alpha = \frac{3}{d} = \frac{3}{13}$, $\sin \beta = \frac{4}{d} = \frac{4}{13}$.



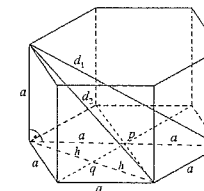
4.3 $2a$ i $a\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. a) Sześciokąt foremny o boku a można podzielić na sześć trójkątów równobocznych o boku a (patrz rysunek obok). Wyznaczamy długości przekątnych sześciokąta: dłuższa przekątna $p = 2a$, krótsza przekątna

$$q = 2h = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Korzystając z tw. Pitagorasa obliczamy długości przekątnych graniastosłupa. Dłuższa przekątna: $d_1^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$, stąd $d_1 = a\sqrt{5}$, krótsza przekątna:

$$d_2^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2, \text{ stąd } d_2 = 2a.$$



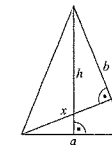
4.4 23 wierzchołki.

Wskazówka. Ile krawędzi ma ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt o n bokach?

4.5

Rozwiązanie. e) Rysunek obok przedstawia ścianę boczną ostrosłupa. Korzystając ze

wzoru na pole trójkąta otrzymujemy równość $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bx$, stąd $\frac{h}{b} = \frac{x}{a}$.



4.6 a) $3\sqrt{2}$; b) 3; c) $\sqrt{6}$.

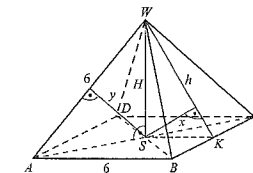
Rozwiązanie. a) $|AC| = 6\sqrt{2}$, więc $|AS| = 3\sqrt{2}$. Korzystamy z tw. Pitagorasa dla trójkąta

ASW : $H^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18$, stąd $H = 3\sqrt{2}$. b) Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta:

$$\frac{1}{2}|AS| \cdot H = \frac{1}{2}|AW| \cdot y, \quad 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6y, \text{ stąd } y = 3.$$

c) Korzystamy z tw. Pitagorasa dla trójkąta SKW : $h^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2$, stąd $h = 3\sqrt{3}$. Korzystamy ze wzoru na pole

$$\text{trójkąta: } \frac{1}{2}|SK| \cdot H = \frac{1}{2}|KW| \cdot x, \quad 3 \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3}y, \text{ stąd } y = \sqrt{6}.$$



4.7

Rozwiązanie. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, spodek wysokości ostrosłupa dzieli wysokość podstawy na odcinki o długościach

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ i } \frac{a\sqrt{3}}{6}. \quad \text{c) } \cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{b} = \frac{a\sqrt{3}}{3b}, \quad \text{d) } \cos \beta = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h} = \frac{a\sqrt{3}}{6h}.$$

4.8 a) $\frac{12}{13}$; b) $\frac{10\sqrt{3}}{39}$; c) $\frac{5\sqrt{3}}{36}$; d) $\frac{119}{388}$.

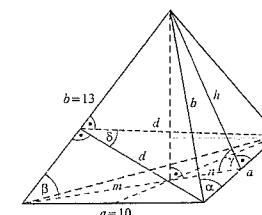
Rozwiązanie. a) Obliczamy wysokość ściany bocznej: $h^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, stąd $h = 12$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} = \frac{12}{13}, \quad \text{b) } m = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \beta = \frac{m}{b} = \frac{10\sqrt{3}}{39}.$$

c) $n = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6}$, $\cos \gamma = \frac{n}{h} = \frac{5\sqrt{3}}{36}$. d) Obliczamy wysokość d ściany bocznej:

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bd, \text{ stąd } d = \frac{ah}{b} = \frac{120}{13}. \text{ Korzystamy z tw. kosinusów: } a^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos \alpha.$$

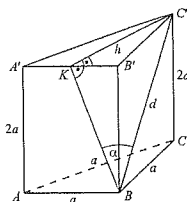
$$100 = \frac{28800}{169}(1 - \cos \alpha), \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{119}{288}.$$



4.9 $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

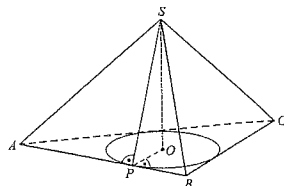
Rozwiązanie. Rozpatrzmy kąt nachylenia przekątnej BC' do ściany $ABB'A'$. Aby zaznaczyć ten kąt na rysunku wyznaczamy rzut prostokątny punktu C' na płaszczyznę ściany $ABB'A'$ – punkt K oraz kreślimy odcinek BK . Ponieważ odcinek KC' jest prostopadły do ściany $ABB'A'$, więc jest prostopadły do każdego odcinka zawartego w płaszczyźnie tej ściany i przechodzącego przez punkt K , w szczególności $KC' \perp A'B'$ i $KC' \perp BK$. Aby obliczyć sinus kąta α obliczamy najpierw h oraz d :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad d^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2, \quad \text{stad } d = a\sqrt{5}. \quad \sin \alpha = \frac{h}{d} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$



4.10

Rozwiązanie. Należy wykazać, że odcinek SP jest prostopadły do krawędzi AB . Punkt O jest rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę podstawy ostrosłupa (bo SO jest wysokością ostrosłupa), więc odcinek OP jest rzutem prostokątnym odcinka SP na tę płaszczyznę. Odcinek OP jest prostopadły do krawędzi AB , więc z tw. o trzech prostych prostopadłych wynika, że również odcinek SP jest prostopadły do krawędzi AB .



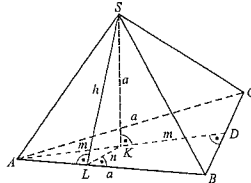
4.11 $\frac{a^2\sqrt{67}}{16}$.

Rozwiązanie. Odcinek SL jest wysokością ściany ABS , jest więc prostopadły do krawędzi AB . Z tw. o trzech prostych prostopadłych wynika, że rzut prostokątny odcinka SL na płaszczyznę podstawy ostrosłupa, czyli odcinek KL , jest również prostopadły do krawędzi AB . Zatem trójkąt ALK jest prostokątny. Punkt K jest środkiem odcinka AD , więc $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

W trójkącie ALK $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{n}{m}$, stad $n = \frac{1}{2}m = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. Korzystając z tw. Pitagorasa

$$\text{obliczamy wysokość } h \text{ ściany } ABS: h^2 = n^2 + a^2 = \frac{67}{64}a^2, \quad \text{stad } h = \frac{a\sqrt{67}}{8}.$$

$$\text{Pole ściany } ABS: P_{ABS} = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{67}}{16}.$$



4.12 a) $h = \frac{p}{4a} - \frac{1}{2}a$; b) $a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$.

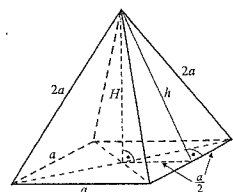
4.13 $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: a – krawędź podstawy, p – przekątna podstawy, H – wysokość graniastosłupa. Wykonaj rysunek graniastosłupa. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{p}$, stad $H = 4\sqrt{3}$. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{p}{8}$, stad $p = 4$. Ponieważ $p = a\sqrt{2}$, więc $a\sqrt{2} = 4$, stad $a = 2\sqrt{2}$. Obliczamy objętość graniastosłupa: $V = a^2H = (2\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

4.14 a) $a^2\sqrt{15}$; b) $\frac{\sqrt{14}}{6}a^3$.

Rozwiązanie. Obliczamy wysokość ściany bocznej: $h^2 = (2a)^2 - (\frac{a}{2})^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}$, stad $h = \frac{a\sqrt{15}}{2}$. Obliczamy wysokość ostrosłupa: $H^2 = h^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{15a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{14a^2}{4}$, stad $H = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Możemy teraz obliczyć pole powierzchni bocznej P_b oraz objętość V ostrosłupa:

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 2a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} = a^2\sqrt{15}, \quad V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}.$$



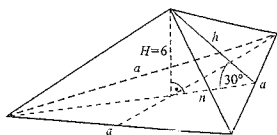
4.15 a) $648\sqrt{3}$; b) 648.

Rozwiązanie. Obliczymy długość krawędzi podstawy oraz długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{6}{h}, \quad \text{stad } h = 12. \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{n}, \quad \text{stad } n = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

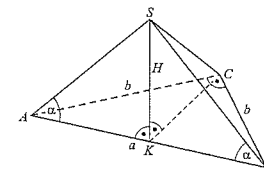
$$\text{Ponieważ } n = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \text{więc } 6\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \text{stad } a = 36.$$

a) Objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 648\sqrt{3}$. b) Pole powierzchni bocznej ostrosłupa: $P_b = 3 \cdot \frac{1}{2}ah = 648$.



4.16 $\frac{1}{24}a^3 \tan \alpha$.

Rozwiązanie. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy te same kąty. Z tw. o ostrosłupach (patrz str. 69) wynika, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Ponieważ podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny, więc spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Stad wnioskujemy dalej, że kąt nachylenia krawędzi AS do podstawy pokrywa się z kątem płaskim ściany bocznej ABS (podobnie w przypadku krawędzi BS). Obliczamy wysokość ostrosłupa: $\tan \alpha = \frac{H}{0.5a}$, stad $H = \frac{a}{2} \tan \alpha$. Obliczamy krawędź podstawy b : $a = b\sqrt{2}$, stad $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (zauważ, że trójkąt ABC jest „połowką”

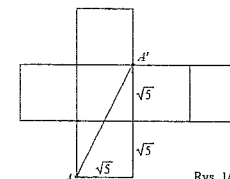


kwadratu). Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha = \frac{1}{24}a^3 \tan \alpha$.

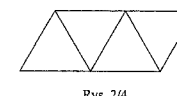
4.17 Siatka sześciennu: Rys. 1/4; odległość: 5 m.

Rozwiązanie. Drogę jaką przebyła mrówka po powierzchni sześciennu pokazano na rysunku 1/4.

$$AA' = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (m)}.$$



Rys. 1/4



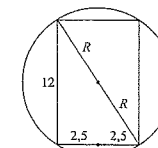
Rys. 2/4

4.18 Siatka czworoscianu: Rys. 2/4.

4.19 a) trójkąt równoramienny; b) trójkąt równoramienny; c) trójkąt równoramienny; d) trójkąt; e) trapez równoramienny; f) pięciokąt.

4.20 6,5 cm.

Rozwiązanie. Na rysunku obok pokazano przekrój osiowy kuli i wpisanego w nią walca. Z tw. Pitagorasa: $(2R)^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, stad $2R = 13$, czyli $R = 6,5 \text{ (cm)}.$



4.21 $\frac{4}{\pi}$ (jeżeli wysokość walca ma długość 12), $\frac{6}{\pi}$ (jeżeli wysokość walca ma długość 8).

Rozwiązanie. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem o bokach h i $2\pi r$, gdzie h – wysokość walca, r – promień podstawy walca. Jeżeli wysokość walca jest równa 12, to $2\pi r = 8$, stad $r = \frac{4}{\pi}$. Jeżeli wysokość walca jest równa 8, to $2\pi r = 12$, stad $r = \frac{6}{\pi}$.

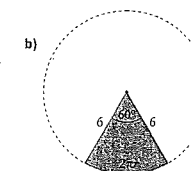
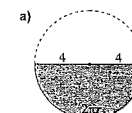
4.22 a) 2; b) 1.

Rozwiązanie. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła o promieniu równym długości tworzącej stożka. Długość łuku tego wycinka jest równa obwodowi podstawy stożka, czyli $2\pi r$, gdzie r jest promieniem podstawy stożka. (Uwaga: kąt środkowy wycinka będącego rozwinięciem powierzchni bocznej stożka nie jest równy kątowi rozwarcia stożka).

a) Ponieważ wycinek jest półkołem o promieniu 4, to długość łuku tego wycinka jest równa połowie obwodu koła o promieniu 4, czyli $\frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot 4) = 4\pi$. Wobec tego $2\pi r = 4\pi$, stad $r = 2$.

b) Długość łuku wycinka jest równa $\frac{1}{6} \cdot (2\pi \cdot 6) = 2\pi$.

Wobec tego $2\pi r = 2\pi$, stad $r = 1$.



4.23 a) $l = \frac{p}{\pi r} - r$; b) $R = \sqrt{\frac{3V}{4\pi}}$.

4.24 $36\pi \text{ cm}^3$.

Rozwiązanie. Pole powierzchni kuli: $4\pi R^2 = 36\pi$, $R^2 = 9$, stad $R = 3$. Objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

4.25 Pole: $18\pi(1 + 2\sqrt{3})$, objętość: $54\sqrt{3}\pi$.

Rozwiązanie. Obliczamy wysokość walca: $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{H}{6}$, stad $H = 6\sqrt{3}$.

Obliczamy pole powierzchni całkowitej i objętość walca:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi rH = 2\pi \cdot 9 + 6\pi \cdot 6\sqrt{3} = 18\pi + 36\pi\sqrt{3} = 18\pi(1 + 2\sqrt{3}), \quad V = \pi r^2 H = \pi \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3}\pi.$$



4.26 Pole: $\pi H^2 \frac{\lg \alpha}{\cos \alpha}$. Objętość: $\frac{1}{3} \pi H^3 \lg^2 \alpha$.

Rozwiązanie. Obliczamy tworzącą oraz promień podstawy stożka: $\cos \alpha = \frac{H}{l}$, stąd $l = \frac{H}{\cos \alpha}$.

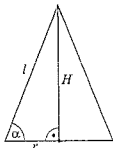
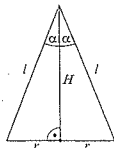
$\lg \alpha = \frac{r}{H}$, stąd $r = H \lg \alpha$. Obliczamy pole powierzchni bocznej i objętość stożka:

$$P_b = \pi r l = \pi H \lg \alpha \frac{H}{\cos \alpha} = \pi H^2 \frac{\lg \alpha}{\cos \alpha}, \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi H^2 \lg^2 \alpha H = \frac{1}{3} \pi H^3 \lg^2 \alpha.$$

4.27 60°.

Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień podstawy stożka, l – tworząca stożka.

$$\pi r l = 2\pi r^2, \quad l = 2r, \quad \text{stad} \quad \frac{r}{l} = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{l} = \frac{1}{2}, \quad \text{więc} \quad \alpha = 60^\circ.$$



ZADANIA OPTIMALIZACYJNE

5.1 -5 i 5.

Rozwiązanie. x – mniejsza liczba, y – większa liczba. Iloczyn $l = xy$.

Wiemy, że $y = x + 10$, więc iloczyn l możemy wyrazić za pomocą zmiennej x .

Otrzymamy wówczas funkcję kwadratową $l(x) = (x+10) \cdot x$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Wzór funkcji kwadratowej l zapisujemy w postaci ogólnej: $l(x) = x^2 + 10x$.

Funkcja $l(x) = x^2 + 10x$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $x_w = -\frac{10}{2} = -5$. Szukane liczby, to $x = -5$ i $y = 5$.

5.2 18 cm².

Rozwiązanie. a – długość podstawy trójkąta, h – długość wysokości poprowadzonej do boku a .

Pole trójkąta $P = 0,5ah$. Wiemy, że $a = 12 - h$, więc pole trójkąta możemy wyrazić jako funkcję zmiennej h .

Otrzymamy wówczas funkcję $P(h) = 0,5(12 - h) \cdot h$, gdzie $h \in D = (0, 12)$.

Wzór funkcji kwadratowej P zapisujemy w postaci ogólnej: $P(h) = -0,5h^2 + 6h$.

Funkcja $P(h) = -0,5h^2 + 6h$ największą wartość przyjmuje dla argumentu $h_w = -\frac{6}{2 \cdot (-0,5)} = 6 \in D$ i wartość ta jest równa $P(6) = 18$ (cm²).

5.3 $P = (1, 1)$.

Rozwiązanie. $P = (x, y)$, $s = |AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 = x^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 18$.

Prosta zawierająca dwusieczną kąta prostego ma równanie $y = x$, zatem współrzędne punktu P są równe. Możemy więc sumę s zapisać jako funkcję zmiennej x : $s(x) = 6x^2 - 12x + 18$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.

Funkcja s najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $x_w = 1 \in \mathbb{R}_+$. Szukany punkt: $P = (1, 1)$.

5.4 250 cm³.

Rozwiązanie. a – długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, h – długość wysokości prostopadłościanu.

Pole powierzchni bocznej prostopadłościanu $P = 4ah$. Wiemy, że $8a + 4h = 80$, stąd mamy $h = 20 - 2a$.

Możemy teraz wyrazić pole P jako funkcję zmiennej a : $P(a) = 4a(20 - 2a)$, gdzie $a \in D = (0; 10)$.

Funkcja $P(a) = -8a^2 + 80a$ największą wartość przyjmuje dla argumentu $a_w = 5 \in D$. Zatem krawędź podstawy ma długość 5 cm, a wysokość 10 cm. Pole powierzchni tego prostopadłościanu jest równe $2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 250$ (cm³).

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

6.1 a) 24; b) 720; c) 9; d) 990; e) 56; f) 70; g) 870.

Rozwiązanie. a) $\frac{9!}{8!} = \frac{8! \cdot 9}{8!} = 9$. d) $\frac{11!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{8!} = 990$. e) $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 5!} = 56$. f) $\frac{(7!)^2}{9!} = \frac{7! \cdot 7!}{9!} = \frac{7! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{7! \cdot 8 \cdot 9} = 70$.

g) $\frac{31! - 30!}{29! + 28!} = \frac{30! \cdot (31 - 1)}{28! \cdot (29 + 1)} = 29 \cdot 30 = 870$.

6.2 a) $(n+1)(n+2)$; b) $n(n+2)$; c) $4n^2(2n-2)!$.

Rozwiązanie. a) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n!} = (n+1)(n+2)$. b) $\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n(n+1)}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot [n + n(n+1)]}{(n-1)!} = n^2 + 2n$.

c) $(2n)! + (2n-1)! + (2n-2)! = (2n-2)! \cdot (2n-1) \cdot 2n + (2n-2)! \cdot (2n-1) + (2n-2)! = (2n-2)! \cdot [(2n-1) \cdot 2n + 2n - 1 + 1] = (2n-2)! \cdot 4n^2$.

6.3 a) 35; b) 190; c) 17; d) 1; e) 1.

Rozwiązanie. a) $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6 \cdot 4!} = 35$.

6.4 a) $n=5$; b) $n=2$; c) $n=6$; d) $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$; e) $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Rozwiązanie. a) Założenia: $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-1)n}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}$.

Rozwiązaniami równania kwadratowego $\frac{(n-1)n}{2} = 10$ są liczby 5 i -4. Uwzględniając założenia, stwierdzamy, że $n=5$.

b) Założenia: $n \in \mathbb{N}$. $\binom{n+6}{2} = \frac{(n+6)!}{2! \cdot (n+4)!} = \frac{(n+4)! \cdot (n+5)(n+6)}{2 \cdot (n+4)!} = \frac{(n+5)(n+6)}{2}$.

Rozwiązaniami równania kwadratowego $\frac{(n+5)(n+6)}{2} = 28$ są liczby 2 i -13. Uwzględniając założenia, stwierdzamy, że $n=2$.

c) Założenia: $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$. $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{(n-3)! \cdot (n-2)(n-1)n}{6 \cdot (n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$. Równanie $\frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 20$ sprowadzamy do postaci $n^3 - 3n^2 + 2n - 120 = 0$. Jednym z rozwiązań równania $n^3 - 3n^2 + 2n - 120 = 0$ jest liczba $n=6$, zatem równanie to możemy zapisać w postaci $(n-6)(n^2 + 3n + 20) = 0$. Trójmian $n^2 + 3n + 20$ nie ma pierwiastków, więc jedynym rozwiązaniem równania $n^3 - 3n^2 + 2n - 120 = 0$ jest $n=6$.

d) Założenia: $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. Z a) mamy $\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$. Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $\frac{(n-1)n}{2} < 21$ jest przedział $(-6; 7)$.

Wiemy, że $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$, więc daną nierówność spełniają liczby 2, 3, 4, 5, 6.

e) Założenia: $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. Liczba $\binom{n}{2}$ jest dodatnia, więc możemy obie strony danej nierówności pomnożyć przez liczbę $3 \cdot \binom{n}{2}$ otrzymując

nierówność $3 \cdot \binom{5}{2} > 2 \cdot \binom{n}{2}$. $\binom{5}{2} = 10$ i z a) mamy $\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$. Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $30 > (n-1)n$ jest przedział

$(-5; 6)$. Wiemy, że $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$, zatem szukany przedział są 2, 3, 4, 5.

6.5 a) $30 \cdot 26 (=780)$; b) $10 \cdot 18 (=180)$; c) $10 \cdot 8 + 20 \cdot 18 (=440)$.

Rozwiązanie. Liczbę par obliczamy, wykorzystując regułę mnożenia.

a) W klasie IIIA jest 30 uczniów, a w klasie IIIB 26 uczniów, więc wyboru pary można dokonać na $30 \cdot 26$ sposobów.

b) W klasie IIIA jest 10 dziewcząt, a w klasie IIIB 18, więc wyboru pary można dokonać na $10 \cdot 18$ sposobów.

c) Parę, w której jest maturzystka z IIIA i maturzysta z IIIB można utworzyć na $10 \cdot 3$, a parę w której jest maturzystka z IIIA i maturzystka z IIIB utworzyć można na $20 \cdot 18$. Zatem wszystkich par składających się z dziewczyny i chłopaka jest $10 \cdot 8 + 20 \cdot 18$.

6.6 a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 (=625)$; b) $5 \cdot 4 \cdot 3 (=60)$; c) $\binom{5}{2} (=10)$.

Rozwiązanie. a) Każdy wyraz ciągu można wybrać na 5 sposobów, więc wszystkich ciągów jest $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$.

b) Pierwszy wyraz ciągu można wybrać na 5 sposobów, drugi na 4 sposoby (bo drugi wyraz nie może być taki sam, jak pierwszy), trzeci wyraz na 3 sposoby (bo trzeci wyraz musi być różny od wyrazów pierwszego i drugiego), więc wszystkich ciągów jest $5 \cdot 4 \cdot 3$.

c) Liczba dwuelementowych podzbiorów zbioru A jest równa $\binom{5}{2} = 10$.

6.7 a) $6^3 (=216)$; b) $\frac{6!}{4!} (=30)$; c) $6! (=720)$; d) $\binom{6}{4} (=15)$.

6.8 a) $5 \cdot 6^2 (=1080)$; b) $1 \cdot 6^3 (=216)$; c) $3^4 (=81)$; d) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 (=360)$.

Rozwiązanie. a) Cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów (cyfra tysięcy nie może być 0), każdą kolejną cyfrę można wybrać na 6 sposobów, więc można utworzyć $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3$ liczb.

b) Liczba będzie większa od 4999, jeżeli cyfra tysięcy będzie 5 (pozostałe cyfry mogą być dowolne). Zatem można zapisać $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ liczb większych od 4999.

c) Do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ należą trzy cyfry nieparzyste i trzy parzyste, więc każdą z cyfr możemy wybrać na trzy sposoby. Wobec tego takich liczb, że cyfra tysięcy i cyfra dziesiątek jest nieparzysta, a pozostałe dwie są parzyste jest $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$.

d) Cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów, cyfry setek i dziesiątek na 6 sposobów, a cyfrę jedności na dwa sposoby (aby liczba była podzielna przez 5, jej cyfra jedności musi być równa 0 lub 5). Zatem możemy zapisać $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2$ liczb podzielnych przez 5.

6.9 a) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 (=300)$; b) $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 (=60)$; c) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 (=36)$; d) 108.

Rozwiązanie. a) Cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów (bo cyfra tysięcy nie może być 0), cyfrę setek także na 5 sposobów (bo cyfra setek nie może być taka sama jak cyfra tysięcy, ale może być równa 0), cyfrę dziesiątek na 4 sposoby (bo musi być różna od cyfr tysięcy i setek), a cyfrę jedności na 3 sposoby. Możemy więc zapisać $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ liczb.

b) Liczba będzie większa od 4999, jeżeli cyfra tysięcy będzie 5. Zatem można zapisać $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ liczb większych od 4999.

c) Do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ należą trzy cyfry nieparzyste i trzy parzyste, zatem cyfry tysięcy i cyfry setek możemy wybrać na 3 sposoby, a cyfry dziesiątek i cyfrę jedności na 2 sposoby. Wobec tego możemy zapisać $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ liczb o danej własności.

d) Aby liczba była podzielna przez 5, jej cyfra jedności musi być równa 0 lub 5. Możemy zapisać $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$ liczb o różnych cyfrach, których cyfra jedności jest 0, oraz $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$ liczb o różnych cyfrach, których cyfra jedności jest 5. Zatem możemy zapisać $60 + 48$ liczb podzielnych przez 5.

6.10 a) 3^4 ; b) 2^4 ; c) $2^4 - 2$; d) $3^4 - (3^4 - 2) + 3$ ($= 36$).

Rozwiązanie. a) Pierwsze zdjęcie Twinky Winky może włożyć do jednej z trzech torebek – może więc dokonać wyboru na 3 sposoby. Wkładając każde następne zdjęcie, również może dokonać wyboru na 3 sposoby. Korzystając z reguły mnożenia stwierdzamy, że zdjęcia może rozmieścić w torebkach na $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ sposobów.

b) Każde z czterech zdjęć Twinky Winky może włożyć do jednej z dwóch torebek, zatem wszystkie zdjęcia może rozmieścić na $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ sposobów.

c) Cztery zdjęcia można rozmieścić w torebkach niebieskiej i złotej na 16 sposobów (patrz punkt b)). Wśród tych szesnastu sposobów są dwa takie, że wszystkie zdjęcia znajdują się w jednej torcebie. Zatem takich rozmieszczeń, że w czerwonej torcebie nie ma żadnego zdjęcia, a w niebieskiej i złotej co najmniej jedno, jest 14.

d) I SPOSÓB. Od liczby wszystkich rozmieszczeń (jest ich 81) musimy odjąć liczbę takich rozmieszczeń, że dokładnie jedna torebka jest pusta (jest ich $3 \cdot 14$ – patrz punkt c)) oraz takich, że wszystkie zdjęcia znajdują się w jednej torcebie (są 3 takie rozmieszczenia). Zatem Twinky Winky może rozmieścić zdjęcia na 36 sposobów.

II SPOSÓB. Twinky Winky może wybrać jedną z trzech torebek, do której włoży dwa zdjęcia. Do wybranej torebki może wybrać dwa zdjęcia

na $\binom{4}{2}$ sposoby. Pozostałe dwa zdjęcia może rozmieścić w dwóch torebkach na dwa sposoby. Wobec tego zdjęcia może rozmieścić na $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$ sposobów.

6.11 a) 8! ($= 40320$); b) 7! ($= 5040$); c) 7! ($= 5040$); d) $4! \cdot 4!$ ($= 576$); e) $2 \cdot 4! \cdot 4!$ ($= 1152$); f) $5 \cdot 4! \cdot 4!$ ($= 2880$).

Rozwiązanie. Kolejne tory na bieżni oznaczone są numerami 1, 2, ..., 8.

e) Jamajczycy muszą wylosować tory oznaczone tylko numerami nieparzystymi albo tory oznaczone tylko numerami parzystymi. Na 4! sposobów można rozlosować Jamajczycy tory z numerami nieparzystymi, wtedy zawodnicy z Europy mogą być ustawieni na pozostałych czterech torach na 4! sposobów. Zatem takich możliwych wyników losowania, że Jamajczycy pobiegą na torach 1, 3, 5, 7, a Europejczycy na torach 2, 4, 6, 8 jest $4! \cdot 4!$. Również $4! \cdot 4!$ jest takich wyników losowania, że to Jamajczycy pobiegą na torach o numerach parzystych. Szukana liczba wyników losowania jest więc równa $2 \cdot 4! \cdot 4!$.

f) Sprinterzy z Europy muszą pobiec na torach oznaczonych numerami 1, 3, 5, 7 albo 2, 4, 6, 8 albo 1, 3, 5, 8 albo 1, 4, 6, 8. W każdym z pięciu wymienionych przypadków na 4! sposobów można przyporządkować tory zawodnikom. Zatem liczba wszystkich szukanych wyników losowania jest równa $2 \cdot 4! \cdot 4!$.

6.12 a) $\binom{21}{3}$ ($= 1330$); b) $\binom{12}{3}$ ($= 220$); c) $\binom{12}{2} \cdot \binom{9}{1}$ ($= 594$); d) $\binom{12}{3} + \binom{12}{2} \cdot \binom{9}{1}$ ($= 814$); e) $\binom{21}{3} - \binom{12}{3}$ ($= 1110$).

Rozwiązanie. a) Do klasy III C uczęszcza 21 osób. Nieistotna jest tu kolejność, w jakiej wybierani są uczniowie, zatem liczba wyborów trzech osób jest równa liczbie 3-elementowych podzbiorów zbioru 21-elementowego, czyli $\binom{21}{3}$.

b) Liczba wyborów trzech dziewcząt jest równa liczbie 3-elementowych podzbiorów zbioru 12-elementowego, czyli $\binom{12}{3}$.

c) Nauczyciel ma dziewięć możliwości wyboru chłopca. Do wybranego chłopca może dokooptować dwie dziewczyny na $\binom{12}{2}$ sposobów. Zatem wszystkich trójek składających się z chłopca i dwóch

dziewcząt jest $9 \cdot \binom{12}{2}$.

d) Trójek składających się z samych dziewcząt jest $\binom{12}{3}$, a trójek składających się z chłopca i dwóch dziewczyn jest $9 \cdot \binom{12}{2}$. Zatem trójek, w których są co najmniej dwie dziewczyny, jest $\binom{12}{3} + 9 \cdot \binom{12}{2}$.

e) Liczbę trójek, w skład której będzie wchodził co najmniej jeden chłopiec, otrzymamy odejmując od liczby wszystkich trójek liczbę trójek składających się tylko z dziewczyn: $\binom{21}{3} - \binom{12}{3}$.

6.13 Np. 1) Ω – zbiór dwuwyrzawowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru Z lub to samo krócej: $\Omega = \{(a, b) : a, b \in Z \text{ i } a \neq b\}$, lub to samo inaczej (poziom rozszerzony): Ω – zbiór dwuwyrzawowych wariacji bez powtórzeń zbioru Z . Wówczas $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$.

2) (poziom rozszerzony) Ω – zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru Z lub to samo inaczej: Ω – zbiór dwuelementowych kombinacji zbioru Z , lub to samo krócej: $\Omega = \{ \{a, b\} : a, b \in Z \wedge a \neq b \}$. Wówczas $|\Omega| = \binom{6}{2} = 15$.

6.14 Np. Ω – zbiór trzywyrzawowych ciągów o wyrazach należących do zbioru Z lub to samo krócej: $\Omega = \{(a, b, c) : a, b, c \in Z\}$, lub to samo inaczej (poziom rozszerzony): Ω – zbiór trzywyrzawowych wariacji z powtórzeniami zbioru Z . Wówczas $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

6.15 Np. Ω – zbiór trójwyrzawowych ciągów (a, b, c) takich, że $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ i $b, c \in \{0, R\}$ lub to samo krócej: $\Omega = \{(a, b, c) : a \in \{1, 2, \dots, 6\} \text{ i } b, c \in \{0, R\}\}$. Wówczas $|\Omega| = 24$.

6.16 a) 1, 2, 3, 4, 5, 6; b) 2, 4, 6, 8, 10; c) 7, 8, 9, 10; d) 2, 4, 6; e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Rozwiązanie. c) $A = \{1, 2, \dots, 6\}$, zdarzenie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A , więc zdarzeniu A' sprzyjają zdarzenia elementarne 7, 8, 9, 10.

d) Zdarzenie $A \cap B$ polega na wylosowaniu liczby parzystej mniejszej od 7. Zatem zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu $A \cap B$ są 2, 4, 6.

e) Zdarzenie $A \cup B$ polega na wylosowaniu liczby, która jest mniejsza od 7 lub jest parzysta. Zatem zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu $A \cup B$, to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10.

6.17 a) 8; b) 8; c) 208; d) 1; e) 27.

Rozwiązanie. a) Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są takie ciągi (a, b, c) , że każda z liczb a, b, c jest równa 5 lub 6. Zatem zdarzeniu A sprzyja $2 \cdot 2 \cdot 2$ zdarzeń elementarnych.

b) Zdarzenie B' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia B , polega więc na wypadnięciu za każdym razem liczby podzielnej przez 3. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu B' są takie ciągi (a, b, c) , że każda z liczb a, b, c jest równa 3 lub 6. Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B' jest równa $2 \cdot 2 \cdot 2$, czyli $|B'| = 8$.

c) Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych (czyli wszystkich ciągów (a, b, c) takich, że $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) jest równa 6^3 . Wiemy, że $|B'| = 8$ (patrz punkt b)). Zatem $|B| = 6^3 - |B'| = 208$.

d) Zdarzenie $A \cap B'$ polega na wypadnięciu za każdym razem liczby podzielnej przez 3, która jest większa od 4, czyli wypadnięciu trzy razy sześciu oczek, więc jedynym zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu $A \cap B'$ jest zdarzenie $(6, 6, 6)$.

e) Zdarzenie $A \cup B'$ polega na wypadnięciu za każdym razem liczby podzielnej przez 3 lub liczby większej od 4, więc za każdym razem musi wypaść 3 albo 5 albo 6 oczek. Zatem zdarzeniu $A \cup B'$ sprzyja $3 \cdot 3 \cdot 3$ zdarzeń elementarnych.

6.18 a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{37}{150}$; c) $\frac{7}{150}$; d) $\frac{3}{10}$.

Rozwiązanie. Zbiór zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 150\}$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 150$.

a) A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 10. $A = \{10, 20, \dots, 150\}$, więc $|A| = 15$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{150} = \frac{1}{10}$.

b) B – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 4. $B = \{4, 8, \dots, 148\}$, więc $|B| = \frac{148}{4} = 37$. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{37}{150}$.

c) C – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 10 i przez 4.

Zatem zdarzenie C polega więc na wylosowaniu liczby podzielnej przez 20. $C = \{20, 40, \dots, 140\}$, więc $|C| = 7$. $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{7}{150}$.

d) D – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 10 lub przez 4.

Zauważmy, że $D = A \cup B$, zaś $C = A \cap B$ (patrz pkt. a), b) i c)). Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad P(D) = P(A) + P(B) - P(C) = \frac{15}{150} + \frac{37}{150} - \frac{7}{150} = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}.$$

6.19 a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{5}{7}$; d) $\frac{31}{49}$; e) $\frac{11}{49}$.

Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem trzywyrzawowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 7 \cdot 7$.

a) A – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby podzielnej przez 5. Aby otrzymana liczba była podzielna przez 5, pierwsza i druga z wylosowanych cyfr może być dowolna, a trzecią musi być 5. Zatem $|A| = 7 \cdot 7 \cdot 1$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 1}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7}$.

b) B – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby parzystej. Aby otrzymana liczba była parzysta, pierwsza i druga z wylosowanych cyfr może być dowolna, a trzecią cyfrą musi być 2 lub 4 lub 6. Zatem $|B| = 7 \cdot 7 \cdot 3$. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 3}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3}{7}$.

c) C – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby większej od 300. Aby otrzymana liczba była większa od 300, pierwsza z wylosowanych cyfr musi być większa od 2, a druga i trzecia może być dowolna. Zatem $|C| = 5 \cdot 7 \cdot 7$. $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}$.

d) D – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby większej od 350. Liczb większych od 350 i takich, których cyfrą setek jest 3, jest $1 \cdot 3 \cdot 7$ (bo pierwszą z wylosowanych cyfr musi być 3, drugą 5 albo 6 albo 7, a trzecią może być każda cyfra). Liczb większych od 350 i takich, których cyfra setek należy do zbioru $\{4, 5, 6, 7\}$ jest $4 \cdot 7 \cdot 7$. Zatem $|D| = 1 \cdot 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 7 = 7 \cdot 31$. $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 31}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{31}{49}$.

e) E – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby podzielnej przez 4. Otrzymana liczba n będzie podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy podzielna przez 4 będzie liczba dwucyfrowa, którą dostaniemy po skróceniu cyfry setek liczby n . Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 4, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64, 72, 76. Liczb tych jest 11, więc $|E| = 7 \cdot 11$.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 11}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{11}{49}.$$

6.20 a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{5}{7}$; d) $\frac{9}{14}$; e) $\frac{5}{21}$.

Rozwiązanie. Możemy przyjąć, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem trzywyrzawowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 6 \cdot 5$.

a) A – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby podzielnej przez 5. Aby otrzymana liczba była podzielna przez 5, trzecią z wylosowanych cyfr musi być 5. Zatem pierwszą cyfrą nie może być 5, a druga nie może być równa 5 i nie może być taka, jak pierwsza cyfra. Wobec tego $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 1$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{7}.$$

b) B – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby parzystej. Gdybyśmy parzyste liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ zapisywali „od końca”, tzn. najpierw zapisujemy cyfrę jednostki liczby, następnie cyfrę dziesiątek i na końcu cyfrę setek, to cyfrę jednostki możemy wybrać na 3 sposoby (cyfrą jednostki może być 2 lub 4 lub 6), cyfrę dziesiątek na 6 sposobów (bo cyfry muszą być różne), a cyfrę setek na 5 sposobów. Moglibyśmy utworzyć w ten sposób $3 \cdot 6 \cdot 5$. Zatem $|B| = 3 \cdot 6 \cdot 5$. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{7}$.

6.21 a) $\frac{6}{11}$; b) $\frac{1}{462}$; c) $\frac{1}{462}$; d) $\frac{1}{77}$; e) $\frac{2}{11}$; f) $\frac{1}{11}$.

Rozwiązanie. Ω – zbiór permutacji zbioru 11-elementowego. $|\Omega| = 11!$

Przyjmijmy, że kolejne miejsca w kolejce ponumerowane są numerami od 1 do 11.

a) Pierwszą osobą w kolejce mogła być jedna z sześciu dziewczyn, pozostałe 10 osób można było ustawić na 10! sposobów.

Zatem $|A| = 6 \cdot 10!$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 10!}{11!} = \frac{6 \cdot 10!}{10! \cdot 11} = \frac{6}{11}$.

b) Dziewczynki na początkowych sześciu miejscach można było ustawić na 6! sposobów. Na pozostałych pięciu miejscach chłopcy mogli ustawić się na 5! sposobów. Zatem $|B| = 6! \cdot 5!$. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6! \cdot 5!}{11!} = \frac{6! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1}{462}$.

c) Dziewczynki musiały stanąć na miejscach 1, 3, 5, 7, 9, 11. Na wymienionych sześciu miejscach mogły ustawić się na 6! sposobów. Na pozostałych pięciu miejscach chłopcy mogli ustawić się na 5! sposobów. Zatem $|C| = 6! \cdot 5!$. $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6! \cdot 5!}{11!} = \frac{1}{462}$.

d) Dziewczynki musiały stanąć na miejscach 1–6 lub 2–7 lub ... lub 6–11. Miejsca w kolejce dla dziewczynek można więc było wybrać na 6 sposobów. Jeżeli wybrane zostały miejsca, na których miały stać dziewczynki, to można je było ustawić na wybranych miejscach na 6! sposobów. Chłopców można wtedy było ustawić na pozostałych pięciu miejscach na 5! sposobów. Zatem $|D| = 6 \cdot 6! \cdot 5!$. $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 6! \cdot 5!}{11!} = \frac{1}{77}$.

e) Miejsca w kolejce dla Hani i Marcina można było wybrać na 10 sposobów (miejsca 1, 2 lub 2, 3 lub ... lub 10, 11). Hania mogła stać bezpośrednio przed Marcinem lub Marcin mógł stać bliżej początku kolejki niż Hania, więc tę dwójkę dzieci można było ustawić na 2 · 10 sposobów. Jeśli Hania i Marcin stanęli na sąsiednich miejscach, to pozostałe 9 osób można było ustawić na pozostałych dziewięciu miejscach na 9! sposobów. Zatem

$|E| = 2 \cdot 10 \cdot 9! = 2 \cdot 10!$. $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 10!}{11!} = \frac{2}{11}$.

f) Miejsca w kolejce dla Hani i Marcina można było wybrać na 5 sposobów (miejsca 1, 7 lub 2, 8 lub ... lub 5, 11). Hania mogła stać bliżej początku kolejki niż Marcin lub Marcin mógł stać bliżej początku kolejki niż Hania, więc tę dwójkę dzieci można było ustawić na 2 · 5 sposobów. Jeśli Hania i Marcin zajęli odpowiednie miejsca, to pozostałe 9 osób można było ustawić na pozostałych dziewięciu miejscach na 9! sposobów.

Zatem $|F| = 2 \cdot 5 \cdot 9! = 10!$. $P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{10!}{11!} = \frac{1}{11}$.

6.22 a) $\frac{1}{42}$; b) $\frac{10}{42}$; c) $\frac{11}{42}$; d) $\frac{41}{42}$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór 5-elementowych podzbiorów zbioru 10-elementowego. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 7 \cdot 9$.

a) A – zdarzenie polegające na wylosowaniu pięciu kul białych. $|A| = \binom{6}{5} = 6$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{4 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1}{42}$.

b) B – zdarzenie polegające na wylosowaniu dokładnie czterech kul białych. $|B| = \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 5 \cdot 4$. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{5}{21}$.

c) C – zdarzenie polegające na wylosowaniu co najmniej czterech kul białych. Zauważmy, że $C = A \cup B$ i $A \cap B = \emptyset$ (patrz punkty a) i b)).

Zatem $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{42} + \frac{5}{21} = \frac{11}{42}$.

d) D – zdarzenie polegające na wylosowaniu co najmniej jednej kuli białych.

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia D jest zdarzenie A (patrz punkt a)). Zatem $P(D) = 1 - P(D') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$.

6.23 a) $P(B) = 0,7$; b) $P(A \cap B) = 0,2$; c) $P(A \setminus B) = 0,2$.

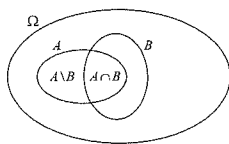
Rozwiązanie. a) Wiemy, że $P(B) + P(B') = 1$, więc $P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

b) Ze wzoru $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ wyznaczamy $P(A \cap B)$: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Zatem $P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,9 = 0,2$.

c) I SPOSÓB. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ (patrz rys.). Z punktu b) mamy $P(A \cap B) = 0,2$.

Zatem $P(A \setminus B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

II SPOSÓB. $P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(B) = 0,9 - 0,7 = 0,2$.



6.24 $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \Omega$, więc zdarzenia A i B są zdarzeniami przeciwnymi, a to oznacza, że $P(A) + P(B) = 1$.

Wprowadźmy oznaczenie: $p = P(A)$. Wówczas $P(B) = 1 - p$. Wiemy, że $p(1 - p) = \frac{3}{16}$. Rozwiązaniem tego równania kwadratowego są liczby

$p = \frac{1}{4}$ oraz $p = \frac{3}{4}$. Jeśli $p = \frac{1}{4}$, to $P(B) = 1 - p = \frac{3}{4}$, a jeśli $p = \frac{3}{4}$, to $P(B) = \frac{1}{4}$.

$P(A) > P(B)$, więc $P(A) = \frac{3}{4}$, zaś $P(B) = \frac{1}{4}$.

6.25

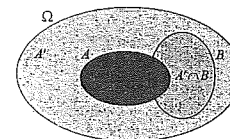
Rozwiązanie. a) $P(A) = 1 - P(A') \leq 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$. b) $A' \subset A' \cup B$, więc $P(A' \cup B) \geq P(A') \geq \frac{5}{7} = \frac{15}{21} > \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$.

c) $A \cap B \subset A$, więc $P(A \cap B) \leq P(A) \leq \frac{2}{7} < \frac{20}{70} < \frac{21}{70} = \frac{3}{10}$.

6.26 0,5.

Rozwiązanie. $P(A' \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(A)$ (patrz rys.).

Zatem $P(A' \cap B) = 0,7 - 0,3 = 0,5$.



STATYSTYKA

7.1 a) średnia arytm.: 5, mediana: 5; b) średnia arytm.: 4, mediana: 3; c) średnia arytm.: 4,5, mediana: 3,5.

Rozwiązanie. a) $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6+7+8}{7} = \frac{35}{7} = 5$. $M = 5$ (średnia liczba w zestawie danych: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

c) $\bar{x} = \frac{1+2+3+3+2+4+6+8+2+9}{12} = \frac{54}{12} = 4,5$. Porządkujemy niemalejąco zestaw danych: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 8, 9, 9, stąd $M = \frac{3+4}{2} = 3,5$.

7.2 $a = 6$.

Rozwiązanie. a) $\frac{1+2+2+3+2+4+6+8+2+9}{8} = 3,75$, stąd $24 + a = 30$. Zatem $a = 6$.

7.3 a) $a = 9$, $b = 16$; b) $a = 4$, $b = 5$.

Rozwiązanie. a) Wiemy, że $\frac{23+a+b}{6} = 8$ i $\frac{5+a}{2} = 7$. Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $a = 9$ i $b = 16$.

7.4 63 lata.

Rozwiązanie. Oznaczenia: a, b, c, d, x – wiek odpowiednio matki, ojca, pierwszego dziecka, drugiego dziecka, dziadka.

$\frac{a+b+c+d}{4} = 23$, stąd $a + b + c + d = 92$. $\frac{a+b+c+d+x}{5} = 31$, stąd $(a + b + c + d) + x = 155$.

Podstawiając do ostatniego równania $a + b + c + d = 92$, otrzymujemy $92 + x = 155$, stąd $x = 63$.

7.5 Mediana: 1, średnia arytmetyczna: 1,6.

Rozwiązanie. Zestaw danych składa się z 25 liczb: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4. Średnią liczbą w uporządkowanym niemalejąco powyższym zestawie danych jest 1, czyli $M = 1$. $\bar{x} = \frac{0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+2+3+3+3+4+4}{25} = \frac{40}{25} = 1,6$.

7.6 a) 4,8; b) 4,3.

Rozwiązanie. a) $\bar{x}_w = \frac{2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,7 + 9 \cdot 0,1}{0,2 + 0,7 + 0,1} = \frac{4,8}{1} = 4,8$; b) $\bar{x}_w = \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{43}{10} = 4,3$.

7.7 Bordeaux 1991: 9,1; Bordeaux 1995: 8,8.

7.8 a) wariancja: $\frac{1}{2}$, odch. stand.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) wariancja: 2,25, odchylenie standardowe: 1,5.

Rozwiązanie. a) $\bar{x} = 3$. $s^2 = \frac{2^2+3^2+3^2+4^2}{4} - 3^2 = \frac{38}{4} - 9 = \frac{1}{2}$, stąd $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.9 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\approx 0,82$).

Rozwiązanie. a) $\bar{x} = \frac{150 \cdot 0 + 400 \cdot 1 + 550 \cdot 2 + 100 \cdot 3}{1200} = \frac{1800}{1200} = \frac{3}{2}$. $s^2 = \frac{150 \cdot 0^2 + 400 \cdot 1^2 + 550 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2}{1200} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3500}{1200} - \frac{9}{4} = \frac{2}{3}$, stąd $s = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

7.10 a) Kwaśniewski: 12000, Olechowski: 9000, Krzaklewski: 6000, pozostali: 3000.

7.11 a) bezrobotni: 10%, pracujący: 45%, emeryci: 25%, renciści: 20%; b) bezrobotni: 12, pracujący: 54, emeryci: 30, renciści: 24.

ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI I ROZWIĄZANIA DO ZADAŃ MATURALNYCH

CIĄGI

1. a) $a_{10} = 1204$; b) o 75%.

2. a) Np. (1, 2), (5, 14); b) dziewięć wyrazów.

Rozwiązanie. a) Ciąg (b_n) jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych dodatnich. Zatem współrzędne punktu należącego do wykresu ciągu znajdujemy w taki sam sposób, jak punktu należącego do wykresu „zwykłej” funkcji. Każdy punkt należący do wykresu ciągu (b_n) ma postać $(n, 3n-1)$, gdzie $n \in \mathbb{C}_+$, więc np. punkty $A=(1, 2)$ i $B=(5, 14)$ należą do wykresu tego ciągu.

b) Musimy ustalić, ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $a_n \in (20; 49)$, czyli ile jest liczb $n \in \mathbb{C}_+$, które spełniają zarówno nierówność $3n-1 > 20$, jak i nierówność $3n-1 \leq 49$. Nierówność $3n-1 > 20$ spełniają liczby $n > 7$, a nierówność $3n-1 \leq 49$ spełniają liczby $n \leq 16\frac{2}{3}$. Jest dziewięć liczb $n \in \mathbb{C}_+$ spełniających obie nierówności (są to liczby 8, 9, ..., 16), zatem jest dziewięć wyrazów należących do przedziału $(20; 49)$ (wyrazy $a_8, a_9, \dots, a_{16}$).

3. a) $a_{15} = 1,6$; b) siedem; c) $a_1 = 16, a_3 = 6, a_5 = 4, a_{15} = 2$.

Rozwiązanie. b) Musimy ustalić, ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że $\frac{n+15}{n} > 3$. Wiemy, że $n > 0$, więc możemy pomnożyć obie strony nierówności $\frac{n+15}{n} > 3$ przez n . Otrzymamy wówczas nierówność $n+15 > 3n$, którą spełnia siedem liczb całkowitych dodatnich (są to liczby 1, 2, ..., 7). Zatem siedem wyrazów ciągu, to wyrazy większe od 3 (wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_7$).

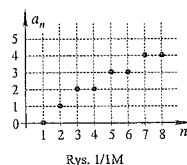
c) $a_n = \frac{n+15}{n} = 1 + \frac{15}{n}$. Liczba $1 + \frac{15}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{C}_+$, jest liczbą naturalną wtedy, gdy liczba 15 jest podzielna przez n , czyli gdy $n \in \{1, 3, 5, 15\}$. Zatem szukany wyrazami są $a_1 = 16, a_3 = 6, a_5 = 4$ i $a_{15} = 2$.

4. a) $(n+6)(n-9)$; b) $a_{38} = 56^2$; c) $a_{11} = 54$.

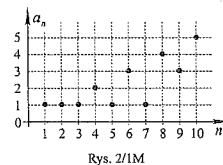
Rozwiązanie. c) Szukamy takiej liczby naturalnej $n > 1$, dla której zachodzi równość $a_n = 20 + a_{n-1}$.

$a_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1) - 54 = n^2 - 5n - 50$. Rozwiązaniem równania $n^2 - 3n - 54 = 20 + n^2 - 5n - 50$ jest liczba $n = 12$, więc dwunasty wyraz jest o 20 większy od wyrazu jedenastego ($a_{12} = 54, a_{11} = 34$).

5. a) $a_{15} = 6$; b) a_7, a_8, a_9, a_{10} ; c) Rys. 1/1M.



6. a) $a_{44} = 22, a_{51} = 17$; b) Rys. 2/1M;
c) $n = 1$ lub n jest liczbą pierwszą; d) jeden wyraz.



7. -1.

Rozwiązanie. $a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{n}{n+1}$. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{98} + a_{99} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} + \dots + \frac{1}{2} \log \frac{98}{99} + \frac{1}{2} \log \frac{99}{100}$.

Wylączając $\frac{1}{2}$ przed nawias i korzystając ze wzoru na sumę logarytmów o tej samej podstawie, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{100} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

8. Piąty.

Rozwiązanie. $a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, $a_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$.

$$b_n = a_{n+2} - a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (n+1)^2 + (n+2)^2 = 2n^2 + 6n + 5.$$

Szukamy takiej liczby $n \in \mathbb{C}_+$, dla której $b_n = 85$, czyli takiej, która spełnia równanie $2n^2 + 6n + 5 = 85$. Równanie to sprowadzamy do postaci $n^2 + 3n - 40 = 0$. Rozwiązaniami równania kwadratowego $n^2 + 3n - 40 = 0$ są liczby $n_1 = -8 \notin \mathbb{C}_+$ i $n_2 = 5 \in \mathbb{C}_+$, więc piąty wyraz ciągu (b_n) jest równy 85.

9. $k \in \{2, 6\}$.

10. a) $a_1 = 1$; b) $a_4 = 37$; c) $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

Wskazówka. Patrz rozwiązanie zadania 1.9.

11. a) $a_3 = 2, a_5 = 5$; b) liczba parzysta; c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \text{ dla } n \geq 3 \end{cases}$

Wskazówka. b) Zauważ, że po dwóch wyrazach będących liczbami nieparzystymi następuje wyraz, który jest liczbą parzystą, a kolejne dwa wyrazy znowu są liczbami nieparzystymi.

12. Dziesięć wyrazów.

Wskazówka. Suma będzie najmniejsza, gdy zsumujemy wszystkie ujemne wyrazy ciągu (a_n) .

13. a) $b_{199} = 121$. b) $k = 134$.

14. a) Pierwszy i czwarty.

Wskazówka. b) Wykaż, że nie istnieje liczba całkowita p , dla której równanie $n^2 + pn + p = -3$ ma dwa dodatnie rozwiązania.

15. a) $a_4 = -14$; b) ciąg (a_n) jest malejący.

Rozwiązanie. b) Dla każdej liczby $n \geq 1$ liczba $-3n+1$ jest ujemna, zatem dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$ $a_{n+1} < a_n$, a to oznacza, że ciąg (a_n) jest malejący.

16. $p \in (-3; +\infty)$.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}_+$ prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$, czyli nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$. Musimy więc znaleźć takie wartości parametru p , aby dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodziła nierówność $(n+1)^2 + p(n+1) - (n^2 + pn) > 0$, czyli nierówność $p > -2n-1$. Jeśli $n \in \mathbb{C}_+$, to największa wartość wyrażenia $-2n-1$ jest równa -3 , zatem nierówność $p > -2n-1$ zachodzi dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, gdy $p > -3$.

17. Piętnasty.

Rozwiązanie. $a_{12} = 2010$. $a_n = 2010 \Leftrightarrow n^3 - 39n^2 + 504n - 2160 = 0$. Wiemy, że jednym z rozwiązań otrzymanego równania jest $n = 12$, więc mamy $(n-12)(n^2 - 27n + 180) = 0$. Stąd łatwo znajdujemy drugie rozwiązanie równania: $n = 15$. Zatem $a_{15} = a_{12} = 2010$.

18. Wyrazy a_6 i a_3 różnią się o 219.

Rozwiązanie. Sprawdzimy, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie k i m , że $a_k - a_m = 219$.

$$a_k - a_m = k^3 + 10k + 2010 - (m^3 + 10m + 2010) = k^3 - m^3 + 10k - 10m = (k-m)(k^2 + km + m^2) + 10(k-m) = (k-m)(k^2 + km + m^2 + 10).$$

Liczbę 219 rozkładamy na czynniki pierwsze: $219 = 3 \cdot 73$. Należy więc sprawdzić, czy istnieją takie liczby $k, m \in \mathbb{C}_+$, że

$$\textcircled{1} \begin{cases} k-m=1 \\ k^2+km+m^2+10=219 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \textcircled{2} \begin{cases} k-m=3 \\ k^2+km+m^2+10=73 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} k=m+1 \\ 3(m^2+m)=208 \end{cases} \quad \text{— żadna para liczb całkowitych dodatnich nie spełnia tego układu.}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} k=m+3 \\ m^2+3m-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-3 \\ m=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} k=6 \\ m=3 \end{cases}. \quad \text{Zatem wyrazy szósty i trzeci ciągu } (a_n) \text{ różnią się o 219.}$$

19. a) $a_{16} = -5$; b) $a_n = -4n + 59$; c) $S_{20} = 340$.

Rozwiązanie. a) Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 55, a różnica r tego ciągu równa jest -4 . $a_{16} = a_1 + 15r = 55 + 15 \cdot (-4) = -5$.

20. $a_1 = 7,5$, $r = 0,75$.

21. $a_n = \frac{1}{2}n - 3$.

Rozwiązanie. $a_5 + a_{16} = a_1 + 5r + a_1 + 15r = 2a_1 + 20r = 5$. Stąd $a_1 = 2,5 - 10r$.

$$a_8 + a_{12} = (a_1 + 7r) + (a_1 + 11r) = (2,5 - 10r + 7r) + (2,5 - 10r + 11r) = (2,5 - 3r) + (2,5 + r) = 3$$

Równanie $(2,5 - 3r)(2,5 + r) = 3$ sprowadzamy do postaci $12r^2 + 20r - 13 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby $r_1 = -\frac{13}{6}$ i $r_2 = \frac{1}{2}$. Ciąg (a_n) jest rosnący, więc $r = \frac{1}{2}$. Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 2,5 - 10r = 2,5 - 10 \cdot 0,5 = -2,5$. Wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n) : $a_n = a_1 + (n-1)r = -2,5 + (n-1) \cdot 0,5 = 0,5n - 3$.

22. b) Czternasty wyrazów.

23. a) 6; b) -1920.

24. a) 15; b) 495; c) 105.

25. 390.

- 26.

Rozwiązanie. $a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$. $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$, więc $b = \sqrt{2}-\sqrt{3} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

$c = \sqrt{3}-\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3}-\sqrt{18} = \sqrt{3}-\sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3}-3\sqrt{2}$. Zauważmy, że $b = a - 2\sqrt{2}$ i $c = b - 2\sqrt{2}$, więc dane liczby tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $-2\sqrt{2}$.

- 27.

Rozwiązanie. $a = 32^{10} = (2^5)^{10} = 2^{50}$. $c = 4^{23} = (2^2)^{23} = 2^{46}$. Ciąg a, b, c jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a+b}{2} = c$.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2^{50} + 2^{46}}{2} = \frac{2^4 \cdot 2^{46} + 2^{46}}{2} = \frac{16 \cdot 2^{46} + 2^{46}}{2} = \frac{17 \cdot 2^{46}}{2} = 17 \cdot 2^{45} = 17 \cdot (2^3)^{15} = 17 \cdot 8^{15} = c, \text{ więc liczby } a, b, c \text{ tworzą ciąg arytmetyczny.}$$

29. Tworzą ciąg arytmetyczny.

30. a) $x=1$; b) $a_n=5n-8$.31. a) $x=2$, $y=1$; b) co najmniej 101 wyrazów.

Rozwiązanie. a) Jeśli liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to $a+c=2b$. Liczby $x+y$, $4x-y$, $3x+4y+1$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, więc $x+y+3x+4y+1=2(4x-y)$. Stąd ① $4x-7y=1$. Liczby $4x-y$, $3x+4y+1$, $9x-4y+1$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, więc $4x-y+9x-4y+1=2(3x+4y+1)$. Stąd ② $7x-13y=1$. Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $x=2$, $y=1$.
b) Jeśli $x=2$ i $y=1$, to pierwszy wyraz ciągu jest równy 3, a drugi równy jest 7. Zatem różnicą tego ciągu jest liczba $r=7-3=4$. Suma n początkowych wyrazów ciągu określona jest wzorem $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n = 2n^2 + n$. Sprawdzamy, jakie liczby całkowite dodatnie n spełniają nierówność $2n^2 + n > 20100$. Nierówność $2n^2 + n - 20100 > 0$ spełniają liczby $n \in (-\infty; -100,5) \cup (100; \infty)$, więc liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi tę nierówność są 101, 102, 103, ... Zatem należy wziąć co najmniej 101 wyrazów ciągu.

32. a) $a_1=23$, $r=-4$, $a_n=-4n+27$; b) $n=24$; c) -15 150.

33. 14 i 28.

34. $a_n = \frac{5}{2}n - \frac{7}{4}$.

Rozwiązanie. I SPOSÓB. Równość $a_n + a_{n+1} = 5n - 1$ zachodzi dla każdej liczby całkowitej dodatniej n , więc w szczególności jest prawdziwa dla $n=1$ i $n=2$. Jeśli $n=1$, to mamy $a_1 + a_2 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$. $a_2 = a_1 + r$, więc $2a_1 + r = 4$. Jeśli $n=2$, to mamy $a_2 + a_3 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. $a_3 = a_1 + 2r$, więc $2a_1 + 3r = 9$. Otrzymaliśmy układ równań $\begin{cases} 2a_1 + r = 4 \\ 2a_1 + 3r = 9 \end{cases}$, którego rozwiązaniem jest para liczb $r=2,5$ i $a_1=0,75$.
Zatem $a_n = a_1 + (n-1)r = 0,75 + (n-1) \cdot 2,5 = 2,5n - 1,75$.
II SPOSÓB. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, więc $a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_{n+1} = a_1 + nr$. $a_n + a_{n+1} = a_1 + (n-1)r + a_1 + nr = 2a_1 + nr$. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą równości $a_n + a_{n+1} = 2a_1 + nr$ i $a_n + a_{n+1} = 5n - 1$, zatem $2r = 5$ i $2a_1 - r = -1$. Stąd $r=2,5$ i $a_1=0,75$. Znajdąc a_1 i r , możemy podać wzór ciągu (a_n) : $a_n = 2,5n - 1,75$.

35. Od a_{14} do a_{23} .Rozwiązanie. Ozn. a_k , a_{k+1} , ..., a_{k+9} – sumowane wyrazy.Różnica ciągu (a_n) jest równa 2. Liczby a_k , a_{k+1} , ..., a_{k+9} tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2, zatem

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+9} = \frac{a_k + a_{k+9}}{2} \cdot 10 = \frac{a_k + a_k + 9 \cdot 2}{2} \cdot 10 = (a_k + 9) \cdot 10 = 310.$$

Stąd $a_k = 22$. $a_k = 2k - 6 = 22$, więc $k = 14$. Zsumowano wyrazy a_{14} , a_{15} , ..., a_{23} .

36. 165.

37. Z piętnastu.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów, więc liczba wyrazów o nieparzystych numerach jest o 1 większa od liczby wyrazów o numerach parzystych. Jeśli k oznacza liczbę wyrazów o numerach parzystych, to wtedy $k+1$ jest liczbą wyrazów o numerach nieparzystych, a $2k+1$ liczbą wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

Wiemy, że ① $\frac{a_1 + a_{2k+1}}{2} \cdot (2k+1) = 165$. Wyrazy o nieparzystych numerach tworzą ciąg arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest a_1 , a ostatnim jest ostatni wyraz ciągu (a_n) , czyli wyraz a_{2k+1} . Zatem ② $\frac{a_1 + a_{2k+1}}{2} \cdot (k+1) = 88$. Z równości ① mamy $\frac{a_1 + a_{2k+1}}{2} = \frac{165}{2k+1}$.

Po podstawieniu do równości ② otrzymujemy równanie $\frac{165}{2k+1} \cdot (k+1) = 88$. Stąd wyznaczamy $k = 7$. Ciąg (a_n) składa się z $2k+1$ wyrazów, czyli z piętnastu wyrazów.

38. Z piętnastu wyrazów (wzięto pięć wyrazów).

39. a) 27 cm, b) 5 m 45 cm, c) 44 stopnie

Rozwiązanie. Wysokości stopni tworzą skończony ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r = -0,5$, w którym $a_1 = 32$.a) Obliczamy wysokość jedenastego stopnia: $a_{11} = a_1 + 10r = 32 + 10(-0,5) = 27$ (cm).b) Wysokość w , na której znajduje się powierzchnia dwudziestego stopnia jest równa sumie wysokości dwudziestu początkowych schodów.

$$\text{Zatem } w = S_{20} = \frac{2a_1 + (20-1)r}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 32 + (20-1)(-0,5)}{2} \cdot 20 = 545 \text{ (cm).}$$

c) n – liczba schodów. Suma wysokości wszystkich schodów wynosi 935 cm. $S_n = \frac{2 \cdot 32 + (n-1)(-0,5)}{2} \cdot n = 935$. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $n^2 - 129n + 3740 = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby $n_1 = 44$ i $n_2 = 85$. Jeśli $n = 85$, to $32 + (85-1)(-0,5) < 0$, zatem schody mają 44 stopnie.

40. a) 210 zł; b) 990 zł; c) 11 m.

41. Po 2 latach i 7 miesiącach.

42. a) Siedemdziesiąt; b) Od 1217 do 1310; c) w trzynastym.

43. 15 rat, 140 zł.

44. 207 m.

45. a) Pierwsza rata: 1400 zł, druga rata: 1387,50 zł; b) 1262,50 zł; c) 975 zł; d) 6,5 %.

Rozwiązanie. Oprocentowanie kredytu wynosi 12%, więc wysokość odsetek naliczanych w danym miesiącu jest równa 1% kwoty pozostającej do spłacenia.

a) Wysokość pierwszej raty: $\frac{1}{12} \cdot 15000 + \frac{1}{100} \cdot 15000 = 1250 + 150 = 1400$ (zł).Wysokość drugiej raty: $\frac{1}{12} \cdot 15000 + \frac{1}{100} \cdot (15000 - 1250) = 1387,50$ (zł).b) Po jedenastu miesiącach pozostało do spłacenia $\frac{1}{12} \cdot 15000 = 1250$ (zł), wysokość ostatniej raty jest równa: $1250 + \frac{1}{100} \cdot 1250 = 1262,5$ (zł).

c) Co miesiąc kwota pozostająca do spłacenia zmniejszała się o $\frac{1}{12} \cdot 15000 = 1250$ (zł). Zatem kwoty pozostające do spłacenia w kolejnych miesiącach tworzyły ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz jest równy 15000, a różnica -1250. Łączną kwotę odsetek była więc równa $\frac{1}{100} \cdot \frac{2 \cdot 15000 + (12-1) \cdot (-1250)}{2} \cdot 12 = 975$ (zł).
d) Łączną kwotę odsetek stanowiła $\frac{975}{15000} \cdot 100\% = 6,5\%$ pożyczonej kwoty.

46. $x = -\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Liczby a , b , c tworzą ciąg arytmetyczny, więc $a+c=2b$. Wiemy, że $a+c+b=24$. Zatem $2b+b=24$, stąd $b=8$. Liczba -0,2 jest pierwiastkiem trójkianu $y=ax^2+8x+c$, więc $\frac{1}{25}a - \frac{8}{5} + c = 0$. Rozwiązaniem układu równań $a+25c=40$ i $a+c=16$ jest para liczb $a=15$ i $c=1$. Iloczyn pierwiastków trójkianu jest równy $\frac{c}{a} = \frac{1}{15} = -\frac{1}{5} \cdot x_2$, stąd $x_2 = -\frac{1}{3}$.

47. $m=0,5$.

48. -1.

Rozwiązanie. Funkcja g dla każdej wartości parametru m ma dwa miejsca zerowe ($\Delta=4+m^2>0$ dla każdej liczby $m \in \mathbb{R}$).

a_1 i a_2 są miejscami zerowymi funkcji g , więc $a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + r = -2$ (skorzystaliśmy ze wzoru Viete'a na sumę pierwiastków trójkianu kwadratowego). Suma jedenastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa $\frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 88$.

Rozwiązaniem układu równań $2a_1 + r = -2$ i $a_1 + 5r = 8$ jest para liczb $a_1 = -2$ i $r = 2$.Liczba a_1 jest miejscem zerowym funkcji g , więc $g(-2) = 4 - 4 - m^2 = 0$. Stąd $m = 0$. Najmniejsza wartość funkcji g : $y_w = -\frac{4+m^2}{4} = -1$.49. Funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i rosnąca w przedziale $(5; +\infty)$.50. $a_{20}=40$, $S_{20}=420$.Rozwiązanie. Założenia: $a-4>0$ i $a>0$ i $a^2>0$, wszystkie założenia spełniają liczby $a>4$.

Liczby x , y , z tworzą ciąg arytmetyczny, więc $* 2y = x + z$. $2y = 2 \log_2 2a = 2(\log_2 2 + \log_2 a) = 2 + \log_2 a^2$, zaś $x + z = \log_2 (a-4) + \log_2 a^2$. Zatem równość $*$ możemy zapisać w postaci $2 = \log_2 (a-4)$. Stąd $a-4=2^2$, więc $a=8$ ($a=8$ spełnia warunek $a>4$).

Pierwszy wyraz ciągu jest równy $\log_2 (8-4) = 2$, drugi wyraz ciągu równy jest $\log_2 2 \cdot 8 = 4$, więc różnicą ciągu jest liczba 2.Dwudziesty wyraz ciągu: $2 + (20-1) \cdot 2 = 40$. Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu: $\frac{2+40}{2} \cdot 20 = 420$.

51. Mniejsza o 600.

52. $x \in (-1; 3)$.Rozwiązanie. Ciąg jest arytmetyczny, więc $3x+2y+1 - (x+y) = x^2+5x+4y - (3x+2y+1)$. Stąd $y = -x^2+2$.Różnica ciągu $r = 3x+2y+1 - (x+y) = 2x+y+1 = -x^2+2x+3$. Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r>0$.Rozwiązaniami nierówności $-x^2+2x+3>0$ są liczby $x \in (-1; 3)$.53. a) $a_5=7$; b) 19700.Rozwiązanie. a) $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, więc $a_5 = S_5 - S_4 = 25 - 10 = (16-8) = 7$.

b) $a_1 = S_1 = -1$, $a_2 = S_2 - S_1 = 0 - (-1) = 1$. Obliczamy różnicę ciągu (a_n) : $r = a_2 - a_1 = 2$. Liczby a_1 , a_2 , ..., a_{199} tworzą ciąg arytmetyczny, różnica tego ciągu jest równa $2r$, czyli 4. Zatem suma wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{2 \cdot (-1) + (199-1) \cdot 4}{2} \cdot 100 = 19700$.

54.

Rozwiązanie. a) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$. $a_1 = S_1 = -12$, a dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - 14(n-1) = 2n^2 - 18n + 16$, więc dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ $a_n = 2n^2 - 14n - (2n^2 - 18n + 16) = 4n - 16$.

Wiemy, że $a_1 = -12$, sprawdzamy, czy wzór $a_n = 4n - 16$ jest prawdziwy dla $n=1$: $4 \cdot 1 - 16 = -12$. Zatem ciąg (a_n) dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ określony jest wzorem $a_n = 4n - 16$. Badamy, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny: dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ różnica $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 16 - (4n - 16) = 4$, więc (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 4.

56. $a_n = 2n - 5$.

57. $m \in (12; +\infty)$.

Wskazówka. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $a^x + \frac{1}{a^x} \geq 2$.

58. Szukanymi wyrazami są liczby 6 i 5.

Wskazówka. $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = r(2a_n + r) = -11$, gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) .

59.

Rozwiązanie. Ciąg $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ jest arytmetyczny, więc $2\log_m x = \log_k x + \log_n x$. W równości, którą mamy otrzymać, nie występuje x . Liczby x „pozbedziemy się”, dzieląc obie strony równania $2\log_m x = \log_k x + \log_n x$ przez $\log_m x$ (możemy dzielić przez $\log_m x$, bo $x \neq 1$, więc $\log_m x \neq 0$) i korzystając z n.v. o zamianie podstawy logarytmu. Dostaniemy wtedy równość $2 = \log_k m + \log_n m$. Stąd $\log_n m = 2 - \log_k m$.

Korzystając z def. logarytmu, otrzymujemy równość $n^{2 - \log_k m} = m$. Stąd $n^2 = m \cdot n^{\log_k m}$.

$$m = k^{\log_k m}, \text{ więc } n^2 = m \cdot n^{\log_k m} = k^{\log_k m} \cdot n^{\log_k m} = (kn)^{\log_k m}.$$

60.

Rozwiązanie. Wiemy, że $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$.

Aby wykazać, że liczby $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ tworzą ciąg arytmetyczny, wystarczy pokazać, że $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$.

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+b+b+c}{(b+c)(a+b)} = \frac{2b+a+c}{b^2+ac+ab+bc} = \frac{2b+a+c}{\frac{a^2+c^2}{2}+ac+ab+bc} = \frac{2(2b+a+c)}{a^2+c^2+2ac+2ab+2bc} = \frac{2(2b+a+c)}{(a+c)^2+2b(a+c)} = \frac{2(2b+a+c)}{(a+c)(a+c+2b)} = \frac{2}{a+c}.$$

61.

Wskazówka. Zauważ, że $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$.

62. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $18\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^n$; c) $S_8 = \frac{260(3+\sqrt{6})}{9}$.

63. a) Iloraz: $-\frac{1}{2}$; b) $a_5 = -\frac{3}{2}$; c) dziewięć wyrazów.

Rozwiązanie. $a_3 = a_1 q^2 = 48q^2$. Wiemy, że $48 = 48q^2 + 36$. Stąd $q^2 = \frac{1}{4}$, zatem $q = \frac{1}{2}$ lub $q = -\frac{1}{2}$. Gdyby iloraz q był równy $\frac{1}{2}$, to (a_n) byłby ciągiem rosnącym (więc byłby ciągiem monotonicznym). Zatem $q = -\frac{1}{2}$.

64. $a_n = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Rozwiązanie. q – iloraz ciągu (a_n) . $a_4 = a_2 q^2$, więc $q^2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. Stąd $q = -\frac{2}{3}$ lub $q = \frac{2}{3}$. Jeśli $q = \frac{2}{3}$, to ciąg (a_n) nie jest monotoniczny, więc $q = -\frac{2}{3}$. Z równości $a_2 = a_1 q$ otrzymujemy $a_1 = 54$. Znajdź iloraz i pierwszy wyraz ciągu, zapisujemy wzór ciągu (a_n) : $a_n = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

65. a) $a_1 = \frac{2}{27}$; b) $a_n = \frac{2}{81} \cdot 3^n$.

66. a) $a_1 = 7$, $a_3 = 28$.

Rozwiązanie. b) $a_n = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^n + 2^n + 0,5 \cdot 2^n = 3,5 \cdot 2^n$. $a_{n+1} = 3,5 \cdot 2^{n+1} = 3,5 \cdot 2 \cdot 2^n$. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n mamy: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3,5 \cdot 2^{n+1}}{3,5 \cdot 2^n} = 2$. Iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest stały, więc ciąg jest geometryczny.

67.

Rozwiązanie. Ozn. q_a – iloraz ciągu (a_n) , q_b – iloraz ciągu (b_n) . Musimy wykazać, że iloraz $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ ma stałą wartość dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$.

$$c_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{a_n q_a \cdot b_n q_b} = \sqrt{a_n q_a} \cdot \sqrt{b_n q_b} = \sqrt{\frac{a_n q_a b_n q_b}{a_n b_n}} = \sqrt{\frac{a_n q_a b_n q_b}{a_n b_n}} = \sqrt{q_a q_b}, \text{ więc } (c_n) \text{ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie } \sqrt{q_a q_b}.$$

68. a) 8; b) 512.

69. 2.

Rozwiązanie. q – iloraz ciągu (a_n) . $a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = a_1 q^4 \cdot a_1 q^5 \cdot a_1 q^6 = (a_1)^3 \cdot q^{15} = (a_1 q^5)^3 = (a_6)^3 = 64$. Stąd $a_6 = 4$. $a_1 + a_6 = 4,125$, więc $a_1 = 0,125$.

70. -2560.

Rozwiązanie. Wiemy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{2}$. Jeśli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_{n+1} = a_n q$ i $a_{n+2} = a_n q^2$. Zatem $a_n = \frac{a_n q + a_n q^2}{2}$. Dzieląc obie strony tej nierówności przez a_n (możemy dzielić przez a_n , bo $a_n \neq 0$) i mnożąc przez 2, otrzymujemy równanie kwadratowe $q^2 + q = 2$, którego rozwiązaniami są liczby $q_1 = -2$ i $q_2 = 1$. Jeśli $q = 1$, to (a_n) jest ciągiem stałym, więc jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 0. Zatem $q = -2$. Obliczamy dziesiąty wyraz ciągu (a_n) : $a_{10} = a_1 q^9 = 5 \cdot (-2)^9 = -5 \cdot 512 = -2560$.

71. 1,5.

72. 640 000 zł.

Rozwiązanie. c – cena nowego urządzenia. Wartość urządzenia po upływie kolejnych lat, to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 0,5$, którego pierwszy wyraz równy jest c . Wartość urządzenia po siedmiu latach jest ósmym wyrazem tego ciągu, zatem $c \cdot (0,5)^7 = 5000$. Stąd $c = 5000 \cdot 2^7 = 5000 \cdot 128 = 640 000$ (zł).

73. a) 80 zł 70 gr; b) o 34%; c) o 52%.

74. a) 75 zł; b) z dziewięciu etapów.

75. $a = 126$, $b = 216$.

Rozwiązanie. p , $2p$, $4p$ – pierwiastki wielomianu $W(x)$. $W(x) = (x-p)(x-2p)(x-4p) = x^3 - 7px^2 + 14p^2x - 8p^3$. Wielomiany $x^3 - 7px^2 + 14p^2x - 8p^3$ i $x^3 + 21x^2 + ax + b$ są równe, zatem $-7p = 21$, $14p^2 = a$ i $-8p^3 = b$. Stąd otrzymujemy: $p = -3$, $a = 14 \cdot 9 = 126$, $b = -8 \cdot (-27) = 216$.

76. $a = 2$, $c = 18$ lub $a = 18$, $c = 2$.

77. $\alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $\alpha = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$ ($\cos \alpha = -0,5$).

78. $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie. Znajdźmy te liczby α , dla których zachodzi równość $\sin^2 \alpha = \lg \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. Równość tę sprawdzamy do postaci $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) = 0$, gdzie $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{C}$. Zatem $\sin \alpha = 0$ lub $\sin \alpha = \cos \alpha$, gdzie $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{C}$). Rozwiązaniami równania $\sin \alpha = 0$ są liczby $\alpha = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Gdy $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{C}$), to otrzymamy ciąg $(0, 0, 1)$, który nie jest geometryczny. Dzieląc obie strony równania $\sin \alpha = \cos \alpha$ przez $\cos \alpha$ (możemy dzielić przez $\cos \alpha$, bo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, więc $\cos \alpha \neq 0$), otrzymujemy równość $\tan \alpha = 1$, którą spełniają liczby $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, to wyrazy ciągu są różne od zera, więc ciąg jest geometryczny.

80. $p = 10^{\sqrt{2}}$ lub $p = 10^{-\sqrt{2}}$.

82. $x = \frac{1}{8}$ lub $x = 8$.

Rozwiązanie. $a = 1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$. $\log_3 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 3} = \frac{\log_2 6}{\frac{1}{3}}$, więc $c = \frac{4}{3} \log_2 6 = \frac{4}{9} \log_2 6$. Dane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $ac = b^2$, czyli wtedy, gdy $* \log_2 6 \cdot \frac{4}{9} \log_2 6 = (\log_2 36)^2$.

$ac = \log_2 6 \cdot \frac{4}{9} \log_2 6 = \left(\frac{2}{3} \log_2 6\right)^2$, $b = \log_3 36 = \frac{\log_2 36}{\log_2 3} = \frac{2 \log_2 6}{\log_2 3}$. Równość $*$ możemy więc zapisać w postaci $\left(\frac{2}{3} \log_2 6\right)^2 = \left(\frac{2 \log_2 6}{\log_2 3}\right)^2$. $\left(\frac{2}{3} \log_2 6\right)^2 = \left(\frac{2 \log_2 6}{\log_2 3}\right)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{2}{3} \log_2 6 = \frac{2 \log_2 6}{\log_2 3}$ lub $\frac{2}{3} \log_2 6 = -\frac{2 \log_2 6}{\log_2 3}$. Stąd otrzymujemy: $\log_2 3 = 3$ lub $\log_2 3 = -3$.

Zatem $x = 8$ lub $x = \frac{1}{8}$.

83.

Rozwiązanie. $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 1 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$. Zatem $b = \log(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 \log(\sqrt{2} + 1) = 2a$. Sprawdzamy, czy $c = 2b$: $2b = 2 \log(3 + 2\sqrt{2}) = \log(3 + 2\sqrt{2})^2 = \log(17 + 12\sqrt{2}) = c$. Wykazaliśmy, że (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 2.

84. $a_1 \in \mathbb{R}, q = -\frac{1}{2}$ lub $a_1 \in \mathbb{R}, q = 1$.

85. 105.

Rozwiązanie. $S_k = \frac{a_1}{1-q} (1-q^k)$, $S_{2k} = \frac{a_1}{1-q} (1-q^{2k}) = \frac{a_1}{1-q} (1-q^k)(1+q^k) = S_k \cdot (1+q^k) = 5 \cdot (1+q^k) = 25$. Stąd $q^k = 4$.

$$S_{3k} = \frac{a_1}{1-q} (1-q^{3k}) = \frac{a_1}{1-q} (1-q^k)(1+q^k+q^{2k}) = S_k \cdot (1+q^k+q^{2k}) = 5 \cdot (1+4+16) = 105.$$

86. 4 razy.

88. $I = \left(\frac{S}{4}\right)^{10}$.

Rozwiązanie. q – iloraz ciągu. $I = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{19} = (a_1)^{20} \cdot q^{1+2+\dots+19} = (a_1)^{20} \cdot q^{190}$.

$$\textcircled{1} S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{19} = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{19}), \quad \textcircled{2} T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \dots + \frac{1}{a_1 q^{19}} = \frac{q^{19} + q^{18} + q^{17} + \dots + 1}{a_1 q^{19}}.$$

Z $\textcircled{1}$ $1 + q + q^2 + \dots + q^{19} = \frac{S}{a_1}$, podstawiając do $\textcircled{2}$, otrzymujemy $T = \frac{S}{(a_1)^2 \cdot q^{19}}$, a stąd $(a_1)^2 \cdot q^{19} = \frac{S}{T}$.

$$I = (a_1)^{20} \cdot q^{190} = [(a_1)^2 \cdot q^{19}]^{10} = \left(\frac{S}{T}\right)^{10}.$$

89. $S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

90. a) $194\frac{1}{4}, 145\frac{1}{2}, 96\frac{3}{4}$; b) 162, 108, 72 lub -162, 108, -72.

Rozwiązanie. b) q – iloraz pięciowyrazowego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 243$ i $a_5 = 48$.

Zatem $48 = 243q^4$. Stąd $q^4 = \frac{48}{243} = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$. Równanie $q^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ spełniają liczby $\frac{2}{3}$ i $-\frac{2}{3}$. Jeśli $q = \frac{2}{3}$, to liczbami, które wraz z danymi

będą tworzyły ciąg geometryczny, są $243 \cdot \frac{2}{3} = 162$, $162 \cdot \frac{2}{3} = 108$ i $108 \cdot \frac{2}{3} = 72$. Jeśli $q = -\frac{2}{3}$, to liczbami, które wraz z danymi będą two-

rzyły ciąg geometryczny, są $243 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -162$, $-162 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 108$ i $108 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -72$.

91. $a_4 = 4$ (gdy $x = 1$) lub $a_4 = 9$ (gdy $x = 2$).

92. a) co najmniej 21 wyrazów; b) czwarty wyraz.

93. a) 4 lata. b) Za dwa lata.

94. $(-2, 1, 4)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 3. $(1, -2, 4)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -2.

95. $x = 2, y = 1$.

96. 2, 10, 18.

Rozwiązanie. a – pierwsza liczba, $5a$ – druga liczba. Szukane liczby tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $5a - a$, więc trzecia liczba jest równa $9a$. Liczby $a, 5a - 4, 9a$ tworzą ciąg geometryczny, zatem $(5a - 4)^2 = 9a^2$. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $2a^2 - 5a + 2 = 0$, rozwiązaniami tego równania są liczby $a_1 = 0,5$ i $a_2 = 2$. Liczby $a, 5a, 9a$ są całkowite, więc $a = 2$. Zatem szukane liczby, to 2, 10, 18.

97. 3, 6, 9.

98. 3.

Rozwiązanie. $a_3 = 2 + 2r$, $a_7 = 2 + 6r$, $a_{17} = 2 + 16r$, gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) .

Ciąg (a_3, a_7, a_{17}) jest geometryczny, więc $(2 + 6r)^2 = (2 + 2r)(2 + 16r)$. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $r^2 - 3r = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby 0 i 3. Gdy $r = 0$, to ciąg arytmetyczny jest stały, a gdy $r = 3$, to ciąg arytmetyczny jest rosnący. Zatem różnica ciągu (a_n) jest równa 3.

99. 31, 31, 31 lub 3, 15, 75.

Rozwiązanie. $a, a + r, a + 6r$ – szukane liczby (r jest różnicą ciągu arytmetycznego).

Liczby te tworzą ciąg geometryczny, więc $(a + r)^2 = a(a + 6r)$. Stąd otrzymujemy równość $r(r - 4a) = 0$, zatem $r = 0$ lub $r = 4a$.

Wiemy, że $3a + 7r = 93$. Jeśli $r = 0$, to mamy równość $3a = 93$, więc $a = 31$. Jeśli $r = 4a$, to mamy równość $3a + 7 \cdot 4a = 93$, więc $a = 3$. Zatem szukanymi trójkami liczb są 31, 31, 31 oraz 3, 15, 75.

100. $a_n = 2n - 5, n \in \{1, 2, \dots, 16\}$.

103. 81.

104. $a = 18, b = 4, c = -10, d = 25$.

Rozwiązanie. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a suma tych liczb wynosi 12, więc $a + c = 2b$ i $a + c + b = 12$. Stąd $2b + b = 12$, zatem $b = 4$.

Liczby 4, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a suma tych liczb jest równa 19, więc $c^2 = 4d$ i $4 + c + d = 19$. Układ równań

$$\begin{cases} c^2 = 4d \\ d = 15 - c \end{cases}$$

spełniają pary $(c, d) = (-10, 25)$ i $(c, d) = (6, 9)$. Ciąg geometryczny nie jest monotoniczny, więc $c = -10$ i $d = 25$.

Znajac liczby b i c , znajdujemy $a: a = 2b - c = 18$.

105. Różnica ciągu (a_n) : 3. Iloraz ciągu (b_n) : 2.

106. $\langle -1; +\infty \rangle$ ($b = -2\sqrt{3}, c = 2$).

107. $q = 4, m \in (-20\sqrt{2}; 20\sqrt{2})$.

Rozwiązanie. $a, a + 2r, a + 10r$ – pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$. Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, więc $(a + 2r)^2 = a(a + 10r)$. Stąd otrzymujemy $2r = 3a$. Wyznaczamy iloraz ciągu geometrycznego:

$$q = \frac{a + 2r}{a} = \frac{a + 3a}{a} = 4. \text{ Najmniejsza wartość funkcji } f: y_W = \frac{-A}{4+1} = -\frac{m^2 - 4 \cdot 4}{4} = -\frac{1}{4}m^2 + 4. \text{ Nierówność } -\frac{1}{4}m^2 + 4 > -196 \text{ spełniają liczby } m \in (-20\sqrt{2}; 20\sqrt{2}).$$

108. Suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest nie mniejsza od sumy wyrazów ciągu geometrycznego. Sumy są równe, gdy ciągi są stałe.

Rozwiązanie. a, x, b – ciąg arytmetyczny, a, y, b – ciąg geometryczny. Aby porównać sumy wyrazów obu ciągów, musimy porównać ich środkowe wyrazy. Wiemy, że $x = \frac{a+b}{2}$ i $y^2 = ab$. Liczby a, b, y są dodatnie, więc $y = \sqrt{ab}$.

Badamy znak różnicy $x - y$: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. $x - y \geq 0$, więc $x \geq y$. Zatem suma ciągu arytmetycznego jest nie mniejsza niż suma ciągu geometrycznego, przy czym sumy te są równe wtedy, gdy $a = b$, czyli, gdy ciągi są stałe.

109. 2475.

Rozwiązanie. Jest 45 dwucyfrowych liczb nieparzystych (jest 50 liczb nieparzystych mniejszych od 100, w tym 5 liczb nieparzystych jednocyfrowych), najmniejszą z nich jest 11, a największą 99. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny, zatem $S_{45} = \frac{11+99}{2} \cdot 45 = 55 \cdot 45 = 2475$.

110. a) $a_{100} = 108$; b) $a_n = 1008 - 9n$; c) $S_{19} = 17442$.

111. 11325.

Wskazówka. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4, w którym pierwszy wyraz równy jest 3.

112. $a_1 = 6, a_{10} = 231$.

113. 180.

114. Siódmy.

115. a) 672 400; b) 24 500 475; c) $14\,400 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3$.

116. 4000 \$.

117. 19,3%.

118. a) 15 lat; b) o $\frac{1}{3}$ ha; c) 17 ha i 27 ha.

119. a) 840 m³; b) po trzynastu dniach.

Rozwiązanie. Ilości doprowadzanej każdego dnia wody tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2 (m³). Zatem ilość wody doprowadzonej w ciągu n dni jest równa $\frac{2 \cdot 25 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$, czyli $n^2 + 24n$ (m³). W ciągu n dni ubywa 50n (m³).

Ilość wody V_n po n dniach jest równa $1000 + n^2 + 24n - 50n$, czyli $V_n = n^2 - 26n + 1000$.

a) Ilość wody w basenie po 10 dniach: $V_{10} = 10^2 - 26 \cdot 10 + 1000 = 840$ (m³).

b) Trójkątną $n^2 - 26n + 1000$ najmniejszą wartość osiąga dla $n = -\frac{-26}{2 \cdot 1} = 13$. Zatem najmniej wody w basenie będzie po trzynastu dniach.

120. Jeden wyraz.

121. a) $a_{10} = 23$. b) $S_n = n(n+4)$.

122. $x = -70$.

Wskazówka. Dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg $\frac{x}{3}, \frac{x+1}{3}, \frac{x+3}{3}, \dots, \frac{x+200}{3}$ jest ciągiem arytmetycznym.

123. $n=7$.Rozwiązanie. Liczby $n, n+1, n+2, \dots, 3n, 3n+1$ tworzą ciąg arytmetyczny. Liczba wyrazów tego ciągu jest równa $2n+2$.Zatem $n+(n+1)+(n+2)+\dots+3n+(3n+1)=\frac{n+3n+1}{2} \cdot (2n+2)=4n^2+5n+4=232$. Stąd otrzymujemy $n=7$.

124. Ciąg rosnący.

125. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,42$.Rozwiązanie. Dane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, więc $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{5}$. Stąd $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{4}{25}$.
 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, zatem $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,42$.126. $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$.127. 1250π .Rozwiązanie. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$, więc kolejne miejsca zerowe są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Do przedziału $(0; 50\pi)$ należy pięćdziesiąt miejsc zerowych funkcji f , najmniejszym z nich jest liczba $\frac{\pi}{2}$, a największym $\frac{\pi}{2} + 49\pi$. Obliczamy sumę miejsc zerowych należących do przedziału $(0; 50\pi)$: $S_{50} = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 49\pi}{2} \cdot 50 = 25\pi \cdot 50 = 1250\pi$.128. 2525π (Rozwiązania równania: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{C}$).

129. 25.

Wskazówka. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \sin \frac{\pi}{2}$. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \sin \frac{3\pi}{2}$.130. $\frac{1025}{1024}$.131. $f(k) = 1,5k(k+3)$.Rozwiązanie. Znajdujemy pierwiastki trójmianu $x^2 - 3kx + 2k^2 - k - 1$: $\Delta = 9k^2 - 4(2k^2 - k - 1) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$, $k > -2$, więc $\Delta > 0$ i $\sqrt{\Delta} = k+2$, $x_1 = k-1$, $x_2 = 2k+1$. $x_1 < x_2$ dla każdego $k > -2$, więc nierówność $x^2 - 3kx + 2k^2 - k - 1 \leq 0$ spełniają liczby $x \in (k-1; 2k+1)$.
Liczby całkowite należące do przedziału są liczby $k-1, k, \dots, 2k, 2k+1$. Mamy $k+3$ liczby, które tworzą ciąg arytmetyczny.Zatem $(k-1) + k + \dots + 2k + (2k+1) = \frac{k-1+2k+1}{2} \cdot (k+3) = \frac{3}{2} \cdot k(k+3)$. Funkcja f określona jest wzorem $f(k) = 1,5k(k+3)$.132. b) $p \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.133. $a_3 = \sqrt{3} + 1$.Rozwiązanie. $a_{n+1} = 3 \log_9 a_n = 9^{0,5 \log_9 a_n} = 9^{\log_9 (a_n)^{0,5}} = (a_n)^{0,5}$. Aby obliczyć trzeci wyraz ciągu (a_n) , musimy najpierw obliczyć drugi wyraz tego ciągu: $a_2 = (a_1)^{0,5} = 2(2 + \sqrt{3})$. $a_3 = (a_2)^{0,5} = (4 + 2\sqrt{3})^{0,5} = (3 + 2\sqrt{3} + 1)^{0,5} = ((\sqrt{3} + 1)^2)^{0,5} = \sqrt{3} + 1$.134. 4^{-3} .Rozwiązanie. (b_n) jest ciągiem geometrycznym, więc iloraz $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{C}$ ma stałą wartość. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{3a_{n+1}+5}}{4^{3a_n+5}} = 4^{3(a_{n+1}-a_n)} = 4^{3(a_{n+1}-a_n)} = 64^{a_{n+1}-a_n}$, więc różnica $a_{n+1} - a_n$ ma stałą wartość, a to oznacza, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to pięciowyrazowe ciągi a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 i $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$ również są arytmetyczne.
Zatem $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 8r}{2} \cdot 5 = (a_1 + 4r) \cdot 5 = 20$, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \frac{a_2 + a_{10}}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + r + a_1 + 9r}{2} \cdot 5 = (a_1 + 5r) \cdot 5 = 15$,
gdzie r jest różnicą ciągu (a_n) . Otrzymaliśmy układ równań $a_1 + 4r = 4$ i $a_1 + 5r = 3$, którego rozwiązaniem jest para liczb $a_1 = 8, r = -1$. Iloraz ciągu (b_n) $q = 64^{a_{n+1}-a_n} = 64^{-1} = \frac{1}{64}$.135. $k=4$.Wskazówka. (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 4, którego wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi. Wykaż, że wśród trzech kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest wyraz podzielny przez 3.

PLANIMETRIA

136. 123,4 cm.

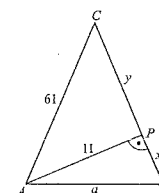
137. 10° .138. $\angle BAC = 70^\circ, \angle ABC = 35^\circ, \angle ACB = 75^\circ$.139. a) 335,5; b) $\sqrt{122}$.Rozwiązanie. a) Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 61 \cdot 11 = 335,5$.b) Z tw. Pitagorasa dla trójkąta APC : $y^2 + 11^2 = 61^2$. Stąd $y = 60$. $IBC = x + 60 = 61$, więc $x = 1$.
Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABP : $a^2 = 11^2 + 1^2$. Stąd $a = \sqrt{122}$.

140. a) (I) Sa, (II) nie są; b) jest tylko jeden taki trójkąt: 3, 4, 5; c) 84, 85.

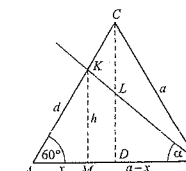
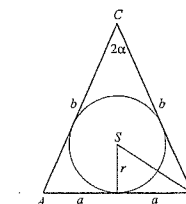
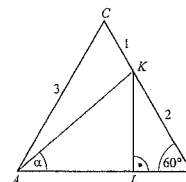
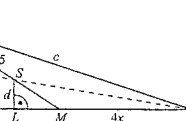
141. 10.

143. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.144. $\lg 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

145. a) 9 i 24; b) 3.

Rozwiązanie. a) Z tw. Pitagorasa dla trójkąta AMC : $(3x)^2 + (4x)^2 = 15^2$. Stąd mamy $x = 3$.
Zatem $AB = 24$ i $AC = 9$.b) Środkiem ciężkości trójkąta jest punkt wspólny jego środkowych. $|SM| = 5$ (bo punkt S dzieli każdą środkową na odcinki o stosunku długości 1:2). Trójkąty LMS i AMC są podobne, więc $\frac{d}{|AC|} = \frac{5}{15}$. Stąd otrzymujemy $d = 3$.146. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.Rozwiązanie. Obwód trójkąta jest równy 9, więc bok ma długość 3. Trójkąt LKB jest połową trójkąta równobocznego o boku 2, zatem $LB = 1$ i $KL = \sqrt{3}$. $\lg \alpha = \frac{|KL|}{|AL|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.147. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.148. $\frac{1}{2}a\sqrt{7}$.149. Podstawa: $\frac{2r}{\lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$. Ramie: $\frac{r}{\lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin \alpha}$.Rozwiązanie. $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, więc $\angle ABS = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. $\frac{r}{a} = \lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$, stąd $a = \frac{r}{\lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$.Zatem $AB = \frac{2r}{\lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$. $\frac{a}{b} = \sin \alpha$, więc $b = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin \alpha} = |AC| = |BC|$.

150. 0,8.

151. $3(2\sqrt{3} + 3)$.152. $\frac{2}{3}a$.Rozwiązanie. $|LD| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. W trójkącie DBL $\lg \alpha = \frac{|LD|}{|DB|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.W trójkącie AMK $\lg 60^\circ = \frac{h}{x} = \sqrt{3}$, stąd ① $h = x\sqrt{3}$. W trójkącie MBK $\lg \alpha = \frac{h}{a-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd② $2h = (a-x)\sqrt{3}$. Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $x = \frac{1}{3}a$ i $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.W trójkącie AMK $\frac{x}{d} = \cos 60^\circ$, więc $d = 2x = \frac{2}{3}a$.

153. $\sqrt[4]{15}$.

Rozwiązanie. a – długość podstawy, $2a$ – długość ramienia. Wyznaczamy długość h wysokości trójkąta poprowadzonej do podstawy, korzystając z tw. Pitagorasa: $h^2 = (2a)^2 - (0,5a)^2 = \frac{15}{4}a^2$, stąd $h = \frac{\sqrt{15}}{2}a$. Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}a = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2 = 25$. Stąd $a = \frac{10}{\sqrt{15}}$.

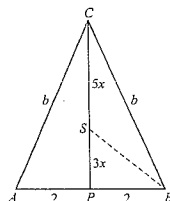
Wyznaczamy długość r promienia okręgu wpisanego w trójkąt: $P = \frac{1}{2}r(2a + 2a + a) = \frac{1}{2}r \cdot 5a = 25$, stąd $r = \frac{10}{a} = \sqrt[4]{15}$.

154. $2\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc odcinki SC i SB są promieniami tego okręgu. Zatem $|SB| = 5x$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta PBS $(3x)^2 + 2^2 = (5x)^2$. Stąd $x = 0,5$, a $|PC| = 8x = 4$.

Z tw. Pitagorasa dla trójkąta PBC $b^2 = 4^2 + 2^2$. Stąd $b = 2\sqrt{5}$.

155. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.156. a) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$, b) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$.

Rozwiązanie. h – długość wysokości poprowadzonej do podstawy.

$h^2 + 2^2 = 8^2$, stąd $h = 2\sqrt{15}$. Obliczamy pole trójkąta ABC : $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$.

a) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, gdzie r jest długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

$4\sqrt{15} = \frac{1}{2}r(4+2+8)$, stąd $r = \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

b) Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie.

$4\sqrt{15} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{4R}$, stąd $R = \frac{16}{\sqrt{15}}$.

157. $2\sqrt{3}$.

Wskazówki. I SPOSÓB. Środkowa trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej.

II SPOSÓB. Skorzystaj z tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta.

158. $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Rozwiązanie. a, b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

Musimy obliczyć wartość iloczynu $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$, czyli wartość wyrażenia $\frac{ab}{c^2}$. Wiemy, że zachodzi równość $5 \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Dzielimy obie strony

tej równości przez $\frac{5}{2}c^2$, otrzymujemy $\frac{ab}{c^2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$.

159. $\frac{20}{\pi}$.160. $3(2\sqrt{3}-3)$.161. $\frac{7}{\sqrt{3}}$.162. $\frac{\sqrt{P \sin \alpha}}{\sqrt{2}(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)}$ $\left[\frac{2P}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \lg \frac{180^\circ - \alpha}{4} \right]$

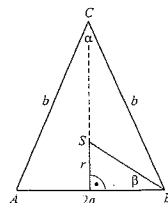
Rozwiązanie. $P = \frac{1}{2}b^2 \sin \alpha$, stąd $b = \sqrt{\frac{2P}{\sin \alpha}}$. $\frac{a}{b} = \sin \frac{\alpha}{2}$, zatem $a = b \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2P}{\sin \alpha}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.

I SPOSÓB. $P = \frac{1}{2}r(2a+2b) = r(a+b)$. Zatem $r = \frac{P}{a+b} = \frac{P}{b \sin \frac{\alpha}{2} + b} = \frac{P}{b(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)} = \frac{P}{\sqrt{\frac{2P}{\sin \alpha}}(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)} = \frac{\sqrt{P \sin \alpha}}{\sqrt{2}(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)}$.

II SPOSÓB. $|\angle ABC| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. Środek S okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwu-

siecznych kątów trójkąta, więc $\beta = 0,5 \cdot |\angle ABC| = \frac{180^\circ - \alpha}{4}$.

$\frac{r}{a} = \lg \beta$, zatem $r = a \lg \beta = \sqrt{\frac{2P}{\sin \alpha}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \lg \frac{180^\circ - \alpha}{4}$.

163. $2\cos \alpha(1 - \cos \alpha) \{ = \lg \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha \}$.164. Pole: $\frac{d^2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\lg \alpha}$, promień: $\frac{d \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin 2\alpha}$.165. $2\sqrt{15}$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: $2a, h, r, R$ – długości odpowiednio podstawy, wysokości poprowadzonej do podstawy, promienia okręgu wpisanego, promienia okręgu opisanego.

Wyrazimy r i R w zależności od a . $h^2 + a^2 = (4a)^2$, więc $h = a\sqrt{15}$. Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{15} = a^2\sqrt{15}$.

Ze wzorów na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, $P = \frac{abc}{4R}$ i z równości $P = a^2\sqrt{15}$ otrzymujemy $r = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ i $R = \frac{8a\sqrt{15}}{15}$.

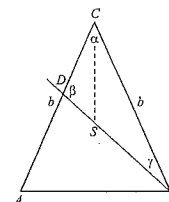
Wiemy, że $\frac{a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{5} + \frac{8a\sqrt{15}}{15} = 11$. Stąd $a = \sqrt{15}$, więc podstawa ma długość $2\sqrt{15}$.

166. a) $\frac{b \sin \alpha}{2(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)}$, b) $\frac{b \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$.

Rozwiązanie. b) Trójkąt BCS jest równoramienny, odcinek SC zawiera się w dwusiecznej kąta ACB , więc $\gamma = 0,5\alpha$. $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 1,5\alpha$. Z tw. sinusów dla trójkąta BDC

$$\frac{b}{\sin(180^\circ - 1,5\alpha)} = \frac{|DB|}{\sin \alpha}$$

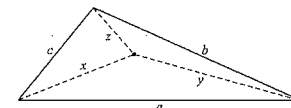
$$\text{Stąd } |DB| = \frac{b \sin \alpha}{\sin(180^\circ - 1,5\alpha)} = \frac{b \sin \alpha}{\sin 1,5\alpha}$$

167. $\frac{115}{343}$.

Wskazówki. I SPOSÓB. Skorzystaj z tw. sinusów. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha$. II SPOSÓB. Dwusieczna kąta ABC dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty, z których jeden jest równoramienny, a drugi jest podobny do trójkąta ABC .

169.

Rozwiązanie. Z nierówności trójkąta mamy $x+y > a$ i $y+z > b$ i $z+x > c$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy nierówność $2x+2y+2z > a+b+c$, a po podzieleniu obu stron otrzymanej nierówności przez 2, dostajemy $x+y+z > 0,5(a+b+c)$.

170. $\lg \angle CAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stosunek promieni: 1.171. $\sin \angle CAM = \frac{\sqrt{7}}{14}$, $\sin \angle MAB = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.172. $\frac{5\sqrt{6}d}{3}$.173. $\frac{3}{4}$.174. $\frac{R(3\sqrt{5}+1)}{4}$ lub $\frac{R(3\sqrt{5}-1)}{4}$.

Rozwiązanie. Ozn. c – długość trzeciego boku. α – miara kąta trójkąta leżącego naprzeciwko boku o długości $R\sqrt{3}$.

Z tw. sinusów $\frac{R\sqrt{3}}{\sin \alpha} = 2R$. Stąd $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem $\alpha = 60^\circ$ lub $\alpha = 120^\circ$.

Jeżeli $\alpha = 60^\circ$, to z tw. kosinusów $3R^2 = c^2 + \frac{1}{4}R^2 - 2c \cdot \frac{1}{2}R \cdot \frac{1}{2}$. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $2c^2 - cR - \frac{11}{2}R^2 = 0$.

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $c = \frac{R+3\sqrt{5}R}{4}$.

Jeżeli $\alpha = 120^\circ$, to z tw. kosinusów $3R^2 = c^2 + \frac{1}{4}R^2 - 2c \cdot \frac{1}{2}R \cdot (-\frac{1}{2})$. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $2c^2 + cR - \frac{11}{2}R^2 = 0$.

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $c = \frac{-R+3\sqrt{5}R}{4}$.

175. $|BC| = 8$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: $|BC| = 2x$, $|\angle ABC| = 2\alpha$.

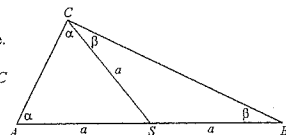
Z tw. cosinusów dla trójkąta ABC : ① $36 = 16 + 4x^2 - 16x \cdot \cos \alpha$.

Z tw. cosinusów dla trójkąta ABA' : ② $10 = 16 + x^2 - 8x \cdot \cos \alpha$.

Mnożąc równanie ② przez -2 i dodając stronami otrzymane równanie i równanie ①, dostajemy $32 = 2x^2$. Stąd $2x = 8$.

176.

Rozwiązanie. Trójkąty ASC i SBC są równoramienne, więc mają równe kąty przy podstawie.
 $|\angle ASC| = 180^\circ - 2\alpha$, $|\angle BSC| = 180^\circ - 2\beta$.
 $|\angle ASC| + |\angle BSC| = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$. Stąd $\alpha + \beta = 90^\circ = |\angle ACB|$, więc trójkąt ABC jest prostokątny.

177. $\sqrt{3}$.

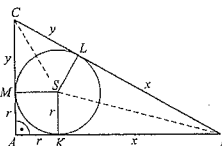
Rozwiązanie. a, b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej. Wiemy, że $a + b = \sqrt{3} + \sqrt{5} - c$ i $ab = 1$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = [(\sqrt{3} + \sqrt{5}) - c]^2 - 2 \cdot 1 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot c + c^2 - 2. \text{ Stąd } 2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot c = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 2.$$

$$\text{Zatem } c = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \sqrt{3}.$$

178.

Rozwiązanie. $|CB| = 2R$, gdzie R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .
 $\triangle KBS \cong \triangle BLS$, więc $|KB| = |BL| = x$, $\triangle MSC \cong \triangle SLC$, więc $|MC| = |LC| = y$.
 Zatem $x + y = 2R$. $|AB| + |AC| = 2r + x + y = 2r + 2R$.



$$179. a) y = \frac{2x-2}{x-2}, x \in (2; +\infty). \quad 180. 1 + \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sin \alpha (1 + \tan \frac{\alpha}{2})}{\tan \frac{\alpha}{2}}.$$

181. 45° .

Wskazówka. Skorzystaj ze związku między miarami kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku.

182. 0,6 lub 0,8.

183. $\frac{25}{12}h$.

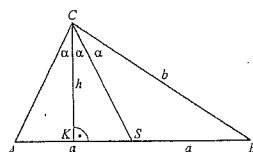
Rozwiązanie. a, b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej.
 Wiemy, że $a + b = 5h - c$. Pole trójkąta: $P = 0,5ab$ i $P = 0,5ch$, stąd $ab = ch$. $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (5h - c)^2 - 2ch$.
 Równość $(5h - c)^2 - 2ch = c^2$ sprowadzamy do postaci $25h^2 = 12ch$. Stąd $c = \frac{25}{12}h$.

184. 3 : 10.

185. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Rozwiązanie. Trójkąt ASC jest równoramienny, więc $|KS| = \frac{1}{2}a$. Odcinek CS zawiera się w dwusiecznej kąta KCB , zatem $\frac{h}{b} = \frac{0,5a}{a} = \frac{1}{2}$ (z twierdzenia o dwusiecznej kąta trójkąta).

$\frac{h}{b} = \cos 2\alpha$, stąd $2\alpha = 60^\circ$. Obliczenie miar kątów trójkąta jest teraz natychmiastowe:
 $|\angle ACB| = 3\alpha = 90^\circ$, $|\angle KAC| = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$, $|\angle KBC| = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ$.

186. $\sqrt{b(a+b)}$.

Wskazówka. Poprowadź dwusieczną tego kąta trójkąta, którego ramiona zawierają boki o długościach a i b . Uzasadnij, że dwusieczna ta dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty, z których jeden jest równoramienny, a drugi jest podobny do danego.

187. 25 : 4.

188. 12 : 5.

189. $\frac{4}{3}$.

190. Gdy $m \in (0; 1)$, to $\lg \alpha = \frac{\sqrt{3}(m+1)^2}{(m+3)(m-1)}$. Gdy $m \in (1; +\infty)$, to $\lg \alpha = \frac{\sqrt{3}(m+1)^2}{(3m+1)(m-1)}$.

191. $\sqrt{\frac{m}{5}}$.

Wskazówka. Uzasadnij, że odległość punktu P od boku AC jest równa $\frac{1}{3}|BC|$, a od boku BC równa jest $\frac{1}{3}|AC|$.

192. 5, 7, 9.

194.

Rozwiązanie. $a, a+p, a+2p$ – długości boków trójkąta. r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt. P – pole trójkąta.

$$P = \frac{1}{2}r(a + a + r + a + 2r) = \frac{1}{2}3r(a + r). \quad P = \frac{1}{2}h(a + r), \text{ gdzie } h \text{ jest wysokością poprowadzoną do boku o długości } a + r.$$

Zatem $h = 3r$, czyli $r = \frac{1}{3}h$.

195. $\frac{3}{4}$ lub $\frac{4}{3}$.

Rozwiązanie. $a-r, a, a+r$ – długości boków trójkąta ($r > 0$). Z tw. Pitagorasa $(a-r)^2 + a^2 = (a+r)^2$. Stąd $a^2 - 4ar = 0$. Dzielimy obie strony otrzymanego równania przez a , otrzymujemy $a - 4r = 0$, zatem $a = 4r$.

Wyznaczamy tangens jednego z kątów ostrych: $\frac{a-r}{a} = \frac{4r-r}{4r} = \frac{3}{4}$.

196. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.197. $\sqrt{6} - 2$.

Wskazówka. Środkowa poprowadzona do przeciwprostokątnej jest od niej dwa razy krótsza.

198. 255 cm².199. $9(\sqrt{3} + 1)$.

Wskazówki. I. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadź wysokość do dłuższego boku.

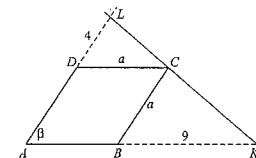
II. Oblicz miarę kąta ostrego równoległoboku.

200. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.201. 3 i $\sqrt{11}$.202. $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{58}$.203. $48\sqrt{2}$.204. a) 32; b) $4\sqrt{2}$ i $4\sqrt{10}$.206. $\frac{1}{\pi}$.

207. 6.

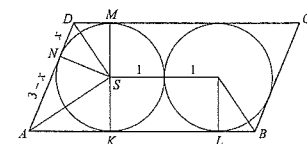
Rozwiązanie. $|\angle KBC| = |\angle CDL| = \beta$ i $|\angle BKC| = |\angle DCL|$, więc trójkąty BKC i DCL są podobne.

Zatem $\frac{4}{a} = \frac{a}{9}$. Stąd $a = 6$.

208. Pole: $9\sqrt{3}$. Przekątna: $3\sqrt{3}$.

209. 5.

Rozwiązanie. Trójkąty AKS i NAS są przystające, więc $|AK| = 3 - x$. Podobnie, z przystawania odpowiednich trójkątów wnioskujemy, że $|DM| = x$ i $|BL| = x$.
 $|AB| = |AK| + |KL| + |LB| = 3 - x + 2 + x = 5$.

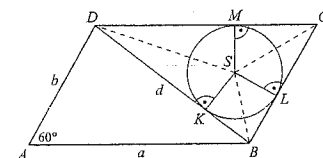
210. $|BD| = 7$.

Rozwiązanie. $|\angle BCD| = 180^\circ - |\angle ABC| = 60^\circ$.

SPOSÓB. S jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów trójkąta BCD , więc łatwo uzasadnić, że $\triangle SLC \cong \triangle SCM$, $\triangle SMD \cong \triangle DKS$, $\triangle KBS \cong \triangle BLS$.
 Zatem $|LC| = |MC|$, $|DM| = |DK|$, $|KB| = |BL|$.

W trójkącie SLC $\frac{|SL|}{|LC|} = \tan 30^\circ$, więc $|LC| = 3|MC|$. Wiemy, że $a + b = 13$.

$$d = |DK| + |KB| = |DM| + |BL| = a + b - (|MC| + |LC|) = 13 - 6 = 7.$$



II SPOSÓB. Wiemy, że $a+b=13$. Z tw. kosinusów dla trójkąta BCD : $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = (a+b)^2 - 2ab = 13^2 - 2ab$.
 Stąd $ab = \frac{169-d^2}{2}$. Pole trójkąta BCD : $P = \frac{1}{2} ab \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (a+b+d)$, stąd i z równości $ab = \frac{169-d^2}{2}$ dostajemy równanie $\frac{169-d^2}{6} = 13+d$. Rozwiązując otrzymane równanie otrzymamy $d=7$.

211. $\frac{2R_C R_D}{\sqrt{R_C^2 + R_D^2}}$

Rozwiązanie. Ozn. a – długość boku rombu, p, q – długości przekątnych rombu odpowiednio AC i BD .

Pole rombu $P = \frac{1}{2} pq$. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P = P_{\triangle ABD}$. $P_{\triangle ABC} = \frac{a^2 p}{4R_C} = \frac{1}{4} pq$, stąd $q = \frac{a^2}{R_C}$. $P_{\triangle ABD} = \frac{a^2 q}{4R_D} = \frac{1}{4} pq$, stąd $p = \frac{a^2}{R_D}$.

Z tw. Pitagorasa: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = a^2$. Zatem $\left(\frac{a^2}{2R_D}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2R_C}\right)^2 = a^2$, stąd otrzymujemy $a = \frac{2R_C R_D}{\sqrt{R_C^2 + R_D^2}}$.

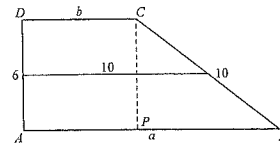
212.

Wskazówka. Skorzystaj z tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta.

213. 6 i 14.

Rozwiązanie. Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa połowie sumy długości podstaw, zatem ① $\frac{a+b}{2} = 10$.

$|PB| = a - b$, z tw. Pitagorasa dla trójkąta PBC $(a-b)^2 = 10^2 - 6^2$. Stąd ② $a-b=8$. Rozwiązaniem układu równań ① i ② jest para liczb $a=14$ i $b=6$.

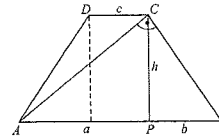


214. $12(\sqrt{3}-1)$.

215. $a\sqrt{ab}$.

Rozwiązanie. $c = a - b$. Trójkąty AHC i CHB są podobne, więc $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$. Stąd $h = \sqrt{ab}$.

Obliczamy pole trapezu: $P = \frac{c+a+b}{2} \cdot h = \frac{a-b+a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} = a\sqrt{ab}$.

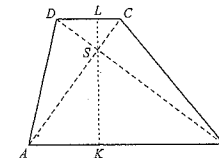


216. $2\sqrt{3}$.

217. 1 i 3.

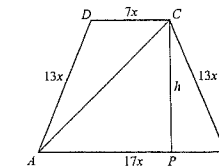
Rozwiązanie. $|\angle ABS| = |\angle SDC|$ (bo są kątami odpowiadającymi), $|\angle ASB| = |\angle DSC|$ (bo są kątami wierzchołkowymi). Zatem trójkąty ABS i DCS są podobne (cecha kąt-kąt). Skala podobieństwa tych trójkątów jest równa $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{6}{2} = 3$. Odcinki KS i LS są wysokościami trójkątów ABS i DCS poprowadzonymi do odpowiadających sobie boków, więc $\frac{|KS|}{|LS|} = 3$, czyli $|KS| = 3|LS|$. Wiemy, że $|KS| + |LS| = 4$.

Zatem $3|LS| + |LS| = 4$, więc $|LS| = 1$, a $|KS| = 3$.



218. 25.

Rozwiązanie. $|PB| = (|AB| - |DC|) : 2 = (17x - 7x) : 2 = 5x$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta PBC $h^2 = (13x)^2 - (5x)^2 = 144x^2$, stąd $h = 12x$. Ze wzoru na pole trapezu $0,5 \cdot (17x + 7x) \cdot 12x = 144x^2 = 36$. Stąd $x = 0,5$. Obliczamy obwód trapezu: $17x + 13x + 7x + 13x = 50x = 50 \cdot 0,5 = 25$.



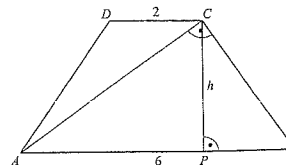
219. 60° i 120° .

220. $8\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. $|PB| = (|AB| - |DC|) : 2 = (6 - 2) : 2 = 2$, $|AP| = 6 - 2 = 4$. Odcinek AB jest średnicą okręgu opisanego na trapezie, więc kąt ACB jest prosty. Trójkąty APC i PBC są podobne (cecha kąt-kąt), więc

$\frac{h}{|PB|} = \frac{|AP|}{h}$. Stąd $h^2 = |AP| \cdot |PB| = 2 \cdot 4 = 8$, więc $h = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trapezu: $P = 0,5 \cdot (2 + 6) \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

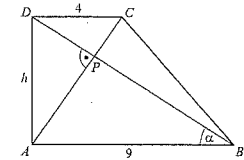


221. 9.

222. 6.

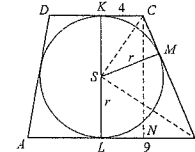
Rozwiązanie. Trójkąt ABD jest prostokątny, więc $\angle ADB = 90^\circ - \alpha$. Trójkąt APD jest prostokątny, więc $\angle DAP = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

W trójkącie ACD $\tan \alpha = \frac{4}{h}$. W trójkącie ABD $\tan \alpha = \frac{h}{9}$. Zatem $\frac{4}{h} = \frac{h}{9}$. Stąd otrzymujemy $h = 6$.



223. 6 cm.

Rozwiązanie. Trójkąty prostokątne LBS i BMS mają wspólną przeciwprostokątną i $LS = MS = r$, więc długości przyprostokątnych LB i BM są równe. Rozpatrując trójkąty SMC i SCK , dochodzimy do wniosku, że $SK = MC = 4$. Zatem $|BC| = |BM| + |MC| = 9 + 4 = 13$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta NBC $(2r)^2 + 5^2 = 13^2$. Stąd $r = 6$.



224. Obwód: 16. Pole: 8.

225. 5 i 30.

226. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin \beta}$

227. 615 cm^2 .

228. 2 : 1.

Wskazówka. Wyznacz stosunek pól trójkątów ABK i CK , gdzie K jest punktem wspólnym prostych AD i BC .

229. $\frac{\pi}{4} ab$.

230. $\frac{P \sin \alpha \sin \beta}{2(\sin \alpha + \sin \beta)}$

231. $\frac{4}{3}$.

232. Pole trapezu: $\frac{9r^2}{2}$. Stosunek długości przekątnych: $\frac{2\sqrt{13}}{5}$.

233. 7 cm i 1 cm.

234. $\frac{a^2}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \tan \alpha}$

Rozwiązanie. $\frac{x}{y} = \tan \alpha$ i $\frac{y}{x+a} = \tan \alpha$. Stąd $x = \frac{a \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. Wyzna-

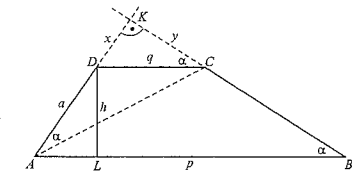
czamy długości podstaw trapezu: $\frac{x}{q} = \sin \alpha$, stąd $q = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

$\frac{x+a}{p} = \sin \alpha$, stąd $p = \frac{a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha}$. Wyznaczamy długość wysokości tra-

pezu: $|\angle ABK| = 90^\circ - \alpha$, więc $|\angle ADL| = \alpha$, $\frac{h}{a} = \cos \alpha$, stąd $h = a \cos \alpha$.

Pole trapezu: $P = \frac{1}{2} \cdot (p+q)h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} + \frac{a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \right) \cdot a \cos \alpha = \frac{a \sin^2 \alpha + a \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} \cdot a \cos \alpha =$

$\frac{a^2 \cos \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha} = \frac{a^2}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \tan \alpha}$



235.

Wskazówka. Przekątna tworzy z podstawami równe kąty, więc jeden z trójkątów, na które przekątna dzieli trapez, jest równoramienny.

236. 2, 2, 2, 4.

237.

Rozwiązanie. β, γ – miary kątów odpowiednio ABC i BCD . Suma kątów przyległych do ramienia trapezu jest równa 180° , więc $\beta + \gamma = 180^\circ$.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia dwusiecznych jego kątów, zatem $|\angle SBC| + |\angle BSC| = 0,5\beta + 0,5\gamma = 0,5(\beta + \gamma) = 90^\circ$. Suma dwóch kątów trójkąta SBC wynosi 90° , więc trójkąt ten jest prostokątny.

238. $3,6 \text{ cm}^2$.

Wskazówki. I. Rozwiąż zadanie 237. II. Poprowadź wysokość trapezu przechodzącą przez środek okręgu wpisanego w trapez i poszukaj trójkątów podobnych.

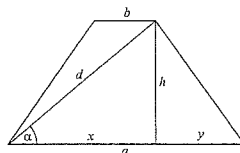
239. $\frac{3\sqrt{17}r}{8}$.

240. $0,5d^2 \sin 2\alpha$.

Rozwiązanie. $\frac{h}{d} = \sin \alpha$, stąd $h = d \sin \alpha$. $\frac{x}{d} = \cos \alpha$, stąd $x = d \cos \alpha$.

$y = \frac{a-b}{2}$, $x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = xh = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$.



241. 3 cm i 5 cm.

Wskazówka. Wysokość trapezu poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których jeden ma długość równą długości odcinka łączącego środki ramion trapezu.

242. Promień okręgu wpisanego: $\frac{3}{2}$. Promień okręgu opisanego: $\frac{10}{3}$.

243. Od podstaw: $\frac{4}{3}$ i $\frac{16}{3}$. Od ramion: $\frac{32}{25}$.

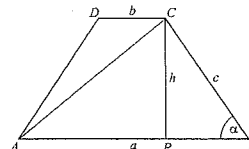
244. $\sqrt{2} - 1$.

Rozwiązanie. Trapez ABCD jest wpisany w okrąg, więc jest równoramienny.

$\frac{a+b+2c}{a+b} = 1 + \frac{2c}{a+b} = 1,5$, stąd $a+b=4c$. $|AP| = \frac{a+b}{2} = 2c$.

AB jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc ABC jest trójkątem prostokątnym i $\angle ACP = \alpha$. $\frac{h}{c} = \sin \alpha$, $\frac{|AP|}{h} = \frac{2c}{h} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, zatem $\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Przekształcając ostatnią równość, otrzymujemy $\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0$. Otrzymane równanie rozwiązujemy wprowadzając niewiadomą pomocniczą $t = \cos \alpha$: $t^2 + 2t - 1 = 0$, $t_1 = -1 - \sqrt{2}$, $t_2 = -1 + \sqrt{2}$. Kosinus kąta ostrego jest dodatni, więc $\cos \alpha = -1 + \sqrt{2}$.



245. $\frac{a-b}{2}$.

Wskazówka. Niech K będzie punktem wspólnym prostych zawierających ramiona AD i BC trapezu. Poprowadź z wierzchołka K środkowe trójkątów ABK i DCK.

246.

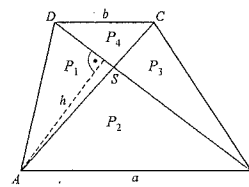
Rozwiązanie. P_1, P_2, P_3, P_4 – pola trójkątów odpowiednio DAS, ABS, SBC, DSC.

a) $P_{ABC} = P_2 + P_3$, $P_{ABD} = P_2 + P_1$. $P_{ABC} = P_{ABD}$ (pola trójkątów ABC i ABD są równe ponieważ mają wspólny bok, a wysokości obu trójkątów poprowadzone do tego boku mają równą długość). Z równości $P_2 + P_3 = P_2 + P_1$ otrzymujemy równość $P_3 = P_1$.

b) Trójkąty ABS i CDS są podobne (kąty ABS i CDS są kątami odpowiadającymi, kąty ASB i CSD są kątami wierzchołkowymi), więc stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Skala podobieństwa trójkątów ABS i CDS jest równa $a:b$, zatem $P_2:P_4 = a^2:b^2$.

c) Pokażemy, że $\frac{P_2}{P_1} = \frac{a}{b}$. Trójkąty ABS i CDS są podobne, więc stosunki odpowiednich boków są równe: $\frac{|BS|}{|SD|} = \frac{a}{b}$. Trójkąty ABS i ASD

mają wspólną wysokość h. Zatem $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}|BS|h}{\frac{1}{2}|SD|h} = \frac{|BS|}{|SD|} = \frac{a}{b}$. Analogicznie dowodzimy, że $\frac{P_1}{P_4} = \frac{a}{b}$.



247. $\frac{21}{2}$, $\frac{63}{2}$, $\frac{63}{2}$, $\frac{189}{2}$.

Rozwiązanie. W trapez ABCD można wpisać okrąg więc $a+b=13+15$. Korzystamy ze wzoru na pole trapezu: $0,5(a+b)h = 0,5 \cdot 28h = 168$, stąd $h=12$. Z tw. Pitagorasa dla trójkątów AKD i LBC znajdujemy $|AK|=5$ i $|LB|=9$. Zatem $a=5+b+9$. Rozwiązaniem układu równań 1 i 2 jest para $a=21$ i $b=7$.

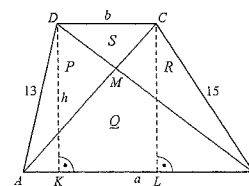
P, Q, R, S – pola trójkątów odpowiednio DAM, ABM, MBC, DMC.

$P=R$ (patrz rozwiązanie zadania 246 a)).

$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b} = \frac{21}{7} = 3$ (patrz rozwiązanie zadania 246 c)), stąd $Q=3P$.

$\frac{Q}{S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 9$ (patrz rozwiązanie zadania 246 b)), stąd $Q=9S$. $P+Q+R+S = 3S+9S+3S+S = 16S = 168$, więc $S=10,5$.

$P=R=3S=31,5$, $Q=9S=94,5$.



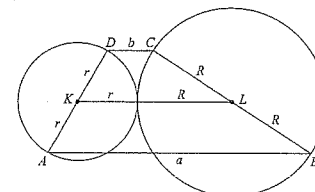
248. $\frac{S}{(k+1)^2}$, $\frac{Sk}{(k+1)^2}$, $\frac{Sk}{(k+1)^2}$, $\frac{Sk^2}{(k+1)^2}$.

249. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

250.

Rozwiązanie. Wykażemy, że sumy długości przeciwległych boków trapezu są równe, czyli, że $a+b=2r+2R$.

Odcinek KL jest odcinkiem łączącym środki ramion trapezu, więc jego długość jest równa połowie sumy długości podstaw trapezu. Zatem $|KL|=r+R=0,5(a+b)$. Stąd $a+b=2r+2R$.



252. $|\angle K|=70^\circ$, $|\angle L|=130^\circ$, $|\angle M|=110^\circ$, $|\angle N|=50^\circ$.

Wskazówki. I. Przekątne czworokąta KLMN są prostopadłe do odpowiednich jego boków. II. Skorzystaj z równości między odpowiednimi kątami wpisanymi i kątami między styczną a cięciwami okręgu.

253. $|\angle A|=50^\circ$, $|\angle B|=90^\circ$, $|\angle C|=90^\circ$, $|\angle D|=130^\circ$.

Rozwiązanie. Kąty ABC i ADC są kątami wpisanymi w okrąg opartymi na średnicy, więc są kątami prostymi. Kąt BAD jest kątem wpisanym, opartym na tym samym, co kąt środkowy BSD, więc $|\angle BAD|=0,5 \cdot |\angle BSD|=50^\circ$. Suma miar kątów czworokąta wynosi 360° , zatem $|\angle BCD|=360^\circ - (50^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 130^\circ$.

254. 70° , 80° , 100° , 110° .

Wskazówka. Skorzystaj z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku.

256. $|\angle A|=40^\circ$, $|\angle B|=70^\circ$, $|\angle D|=110^\circ$, $|\angle C|=140^\circ$.

Rozwiązanie. DBC jest trójkątem równoramiennym o kącie przy podstawie 20° , więc $|\angle BCD|=140^\circ$. Kąt ADB jest prosty (jest kątem opartym na średnicy), więc $|\angle ADC|=90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$.

Korzystając z tw. o czworokacie wpisanym w okrąg, znajdujemy $|\angle BAC|=40^\circ$ i $|\angle ABC|=70^\circ$.

257. 60° , 80° , 100° , 120° .

258. $|\angle B|=60^\circ$, $|\angle C|=100^\circ$, $|\angle D|=120^\circ$.

260. Długość boku AD jest równa 5.

261. $\frac{109\sqrt{3}}{6}$ cm².

263. $|\angle A|=60^\circ$.

Rozwiązanie. Ozn. α – miara kąta BAC. $|\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ - \alpha$.

$|\angle OBC| + |\angle OCB| = 0,5 \cdot (|\angle ABC| + |\angle ACB|) = 0,5 \cdot (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - 0,5\alpha$. $|\angle TOS| = |\angle COB| = 180^\circ - (90^\circ - 0,5\alpha) = 90^\circ + 0,5\alpha$.

Na czworokacie ATOS można opisać okrąg, więc $|\angle TOS| + |\angle TAS| = 180^\circ$. Zatem $90^\circ + 0,5\alpha + \alpha = 180^\circ$, stąd $\alpha = 60^\circ$.

265. Sześć razy.

Rozwiązanie. a – długość boku AB, b – długość boku CD. Gdybyśmy poprowadzili prostą przechodzącą przez punkt K, która jest styczną w punkcie S do okręgu opisanego na czworokacie ABCD, to na mocy tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej $|KS|^2 = a \cdot 2a = 8b \cdot 9b$. Stąd $a = 6b$.

266. Obwód: $14\sqrt{3} + 3\sqrt{21}$. Pole: $\frac{189\sqrt{3}}{4}$.

Wskazówka. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny. Wykorzystując równość kątów ADB i BDC, uzasadnij, że $|AD|=2|DC|$.

267. $|\angle BAM|=30^\circ$.

Rozwiązanie. $\angle AMB$ jest oparty na średnicy, więc $|\angle AMB|=90^\circ$. ① $\frac{b}{2r} = \sin \alpha$.

② $\frac{c+d}{2r} = \cos \alpha$, ③ $\frac{a}{r} = \tan \alpha$, ④ $\frac{r}{d} = \cos \alpha$. W czworokąt OBMK można wpisać

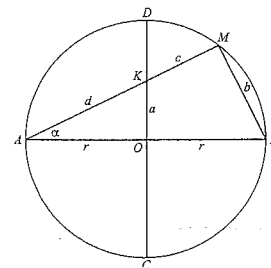
okrąg, więc ⑤ $a+b=c+r$. Wyznaczając z równości ①, ②, ③, ④ a, b, c i podstawiając do równości ⑤, otrzymujemy $\tan \alpha + 2r \sin \alpha = 2r \cos \alpha - \frac{r}{\cos \alpha} + r$.

Dzieląc obie strony tego równania przez r otrzymujemy równanie trygonometryczne $2 \sin \alpha - 1 = 2 \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Przekształcając prawą stronę dostajemy

$2 \sin \alpha - 1 = \frac{-2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1}{\cos \alpha}$, a następnie $2 \sin \alpha - 1 = \frac{-(2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha}$.

Stąd już łatwo uzasadnić, że $\sin \alpha = 0,5$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

Uwaga. Otrzymane równanie trygonometryczne można rozwiązać w prostszy sposób korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne podwójnego kąta i wzorów na sumy funkcji trygonometrycznych, których znajomość nie jest wymagana na maturze.



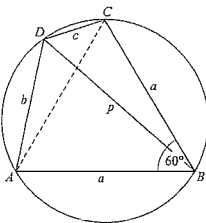
268.

Rozwiązanie. Trójkąt ABC jest równoboczny, więc $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$. Z tw. o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku mamy $\angle ADB = 60^\circ$ i $\angle BDC = 60^\circ$. Z tw. kosinusów dla trójkątów ADB i BDC : $a^2 = b^2 + p^2 - bp$ i $a^2 = c^2 + p^2 - cp$. Odejmując stronami oba równania, otrzymujemy $b^2 - c^2 - bp + cp = 0$. Stąd $(b-c)(b+c-p) = 0$. Zatem $b=c$ lub $b+c=p$.

Pokażemy, że równość $b+c=p$ zachodzi także wtedy, gdy $b=c$. Jeśli $b=c$, to $p = bDI = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$

(przekątna BD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC) i $b = |AD| = c = |IDC| = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ (AD i DC są bokami trójkąta równoramiennego o kącie ostrym 30°). Zatem

wtedy również zachodzi równość $b+c=p$.

269. $|BC| = 4$.

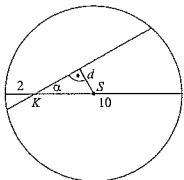
Rozwiązanie. Ozn. 2α – miara kąta DAB . Pola trójkątów BCA i BCD mają równe pola, ponieważ $P_{BCA} = P_{BCE} + P_{ADE}$, $P_{BCD} = P_{BCE} + P_{CDE}$, a wiemy, że $P_{BCE} = P_{CDE}$. Jeżeli pola trójkątów BCA i BCD mają równe pola, to wysokości obu trójkątów poprowadzone do boku BC mają równe długości. Zatem punkty A i D są jednakowo odległe od prostej BC , a to oznacza, że boki BC i AD są równoległe. Jeżeli boki BC i AD są równoległe, to $\angle DAC = \angle BCA = \alpha$ (bo kąty DAC i BCA są naprzemianległe, a przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB). Zatem trójkąt ABC jest równoramienny (bo kąty przy wierzchołkach A i C mają miarę α), czyli boki AB i BC mają długość 4.

270. π .

271. 2.

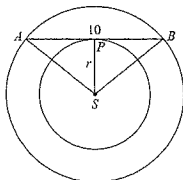
Rozwiązanie. $\alpha = 30^\circ$. Średnica okręgu ma długość 12, więc promień ma długość 6.

$|KS| = 6 - 2 = 4$. $\frac{d}{4} = \sin 30^\circ = 0,5$, zatem $d = 2$.

272. 50° i 110° .273. $2\frac{2}{3}$ i $5\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie. $|AP| = 5$, $|AS| = r + 3$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta PAS $(r+3)^2 = r^2 + 5^2$.

Stąd $r = 2\frac{2}{3}$. Długość promienia większego okręgu jest równa $5\frac{2}{3}$.

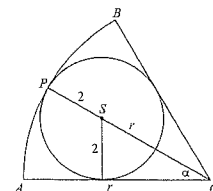
274. $4\sqrt{34}$.275. 12 cm^2 .

Wskazówka. Jeśli a jest długością boku sześciokąta foremnego, to długość promienia okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równa a , zaś długość promienia okręgu wpisanego równa jest wysokości trójkąta równobocznego o boku a .

276. a) 4; b) 4.

277. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$.278. Pole pierścienia: $P(x) = 0,25\pi x^2$, gdzie x – długość cięciwy AB .

279. 3.

280. 6π .

Rozwiązanie. Środek S okręgu wpisanego w wycinek koła leży na dwusiecznej kąta AOB .

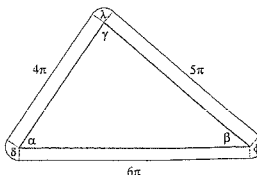
więc $\alpha = 30^\circ$. $|SO| = r - 2$. $\frac{2}{r-2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, stąd $r = 6$.

Obliczamy pole wycinka koła: $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2 = 6\pi$.

281. 12 lub $2\sqrt{22}$.282. 17π .

Rozwiązanie. $\delta = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \alpha)$, $\varphi = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \beta)$, $\lambda = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \gamma)$. $\delta + \varphi + \lambda = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$. Zatem suma długości łuków odpowiadających kątami środkowym δ, φ, λ jest równa długości okręgu o promieniu 1.

Obliczamy długość linii: $2\pi \cdot 1 + 6\pi + 5\pi + 4\pi = 17\pi$.

283. $a(\sqrt{3}-1)$.

Wskazówka. Trójkąty ABK i CDL są równoboczne.

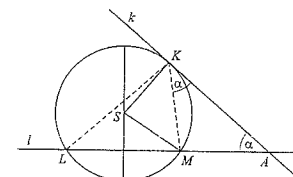
284. $28 - 8\sqrt{6}$.

285.

Rozwiązanie. Rozwiązanie z wykorzystaniem zależności między kątem środkowym i kątem między styczną a cięciwą okręgu. Odcinki MK i MA mają równą długość, więc kąty przy wierzchołkach A i K trójkąta MAK mają równe miary.

Wykorzystując zależność między kątem środkowym i kątem między styczną a cięciwą okręgu, mamy: $\angle KSM = 2\alpha$. Kąt KLM jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, co kąt środkowy KSM , więc $\angle KLM = 0,5 \cdot \angle KSM = \alpha$. $\angle MLK = \alpha$ i $\angle LAK = \alpha$, więc trójkąt LAK jest równoramienny. Zatem $|KL| = |AK|$.

Rozwiązanie z wyprowadzeniem zależności między kątem środkowym i kątem między styczną a cięciwą okręgu. Odcinki MK i MA mają równą długość, więc kąty przy wierzchołkach A i K trójkąta MAK mają równe miary. Kąt SKA jest prosty, więc $\angle SKM = 90^\circ - \alpha$. Trójkąt MKS jest równoramienny, więc $\angle SMK = 90^\circ - \alpha$. Zatem $\angle MSK = 90^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$. Kąt KLM jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, co kąt środkowy KSM , więc $\angle KLM = 0,5 \cdot \angle KSM = \alpha$. $\angle MLK = \alpha$ i $\angle LAK = \alpha$, więc trójkąt LAK jest równoramienny. Zatem $|KL| = |AK|$.

286. $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$.287. $a(\sqrt{3}-1)$, $\frac{1}{2}a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Rozwiązanie. Ozn. r – długość promienia okręgu o środku w punkcie S_2 . S – środek cięciwy AB .

Zauważmy, że trójkąt BAS_2 jest równoboczny. Zatem $|AB| = r$, zaś $|SS_2| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. BAS_1 jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, więc

$|S_1S| = 0,5 \cdot |AB| = 0,5r$. $|S_1S_2| = |S_1S| + |SS_2| = \frac{r}{2} + \frac{r\sqrt{3}}{2} = a$. Stąd $r = a(\sqrt{3}-1)$. $|S_1A| = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

288. $\frac{4\sqrt{5}}{3}a$.289. $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4a^2$, gdzie a jest długością boku kwadratu.

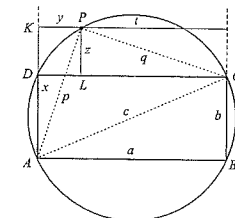
Wskazówka. Rozważ sumy $|PA|^2 + |PC|^2$ i $|PB|^2 + |PD|^2$.

290.

Rozwiązanie. x, y, z, t – odległości punktu P od prostych zawierających boki prostokąta.

I. Jeżeli punkt P jest wierzchołkiem prostokąta, to dwie z liczb x, y, z, t są równe 0, jedna jest równa a i jedna równa jest b . Zatem suma kwadratów odległości punktu P od prostych zawierających boki prostokąta równa jest $a^2 + b^2$.

II. Punkt P nie jest wierzchołkiem prostokąta. Wtedy z tw. Pitagorasa dla trójkąta KAP $x^2 + y^2 = p^2$, a z tw. Pitagorasa dla trójkąta LCP $z^2 + t^2 = q^2$. Kąt APC jest kątem wpisanym opartym na średnicy, więc jest prosty, zatem $p^2 + q^2 = c^2$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta ABC mamy $c^2 = a^2 + b^2$. Zatem $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = p^2 + q^2 = c^2 = a^2 + b^2$.



291. 2.

292. 13.

Wskazówka. Skorzystaj z tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej.

293.

Wskazówka. Skorzystaj z tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznej i siecznej.

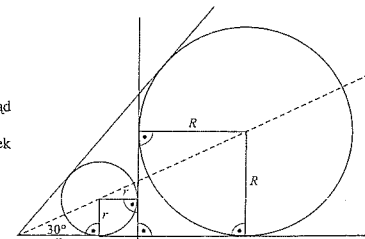
294. $\frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$.295. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2$.

Rozwiązanie. $\frac{r}{x} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd ① $x = r\sqrt{3}$. $\frac{R}{x+r+R} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd

z ① otrzymujemy ② $R\sqrt{3} = r\sqrt{3} + r + R$. Z równania ② wyznaczamy stosunek

promieni kół: $\frac{R}{r} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

Obliczamy stosunek pól kół: $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = (2 + \sqrt{3})^2$.

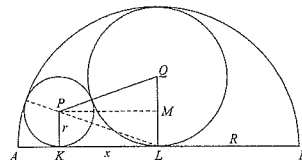


296.

Wskazówka. Czworokąt ABS_2S_1 , gdzie S_1 i S_2 są środkami danych okręgów, jest trapezem. Co wiesz o kątach w trapezie?

297. $\frac{1}{4}R$.

Rozwiązanie. $|PL| = R - r$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta KLP $x^2 = (R - r)^2 - r^2 = R^2 - 2Rr$.
 $|QM| = 0,5R - r$. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta PMQ $x^2 = (0,5R + r)^2 - (0,5R - r)^2 = 2Rr$.
 Zatem $R^2 - 2Rr = 2Rr$. Stąd otrzymujemy $r = 0,25R$.

298. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$ lub $\frac{Rr}{(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}$.

299. a) 14; b) 5; c) 12; d) 8.

301. a) 11; b) o k.

303. Dwaściecia.

Rozwiązanie. n – liczba wierzchołków wielokąta W .

Suma kątów każdego wielokąta o n wierzchołkach jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Miary kątów wielokąta W tworzą ciąg arytmetyczny, więc sumę miar

kątów tego wielokąta możemy zapisać korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego: $\frac{100^\circ + 170^\circ}{2} \cdot n$.

Z równości $(n - 2) \cdot 180^\circ = \frac{100^\circ + 170^\circ}{2} \cdot n$ otrzymujemy $n = 8$. Liczba przekątnych wielokąta wypukłego o n wierzchołkach jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, zatem liczba przekątnych wielokąta W jest równa 20.

305. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.307. $0,45 \text{ m}^2$.309. $3,04 \text{ ha}$.311. 15 km .313. 62 drzewa (wymary działki: $75 \text{ m} \times 128 \text{ m}$).315. $12,5 \text{ m}$.

317. a) 192 m; b) 208 m.

319. a) 108 cm; b) $101\frac{11}{17} \text{ cm}$ ($\approx 101,6 \text{ cm}$).321. 45 min .323. 88 mm .325. a) $6,25 \text{ km}$; b) $3,5 \text{ km}$.326. a) $1,05 \text{ km}$; b) Tomek: $4,65 \text{ km}$, Ania oraz Rafał: $2,45 \text{ km}$.

Wskazówka. a) Punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $M_1M_2M_3$.

327. b) W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Szukane miejsce, to środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Odległość: 6 km ;
 c) $3\sqrt{13} \text{ km}$ ($\approx 10,8 \text{ km}$).

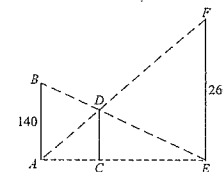
328. a) $d = a \cdot \frac{\lg \beta}{\lg \alpha - \lg \beta} - 10$, gdzie d – szerokość rzeki; b) 40 m .

329. a) $15,5 \text{ m}$; b) $2,5 \text{ m}$.300. a) o 900° ; b) 162° .302. a) Dokonano; b) $\sqrt{5} - 1$ i $3 - \sqrt{5}$.306. a) 402 m^2 ; b) 38 m .308. Wystarczy, pole ma powierzchnię $1800(\sqrt{3} + 1) \text{ m}^2 \approx 49,1 \text{ ara}$.310. a) 1:2000; b) 180 m .312. 10 cm .314. $1,8 \text{ m}$.316. $34,8 \text{ m}$.318. a) $7,65 \text{ km}$; b) $3,6 \text{ km}$.320. $2\sqrt{3} + 1 \text{ m}$ ($\approx 4,46 \text{ m}$).322. a) $12\sqrt{3} \text{ m}$ ($\approx 21 \text{ m}$); b) $3\pi \text{ m/s}$ ($\approx 9,4 \text{ m/s}$).324. a) $8\sqrt{3} \text{ km}$ ($\approx 13,9 \text{ km}$); b) 8 km .330. a) 2 m ; b) po 45 s .

331. po 10 min.

332. 2 cm .333. a) 91 m ; b) odległość między M_1 i M_2 : 105 m , między M_2 i M_3 : 195 m .

Wskazówka. a) Skorzystaj z podobieństwa trójkątów ADB i DEF i np. z podobieństwa trójkątów AEB i CED (patrz rysunek obok).

334. $2\sqrt{6} + \sqrt{2} \text{ m}$ ($\approx 6,3 \text{ m}$).335. a) $1,70 \text{ km}$; b) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ km}$ ($\approx 2,12 \text{ km}$).336. a) o 125% ; b) $4\sqrt{2} \text{ m}$ ($\approx 5 \text{ m}$ i 66 cm).337. a) 21 m ; b) 50° .338. a) $H = h \cdot \frac{\lg \beta}{\lg(\alpha + \beta) - \lg \beta}$; b) 146 m .339. a) 7 km ; b) 15 km .340. a) 70 m ; b) $\frac{140\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ ($\approx 80,8 \text{ m}$); c) $\frac{4900}{3} \pi \text{ m}^2$ ($\approx 5131,3 \text{ m}^2$).341. a) $1,8 \text{ km}$; b) $6\frac{7}{15} \text{ km}$.342. a) Dł. boku: $3\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \text{ m}$; b) krótsza: $3\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ m}$, dłuższa: $6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ m}$; c) powierzchnia poszycia: $18(2 - \sqrt{3}) \text{ m}^2$.343. $d(t) = \sqrt{36 + 8t - 0,25t^2} - 6$; $t \in \langle 0; 16 \rangle$.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

344. Należy.

Wskazówka. Sprawdź, czy odległości punktu P od punktów A i B są równe.

345. a) Należy; b) $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 3)$; c) równoległa do prostej k : $y = -2x + 2$, równoległa do prostej l : $x = 5$.346. $\frac{1}{5}$.347. a) Nie są współliniowe; b) $2x + 3y + 74 = 0$.348. a) $A = (0, 5)$, $B = (15, 0)$ i $C = (-3, -4)$.

Rozwiązanie. a) $A = (0, y)$, $y = 3 \cdot 0 + 5 = 5$, więc $A = (0, 5)$. $B = (x, 0)$, $2x - 9 \cdot 0 - 30 = 0$, więc $x = 15$, a $B = (15, 0)$.

Współrzędne punktu C znajdujemy rozwiązując układ równań $y = 3x + 5$ i $2x - 9y - 30 = 0$.

$2x - 9(3x + 5) - 30 = 0$, stąd $x = -3$. $y = 3 \cdot (-3) + 5 = -4$. Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -3$ i $y = -4$, więc $C = (-3, -4)$.

b) Znajdziemy równanie $y = ax + b$ prostej AB . Do prostej AB należy punkt $A = (0, 5)$, więc $b = 5$. Do prostej AB należy punkt $B = (15, 0)$ i $b = 5$, więc $0 = 15a + 5$. Stąd $a = -\frac{1}{3}$. Zatem prosta AB ma równanie $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Iloczyn współczynników kierunkowych prostych AB i AC jest równy -1 , więc proste te są prostopadłe.

349. a) k : $2x + 5y = 0$, l : $2x + 5y + 58 = 0$; b) $2\sqrt{29}$.350. $y = x + 1$ lub $y = -x + 5$.351. a) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$; b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$; c) $C = (\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$; d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$.

Rozwiązanie. d) $y = ax + b$ – równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC .

Kąt BAC ma miarę 60° , więc prosta zawierająca dwusieczną tego kąta jest nachylona do osi OX pod kątem 30° . Zatem $a = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Do prostej $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ należy punkt $A = (3, 0)$, więc $0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b$. Stąd $b = -\sqrt{3}$. Dwusieczna kąta BAC zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$.

352. a) Z osi OY : $(0, 5)$, z osi OX : $(4, 0)$; b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; c) $\frac{x}{-1,5} + \frac{y}{3} = 1$.353. $3x + y - 12 = 0$.

396. $x - 2y + 4 = 0$.

Wskazówka. Wykonaj rysunek. Poprowadź prostą równoległą do boku AB przechodzącą przez punkt P .

397. a) $(-1, 3)$, $(6, 2)$; b) pole: 15.

398. $C = (0, 3)$ lub $C = (12, 15)$.

Rozwiązanie. Pole trójkąta ABC : $P = 0,5 \cdot |AB| \cdot d$, gdzie d jest odległością punktu C od prostej AB .

Długość odcinka AB jest równa $2\sqrt{5}$. Równanie prostej AB : $2x - y - 3 = 0$.

Punkt C należy do prostej k , więc $C = (p, p + 3)$, gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą.

$$\text{Odległość punktu } C \text{ od prostej } k: d = \frac{|2p - (p+3) - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|p-6|}{\sqrt{5}}.$$

Pole trójkąta jest równe 6, więc $0,5 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|p-6|}{\sqrt{5}} = 6$. Stąd $p = 0$ lub $p = 12$. Zatem $C = (0, 3)$ lub $C = (12, 15)$.

399. $(4 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(4 + \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Rozwiązanie. $K = (x_K, y_K)$ – punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AB .

$\overline{CS} = [2, 2]$, $\overline{SK} = [x_K - 3, y_K + 1]$. $\overline{SK} = 0,5 \cdot \overline{CS} = [1, 1]$. Zatem $x_K - 3 = 1$ i $y_K + 1 = 1$, stąd $K = (4, 0)$.

Równanie prostej k prostopadłej do CS i przechodzącej przez punkt K : $x + y - 4 = 0$.

S jest również środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , a punkty A i B są punktami wspólnymi tego okręgu i prostej k . Równanie okręgu $\sigma(S, |CS|)$: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$.

Współrzędne punktów A i B znajdujemy, rozwiązując układ równań $x + y - 4 = 0$ i $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$:

$$(x, y) = (4 - \sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ lub } (x, y) = (4 + \sqrt{3}, -\sqrt{3}).$$

400. $y = -x + 4$, $y = 1$ lub $y = -x + 4$, $x = 3$.

Wskazówka. ABC – rozważany trójkąt. Jeśli punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta ABC , to punkt B jest punktem wspólnym prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$ i okręgu o środku w punkcie C i promieniu długości $|AC|$.

401. $(\frac{3}{5}, \frac{12}{5})$, $(-\frac{2}{5}, -\frac{17}{5})$.

402. $B = (6, 3)$, $C = (-1, 10)$.

403. $A = (1, 4)$, $B = (5, 12)$, $C = (9, 10)$.

Rozwiązanie. Punkt B należy do prostej o równaniu $y = 2x + 2$, więc $B = (b, 2b + 2)$, gdzie b jest pewną liczbą rzeczywistą.

Punkt C należy do prostej o równaniu $x = 3y - 21$, więc $C = (3c - 21, c)$, gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą.

$$\overline{BC} = [3c - 21 - b, c - (2b + 2)] = [4, -2], \text{ więc } 3c - 21 - b = 4 \text{ i } c - 2b - 2 = -2. \text{ Rozwiązaniem otrzymanego układu równań jest para liczb } b = 5 \text{ i } c = 10. \text{ Zatem } B = (5, 12), C = (9, 10).$$

Środek S odcinka AB jest punktem wspólnym prostych o równaniach $y = 2x + 2$ i $x - 3y + 21 = 0$. Rozwiązaniem układu równań $y = 2x + 2$ i $x - 3y + 21 = 0$ jest para liczb $(x, y) = (3, 8)$, więc $S = (3, 8)$.

Korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka, znajdujemy współrzędne punktu A : $A = (1, 4)$.

404. $A = (-7, 5)$, $B = (-4, -1)$, $D = (-6, 3)$.

405. $(x - \frac{7}{3})^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = \frac{9}{5}$.

406. $B = (-5, 4)$, $C = (3, 1)$.

Rozwiązanie. Niech S i K będą odpowiednio punktem wspólnym środkowych trójkąta ABC i środkiem odcinka BC .

Rozwiązując układ równań $4x + 5y = 0$ i $x - 3y = 0$, znajdujemy współrzędne punktu S : $S = (0, 0)$. Z równości $\overline{AS} = 2 \cdot \overline{SK}$ wyznaczamy współrzędne punktu K : $K = (-1, 2,5)$.

Szukane punkty mają współrzędne $(b, -0,8b)$ i $(3c, c)$ (bo należą do prostych o równaniach odpowiednio $y = -0,8x$ i $x = 3y$), gdzie b i c są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Punkt K jest środkiem odcinka AB , więc $-1 = 0,5(b + 3c)$ i $2,5 = 0,5(-0,8b + c)$. Rozwiązaniem otrzymanego układu równań jest para $(b, c) = (-5, 1)$. Zatem pozostałe wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne $(-5, 4)$ i $(3, 1)$.

407. $A = (1, -4)$, $B = (6, 1)$, $C = (-2, 17)$.

Wskazówka. Znajdź obraz punktu B w symetrii względem prostej o równaniu $3x - y - 7 = 0$.

409. a) $2x + 3y + 1 = 0$; b) $D = (-2, 1)$; c) 78.

410. a) $y = x$; b) $C = (6, 6)$, $D = (-6, 0)$.

Rozwiązanie. Niech $D = (x_D, y_D)$. Punkt S jest środkiem odcinka BD . Korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka, otrzymujemy

$$1 = \frac{8 + x_D}{2} \text{ i } 1 = \frac{2 + y_D}{2}. \text{ Stąd } x_D = -6 \text{ i } y_D = 0. \text{ W ten sam sposób możemy wyznaczyć współrzędne punktu } C.$$

411. a) $(-7, 11)$; b) 6.

412. a) 45π ; b) 90π .

413. a) $(3, -3)$, $(1, 1)$, $(-7, -3)$, $(-5, -7)$; b) 40.

414. $(-1, 1)$, $(2, 6)$, $(4, -2)$; $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8,5$.

Rozwiązanie. Szkic rozwiązania. Punkt S jest środkiem odcinka AC , więc współrzędne punktu C można znaleźć, korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka ($C = (-1, 1)$). Punkty B i D są punktami wspólnymi symetralnej odcinka AC ($4x + y - 14 = 0$) i okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$, czyli okręgu o środku w punkcie S i promieniu długości $|SA|$ ($(x-3)^2 + (y-2)^2 = 17$). Środkiem okręgu wpisanego w kwadrat $ABCD$ jest punkt S , a długość promienia jest równa połowie długości boku kwadratu.

415. $(-1, 5)$, $(-3, 1)$, $(3, 3)$.

416. $C = (8, 1)$, $D = (6, 5)$ lub $C = (0, -3)$, $D = (-2, 1)$.

417. $(1, 4)$, $(3, 0)$, $(-1, -2)$, $(-3, 2)$.

418. $(1 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(1 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(1 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Wskazówka. Znając długość promienia okręgu wpisanego w kwadrat, można obliczyć długość promienia okręgu opisanego na kwadracie.

419. a) Przekątną BD ; b) $y = 7x - 18$; c) 200.

420. a) $B = (6, -1)$, $D = (0, 5)$; b) pole rombu: 12.

421. $(-4, 2)$, $(10, 0)$.

Rozwiązanie. Przekątne rombu są prostopadłe, więc przekątna BD zawiera się w symetralnej odcinka AC . Wierzchołki B i D są punktami wspólnymi symetralnej odcinka AC i okręgu o środku w punkcie A promieniu 10. Równanie symetralnej odcinka AC : $\textcircled{1} x + 7y - 10 = 0$. Równanie okręgu o środku w punkcie A i promieniu o długości 10: $\textcircled{2} (x-2)^2 + (y+6)^2 = 100$.

Współrzędne punktów B i D znajdujemy, rozwiązując układ równań $\textcircled{1}$ i $\textcircled{2}$. Z równania $\textcircled{1}$ wyznaczamy $x = 10 - 7y$ i podstawiamy do równania $\textcircled{2}$: $(10 - 7y - 2)^2 + (y + 6)^2 = 100$. Równanie $(8 - 7y)^2 + (y + 6)^2 = 100$ sprowadzamy do postaci $50y(y - 2) = 0$. Stąd otrzymujemy $y = 0$ lub $y = 2$. Rozwiązaniem układu równań $\textcircled{1}$ i $\textcircled{2}$ są więc pary liczb $(x, y) = (10, 0)$ oraz $(x, y) = (-4, 2)$. Zatem pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne $(10, 0)$ oraz $(-4, 2)$.

422. $(3, -5)$, $(2, 2)$, $(-3, 7)$, $(-2, 0)$.

423. Wierzchołki: $(3, -\frac{1}{2})$, $(4, 5)$, $(-1, \frac{5}{2})$. Równanie okręgu: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

424. $C = (3, 2)$, $D = (-1, -1)$ lub $C = (8, -3)$, $D = (4, -6)$.

425. $(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$, $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$.

Rozwiązanie. Szkic rozwiązania. Znając długość wysokości rombu (długość wysokości rombu równa jest długości średnicy okręgu weń wpisanego) i pole rombu, możemy obliczyć długość a boku rombu ($a = \frac{25}{3\sqrt{2}}$). Znając długość wysokości i długość boku rombu, możemy obliczyć

(korzystając z tw. Pitagorasa) długość p jego dłuższej przekątnej ($p = \frac{20\sqrt{2}}{3}$). Końce dłuższej przekątnej są punktami wspólnymi prostej o równaniu $y = x$ i okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu długości $0,5p$ ($(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$, $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$).

426. a) $y = -3x + 53$, $(0, 53)$; b) $A = (3, 0)$, $B = (14, 11)$, $D = (0, 9)$.

427. a) $x - 3y + 10 = 0$; b) $D = (2, 4)$; c) pole: 20.

428. $A = (-3, -1)$, $B = (1, 2)$, $C = (7, 4)$, $D = (3, 1)$. Pole: 10.

429. a) Pr. AD i pr. BC są równoległe (pr. AD : $y = x + 4$, pr. BC : $y = x - 3$); b) $x = 1$, $x - 8y + 4 = 0$; c) pole: 28.

430. $D = (-1, 5)$.

431. $B = (5, 6)$, $C = (0, 6)$.

432. $D = (-3, -1)$. Pole trapezu: 30. Uwaga: przyjmujemy, że równoległobok nie jest trapezem równoramiennym.

433. $C = (-3, -7)$, $D = (9, 5)$. Pole trapezu: 30.

Rozwiązanie. Niech $C = (x_C, y_C)$ i $D = (x_D, y_D)$. $\overline{KD} = 2 \cdot \overline{BA}$, $\overline{KD} = [x_D - 3, y_D + 1]$, $2 \cdot \overline{BA} = 2 \cdot [3, 3] = [6, 6]$, zatem $x_D - 3 = 6$ i $y_D + 1 = 6$. Stąd $x_D = 9$ i $y_D = 5$. Punkt K jest środkiem odcinka CD , więc $3 = 0,5(x_C + 9)$ i $-1 = 0,5(y_C + 5)$. Stąd $x_C = -3$ i $y_C = -7$.

Pole trapezu $P = 0,5 \cdot (|AB| + |CD|) \cdot h = 2,5h \cdot |AB|$. $|AB| = 3\sqrt{2}$, wysokość h jest równa odległości punktu K od prostej AB , która ma równanie $x - y = 0$, więc $h = \frac{|3 - (-1)|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Zatem $P = 2,5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 30$.

434. Odcinek KL nie ma punktów wspólnych z daną prostą.

435. a) Obszar między prostymi $y = 0,5x$ i $y = 0,5x - 2$; b) płaszczyzna; c) ta półpłaszczyzna (bez brzegu) wyznaczona przez prostą $y = 0,5x - 2$, do której należy punkt $(0, -3)$.

436. a) Rys. 1/3M; b) 5.

437. b) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{cases}$; c) punkt $P = (2\frac{1}{3}, -2\frac{1}{18})$ nie należy do czworokąta (rzędna tego punktu jest mniejsza od -2).

438. Rys. 2/3M; pole figury F : 27.

439. a) $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-2y \leq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \end{cases}$; b) $b = -14$.

440. a) $A = (2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (8, 6)$; b) $\begin{cases} y \geq x - 2 \\ y \geq -x + 3 \\ y \leq -0,5x + 10 \end{cases}$

441. Trapez o wierzchołkach $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 4,5)$, $(-2, 1,5)$. Pole trapezu: 12.

442. Zbiór A : pas, którego brzeg tworzą proste $y = 2x - 2$ i $y = 2x - 4$; zbiór B : dwie rozłączne półpłaszczyzny (bez brzegu) wyznaczone przez proste $y = -3x + 2$ i $y = -3x - 2$; zbiór $A \cap B$: równoległobok o bokach zawartych w podanych wcześniej prostych.

Wskazówka. $|y - 2x + 3| \leq 1 \Leftrightarrow (y - 2x + 3 \geq -1 \wedge y - 2x + 3 \leq 1)$. $|y + 3x| > 2 \Leftrightarrow (y + 3x < -2 \vee y + 3x > 2)$.

443. Rys. 3/3M.

444. a) rozwiązaniem układu nierówności jest każda para liczb postaci $(-a + b - 1, 2a - b + 2)$, gdzie $a \in \mathbb{R}_-$ i $b \in \mathbb{R}_+$; b) rozwiązaniem układu nierówności jest każda para liczb postaci $(\frac{2a+b+5}{5}, \frac{a-2b}{5})$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$.

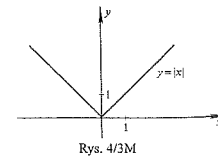
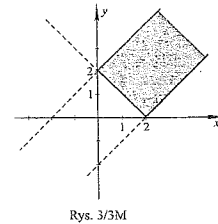
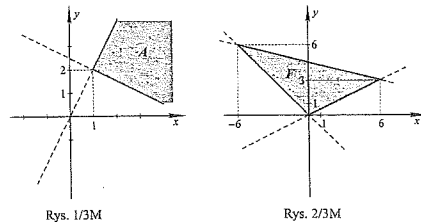
445. $x = -1, y = 2$ lub $x = 1, y = 0$ lub $x = 3, y = 2$.

446. $x = -3, y = 2$ lub $x = -2, y = 3$ lub $x = 2, y = -3$ lub $x = 3, y = -2$ (równanie $|x| + |y| = 5$ opisuje brzeg kwadratu o wierzchołkach $(5, 0)$, $(0, 5)$, $(-5, 0)$, $(0, -5)$).

447. Rys. 4/3M.

448. $a = -1$ lub $a = 3$.

Rozwiązanie. Nierówność $x^2 + y^2 + 2x \leq 1$ sprowadzamy do postaci $(x+1)^2 + y^2 \leq 2$. Nierówność ta opisuje koło o środku w punkcie $S = (-1, 0)$ i promieniu o długości $\sqrt{2}$. Równanie $x - y + a = 0$ dla każdej wartości parametru a jest równaniem prostej. Dany układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy prosta o równaniu $x - y + a = 0$ jest styczna do koła $k(S, \sqrt{2})$, czyli gdy odległość d punktu S od danej prostej jest równa $\sqrt{2}$. $d = \frac{|-1 - 0 + a|}{\sqrt{2}} = \frac{|a - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Stąd $a = -1$ lub $a = 3$.



449. Parabola o równaniu $y = \frac{1}{12}x^2 + x + 2$.

450. Zbiór A jest sumą dwóch prostych o równaniach $y = 0$ i $y = x\sqrt{3} = 0$.

451. Parabola o równaniu $x^2 - 6y - 3 = 0$.

452. $\{(x, y): (y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \vee y = \frac{1}{4}x^2 - 1) \wedge x \in (-2; 2) \wedge y \in \mathbb{R}\}$.

Wskazówka. Jeśli punkt (x, y) jest środkiem okręgu o stycznego wewnętrznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$ i stycznego do prostej o równaniu $y = 0$, to promień okręgu o ma długość $|y|$, odległość punktu styczności okręgu o z osią OY od punktu $(0, 0)$ jest równa $|x|$, a odległość środka okręgu o od punktu $(0, 0)$ jest równa $2 - |y|$.

453. Parabola o równaniu $y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}$.

454. Parabola o równaniu $y = 2x^2$.

Wskazówka. Jeśli prosta przechodzi przez punkt $(0, 0)$, to jej równanie ma postać $y = ax$.

Jeśli punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są końcami cięciwy paraboli o równaniu $y = x^2 - 1$ i należą do prostej $y = ax$, to odcięte tych punktów są rozwiązaniami równania $x^2 - 1 = ax$, a odcięta środkowa cięciwy jest równa $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

455. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

456. $4\pi + 6\sqrt{3}$.

457. $2\pi - 4$.

458. $O = (3\frac{1}{6}, 3\frac{1}{2})$.

459. $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 36$.

460. $k = 1$ lub $k = -1$.

STEREOMETRIA

461. a) 112; b) $\frac{\sqrt{65}}{9}$.

462. $2\sqrt{2}d^2 \sin \alpha \cos \alpha$ [$= \sqrt{2}d^2 \sin 2\alpha$].

463. $\sqrt{2} \text{ dm}^3$.

464. $16\sqrt{2}$.

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzoru na długość przekątnej kwadratu, obliczamy długość krawędzi podstawy graniastopu: $a\sqrt{2} = 4$, stąd $a = 2\sqrt{2}$. Trójkąt ACD' jest równoboczny, ponieważ kąty przy podstawie AC mają równe miary wynoszące 60° . Zatem $|AC| = |AD'| = |CD'| = 4$. Obliczamy długość wysokości graniastopu korzystając z tw. Pitagorasa (trójkąt CDD'):

$$H^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 = 8, \text{ stąd } H = 2\sqrt{2}.$$

Objętość graniastopu: $V = a^2 H = (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

465. $1000\sqrt{6} \text{ cm}^3$.

Rozwiązanie.

Obliczamy wysokość podstawy graniastopu: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Zauważmy, że trójkąt $BC'K$ jest równoramienny, ponieważ kąty przy podstawie BC' mają równe miary ($\angle KBC' = 45^\circ$ i $\angle B'CK = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$). Zatem $|BK| = 10\sqrt{3}$. Bok BB' trójkąta $BB'K$ jest wysokością graniastopu. Obliczamy wysokość graniastopu korzystając z tw. Pitagorasa (trójkąt $BB'K$): $H^2 = (10\sqrt{3})^2 - 10^2 = 200$, stąd $H = 10\sqrt{2}$.

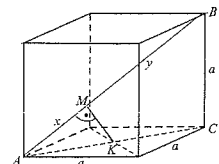
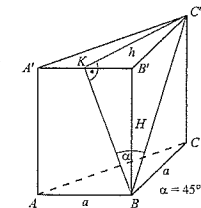
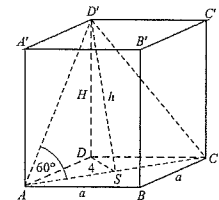
Objętość graniastopu: $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H = \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{2} = 1000\sqrt{6}$.

466. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

467. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ i $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Rozwiązanie. Należy obliczyć $x = |AM|$ oraz $y = |MB|$. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi a jest równa $a\sqrt{3}$. $|AB| = a\sqrt{3}$, $|AC| = a\sqrt{2}$, $|AK| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trójkąt AKM jest podobny do trójkąta

ABC , więc $\frac{|AM|}{|AK|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Zatem $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$, stąd $x = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. $y = a\sqrt{3} - x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.



468. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

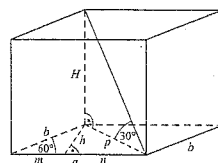
469. $3\sqrt{3}a^3$

470. 162.

471. $8(3+\sqrt{3})$

Rozwiązanie. $a=4$, $b=2$.Obliczamy h oraz m . $\sin 60^\circ = \frac{h}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2}$, stąd $h = \sqrt{3}$. $\cos 60^\circ = \frac{m}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{m}{2}$, stąd $m=1$.Wobec tego $n=4-m=3$. Obliczamy p : $p^2 = h^2 + n^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12$, stąd $p=2\sqrt{3}$.Obliczamy H : $\tan 30^\circ = \frac{H}{p}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{2\sqrt{3}}$, stąd $H=2$. Obliczamy pole powierzchni graniastopu:

$$P = 2ah + 2aH + 2bH = 8\sqrt{3} + 16 + 8 = 24 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3}).$$



472. Objętość: 780. Pole: 588.

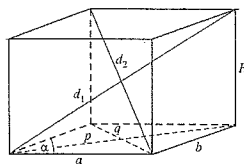
Wskazówka. Rozstrzygnij, jaki wielokąt jest podstawą graniastopu.

473. 64.

Rozwiązanie. $2a+2b=18$, $d_1=9$, $d_2=\sqrt{33}$, $H=4$.

Korzystając z tw. Pitagorasa obliczamy przekątne równoległoboku: $p=\sqrt{65}$, $q=\sqrt{17}$.

Korzystamy dwukrotnie z tw. kosinusów: $17 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, $65 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ (ponieważ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$), gdzie α jest miarą kąta ostrego równoległoboku. Dodając stronami oba równania dostajemy równość $a^2 + b^2 = 41$. Obwód równoległoboku jest równy 18, więc $a+b=9$. Rozwiązując układ równań $a^2 + b^2 = 41$ i $a+b=9$ otrzymujemy: $a=4$ i $b=5$ lub $a=5$ i $b=4$. Przyjmujemy dalej, że $a=4$ i $b=5$ (w drugim przypadku otrzymujemy ten sam graniastop) i wyznaczamy $\cos \alpha$, a następnie $\sin \alpha$: $17 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha$, stąd $\cos \alpha = 0,6$. Z „jedynki trygonometrycznej” $\sin \alpha = 0,8$. Objętość graniastopu: $V = (ab \sin \alpha) H = 64$.



474. $\frac{1}{4} H^3 \tan \alpha \left(\frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{1}{\tan^2 \gamma} \right)$

475. $\frac{d^3 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)(1 - \cos \alpha)}$

Rozwiązanie. Dane: d , α , β .

Punkt K to rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę ściany bocznej $ADD'A'$. W trójkącie $BD'K$: $k = d \sin \beta$. W trójkącie ABK miara kąta BAK jest równa α , więc $a = \frac{k}{\sin \alpha} = \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha}$.

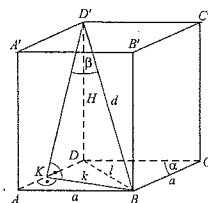
Przekątną BD obliczamy wykorzystując tw. kosinusów (trójkąt BCD):

$$l^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos \alpha = a^2(2 - 2 \cos \alpha), \text{ stąd } l = \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}. \text{ Korzystając z tw. Pitagorasa}$$

(trójkąt BDD') obliczamy wysokość graniastopu:

$$H^2 = d^2 - l^2 = d^2 - \frac{d^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} (2 - 2 \cos \alpha), \text{ stąd } H = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)(1 - \cos \alpha)}.$$

$$\text{Pole podstawy graniastopu: } Pp = a^2 \sin \alpha = \frac{d^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}, \text{ objętość graniastopu: } V = PpH = \frac{d^3 \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)(1 - \cos \alpha)}.$$



476. $a^3 \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

Rozwiązanie. Dane: a oraz α .

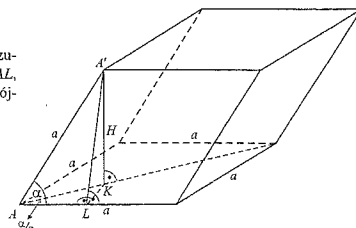
Odcinek $A'L$ jest wysokością ściany bocznej równoległoscianu. Odcinek KL jest rzutem odcinka $A'L$ na płaszczyznę podstawy równoległoscianu. Ponieważ $A'L \perp AL$, więc z tw. o trzech prostych prostopadłych wynika, że również $KL \perp AL$. Zatem trójkąt ALK jest prostokątny. Zauważmy również, że $\angle KAL = 0,5\alpha$.

$$\text{Trójkąt } ALA': \sin \alpha = \frac{|A'L|}{a}, \cos \alpha = \frac{|AL|}{a}, \text{ stąd } |A'L| = a \sin \alpha, |AL| = a \cos \alpha.$$

$$\text{Trójkąt } ALK: \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{|KL|}{|AL|} = \frac{|KL|}{a \cos \alpha}, \text{ stąd } |KL| = a \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Trójkąt } A'LK: H^2 = |A'L|^2 - |KL|^2 = a^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ stąd}$$

$$H = a \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}}. \text{ Objętość równoległoscianu: } V = a^2 \sin \alpha \cdot H = a^3 \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$



477. 48 cm^3

478. $\frac{8\sqrt{30}}{3}$

479. a) 45° ; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

480. Objętość: $\frac{1}{6} a^3 \tan \alpha$. Pole: $\frac{a^2}{\cos \alpha}$

481. Objętość: $36\sqrt{2}$. Pole powierzchni bocznej: $36\sqrt{3}$.

Rozwiązanie.

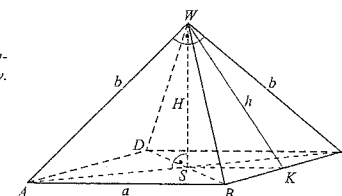
Zauważmy, że trójkąty ACW i ACD są przystające, gdyż są to trójkąty prostokątne równoramienne o tej samej przeciwprostokątnej. Wynika stąd, że $b=a$. Korzystamy z tw.

$$\text{Pitagorasa. W trójkącie } KCW: a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3\sqrt{3})^2, \text{ stąd } a=6.$$

$$\text{W trójkącie } SKW: (3\sqrt{3})^2 = 3^2 + H^2, \text{ stąd } H=3\sqrt{2}.$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = 36\sqrt{2}, \quad P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 36\sqrt{3}.$$



482. 36.

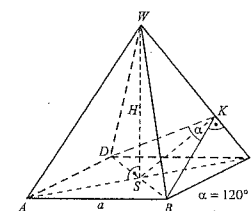
Rozwiązanie.

Przekątna podstawy ma długość $6\sqrt{2}$. Obliczamy długość odcinka SK (trójkąt BKS):

$$\tan 60^\circ = \frac{|SB|}{|SK|}, \text{ czyli } \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{|SK|}, \text{ stąd } |SK| = \sqrt{6}. \text{ Obliczamy długość odcinka } KC,$$

$$\text{korzystając z tw. Pitagorasa (trójkąt } SKC): |KC|^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2, \text{ stąd } |KC| = 2\sqrt{3}.$$

Zauważmy, że trójkąty SCK oraz SKW są podobne (cecha kk , gdyż są to trójkąty prostokątne oraz $\angle CSK = \angle SKW$). Zachodzi więc równość $\frac{|SC|}{|KC|} = \frac{|SW|}{|SK|}$, czyli $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{H}{\sqrt{6}}$, stąd $H=3$. Objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} a^2 H = 36$.



483. $\frac{4}{3} \sqrt{S^3 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}$

Rozwiązanie. Szkiełko rozwiązania. Oznaczenia: a – krawędź podstawy, h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa. Wiemy, że $S = \frac{1}{2} ah$ oraz

$$\tan \alpha = \frac{a}{2h}. \text{ Wyznaczamy } a \text{ i } h, \text{ a następnie obliczamy wysokość } H \text{ ostrosłupa. Otrzymujemy: } a = \sqrt{4S \tan \alpha}, \quad h = \frac{S}{\sqrt{\tan \alpha}}, \quad H = \frac{S(1 - \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha}.$$

484. $\frac{-1}{\tan^2 \alpha}$

485. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6\sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}$

Wskazówka. Patrz rozwiązanie zadania 482.

486. $\frac{2}{3} H^3 \left(\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$

Rozwiązanie.

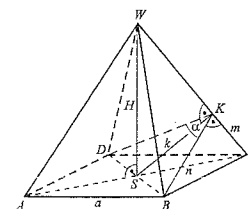
Odcinek SC jest połową przekątnej kwadratu, więc $n = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. W trójkącie SBK :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{n}{k}, \text{ stąd } k = \frac{a\sqrt{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}. \text{ W trójkącie } SCK: n^2 = k^2 + m^2, \text{ czyli } m^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{stąd } m = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{\tan \frac{\alpha}{2}}. \text{ Trójkąty } SCK \text{ oraz } SKW \text{ są podobne (patrz rozwiązanie}$$

$$\text{zadania 482), zatem } \frac{m}{n} = \frac{k}{H}, \text{ czyli } \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2H \tan \frac{\alpha}{2}}, \text{ stąd } a = H\sqrt{2} \sqrt{\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa: } V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{2}{3} H^3 \left(\tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$



$$487. 2d^2 \frac{\sqrt{1+\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \left[= 4d^2 \frac{\sqrt{1+\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha \sin 2\alpha} \right]$$

Rozwiązanie.

Zauważmy na wstępie, że $\angle KSW = 90^\circ - \angle ASK = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Jeśli długość krawędzi podstawy ostrosłupa oznaczmy przez a , to:

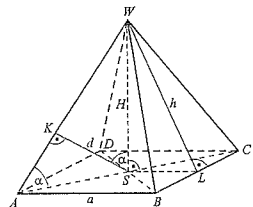
$$|AC| = a\sqrt{2}, |AS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |SL| = \frac{a}{2}. \text{ Trójkąt ASK: } \sin \alpha = \frac{|KS|}{|AS|} = \frac{2d}{a\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{a}, \text{ stąd}$$

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{\sin \alpha}. \text{ Trójkąt KSW: } \cos \alpha = \frac{|KS|}{|SW|} = \frac{d}{H}, \text{ stąd } H = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

Trójkąt SLW:

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\sqrt{2}}{2\sin \alpha}\right)^2 = d^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2\sin^2 \alpha} \right) = d^2 \frac{2\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = d^2 \frac{2\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = d^2 \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}, \text{ stąd}$$

$$h = \frac{d\sqrt{1+\sin^2 \alpha}}{\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha}. \text{ Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa: } P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 2 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\sqrt{1+\sin^2 \alpha}}{\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha} = 2d^2 \frac{\sqrt{1+\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$



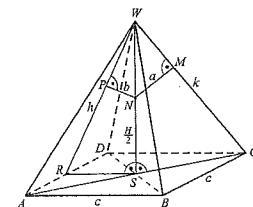
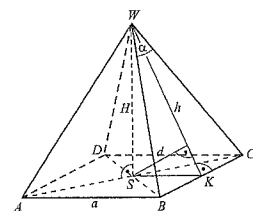
$$488. \frac{4d^3}{3 \lg \frac{a}{2} (1 - \lg^2 \frac{a}{2})}$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

W trójkącie BKW: $\lg \frac{a}{2} = \frac{h}{a}$, stąd $h = \frac{a}{2 \lg \frac{a}{2}}$. W trójkącie SKW: $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, stąd

$$H = a \sqrt{1 - \lg^2 \frac{a}{2}}. \text{ Korzystając ze wzorów na pole trójkąta SKW możemy zapisać równość:}$$

$$\frac{1}{2} hd = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} H, \text{ czyli } \frac{a}{2 \lg \frac{a}{2}} d = a^2 \sqrt{1 - \lg^2 \frac{a}{2}}. \text{ Stąd } a = \frac{2d}{\sqrt{1 - \lg^2 \frac{a}{2}}}. \text{ Zatem } H = \frac{d}{\lg \frac{a}{2}}. \text{ Objętość ostrosłupa: } V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{4d^3}{3 \lg \frac{a}{2} (1 - \lg^2 \frac{a}{2})}.$$



$$489. \frac{16a^3 b^3}{3(a^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - a^2}}.$$

Wskazówka. Korzystając z podobieństwa trójkątów PNW i SRW oraz MNW i SCW wyznacz h i k . Do wyznaczenia krawędzi podstawy c oraz wysokości H ostrosłupa wykorzystaj *tw. Pitagorasa* (patrz rysunek obok).

$$490. \text{ Pole: } a^2 \sqrt{3}. \text{ Objętość: } \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

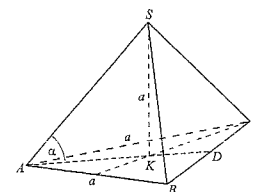
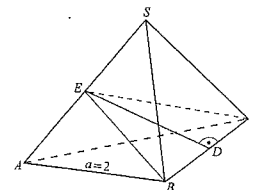
$$491. \sqrt{2}.$$

Rozwiązanie. Należy obliczyć długość odcinka DE.

Punkt D jest środkiem odcinka BC, więc $|BD| = \frac{a}{2} = 1$. Punkt E jest środkiem odcinka AS, więc odcinek BE jest wysokością trójkąta równobocznego ABS. Wobec tego

$$|BE| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \text{ Długość odcinka DE obliczamy korzystając z } \text{tw. Pitagorasa:}$$

$$|DE|^2 = |BE|^2 - |BD|^2 = 3 - 1 = 2, \text{ stąd } |DE| = \sqrt{2}.$$



$$492. 60^\circ.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa. Należy znaleźć α . Wiemy, że: $|KS| = a$. Punkt K jest punktem przecięcia wysokości trójkąta równobocznego ABC. Zatem K dzieli wysokość AD na odcinki będące w stosunku 2 : 1, tzn.

$$|AK| = \frac{2}{3} |AD|. \quad |AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ więc } |AK| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\lg \alpha = \frac{|KS|}{|AK|} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ więc } \alpha = 60^\circ.$$

$$493. 5\sqrt{7}.$$

$$494. 27\sqrt{35}.$$

$$495. 45^\circ.$$

Rozwiązanie. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa wyraża się wzorem $3 \cdot \frac{1}{2} ah$. Zachodzi

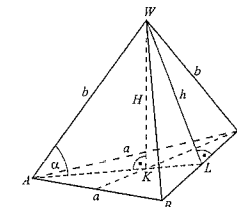
więc równość $\frac{3}{2} ah = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2$. Dzielimy obie strony tej równości przez a otrzymujemy

$$\frac{3}{2} h = \frac{\sqrt{15}}{4} a, \text{ stąd } h = \frac{\sqrt{15}}{6} a. \text{ Znajdziemy długość } b \text{ krawędzi bocznej. Z } \text{tw. Pitagorasa}$$

$$\text{dla trójkąta LCW: } b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{6} a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15}{36} a^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{24}{36} a^2 = \frac{2}{3} a^2,$$

stąd $b = \frac{\sqrt{6}}{3} a$. Obliczamy długość odcinka AK. Odcinek AL jest wysokością trójkąta równobocznego ABC, więc $|AL| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, natomiast

$$|AK| = \frac{2}{3} |AL| = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ W trójkącie AKW: } \cos \alpha = \frac{|AK|}{|AW|} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ stąd } \alpha = 45^\circ.$$



$$496. \frac{\sqrt{S^3}}{27} \sqrt{6 \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}.$$

Rozwiązanie. Dane: S – pole powierzchni bocznej ostrosłupa, 2α – miara kąta pomiędzy wysokościami ścian bocznych. Trójkąt EDW jest równoramienny, więc $\angle KWE = \alpha$. Końce odcinka ED są środkami boków trójkąta ABC, zatem $|ED| = \frac{a}{2}$, więc $|EK| = \frac{a}{4}$.

W trójkącie EKW $\sin \alpha = \frac{|EK|}{|EW|} = \frac{a}{4h}$, stąd $a = 4h \sin \alpha$. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa

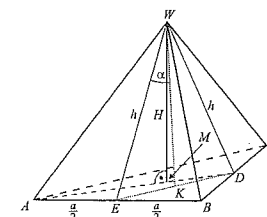
jest równe $\frac{3}{2} ah$, zatem $S = \frac{3}{2} ah = 6h^2 \sin \alpha$, stąd $h = \sqrt{\frac{S}{6 \sin \alpha}}$. Obliczamy krawędź

podstawy ostrosłupa: $a = 4h \sin \alpha = \sqrt{\frac{8}{3}} S \sin \alpha$, a następnie długość odcinka MD:

$$|MD| = \frac{1}{3} |AD| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{\frac{2}{9}} S \sin \alpha. \text{ Obliczamy wysokość ostrosłupa (trójkąt MDW):}$$

$$H^2 = h^2 - |MD|^2 = \frac{S}{6 \sin \alpha} - \frac{2S \sin \alpha}{9} = S \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{18 \sin \alpha}, \text{ stąd } H = \sqrt{S \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{18 \sin \alpha}}. \text{ Obliczamy objętość ostrosłupa:}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} H = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{8}{3} S \sin \alpha \sqrt{S \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{18 \sin \alpha}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{S^3 \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{18 \sin \alpha} \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{S^3}}{27} \sqrt{12 \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{2} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{S^3}}{27} \sqrt{6 \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}.$$



$$497. 2 \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\sqrt{3}(1 + \cos \alpha)}}.$$

$$498. \text{ Objętość: } \frac{a^3 \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}}{12 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left[= \frac{a^3 \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}}{12 \sin \alpha \cos^3 \alpha} \right], \text{ pole: } a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{3}{2 \sin \alpha} \right) \left[= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{\sqrt{12 - 15 \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \right) \right].$$

Rozwiązanie. Szkic rozwiązania. Dane: a oraz α .

I SPOSÓB. W trójkącie BWL: $b = \frac{a}{\sin \alpha}$. W trójkącie KBW:

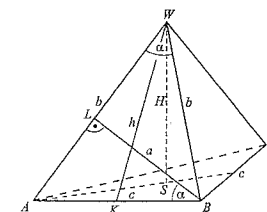
$$c = 2b \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2a}{\sin \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad h = b \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\sin \alpha} \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Wysokość ostrosłupa wyznaczymy korzystając z } \text{tw. Pitagorasa: } H = \frac{a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3} \sin \alpha}.$$

Do uproszczenia wyrażenia trygonometrycznych stosujemy wzór $\sin \alpha = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

II SPOSÓB. W trójkącie BWL: $b = \frac{a}{\sin \alpha}$. Łatwo pokazać, że $\angle ABL = \alpha$. W trójkącie

ABL: $c = \frac{a}{\cos \alpha}$. Wysokość ostrosłupa oraz wysokość ściany bocznej wyznaczamy

korzystając z *tw. Pitagorasa*: $H = \frac{a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha}$, $h = \frac{a \sqrt{4 - 5 \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$. Postępując w ten sposób otrzymujemy odpowiedzi, które zamieszczone zostały w nawiasach kwadratowych.



499. Objętość: $2\sqrt{3}d^3 \frac{\sqrt{4\lg^2\alpha+1}}{\lg^2\alpha}$. Pole: $3\sqrt{3}d^2 \frac{4\lg^2\alpha+1}{\lg^2\alpha} (1+\sqrt{4\lg^2\alpha+1})$.

Rozwiązanie. Dane: d oraz α .

Trójkąt ABC jest równoboczny, więc $m = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $n = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. W trójkącie ASW $\lg\alpha = \frac{H}{m}$,

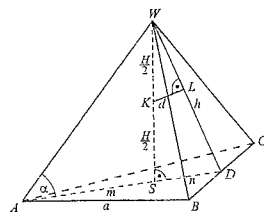
stad $H = \frac{a\sqrt{3}}{3} \lg\alpha$. W trójkącie SDW $h = \sqrt{H^2 + n^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{12}}$. Trójkąty SDW

i LKW są podobne (cecha kk), zatem $\frac{n}{h} = \frac{d}{H}$, czyli $n \frac{H}{2} = dh$. Po podstawieniu w miej-

sce n i h otrzymujemy równość $\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{H}{2} = d\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{12}}$, a po podniesieniu obu stron do

kwadratu: $\frac{a^2 H^2}{48} = d^2 (H^2 + \frac{a^2}{12})$. Do tego równania podstawiamy $H = \frac{a\sqrt{3}}{3} \lg\alpha$ i dzielimy obie strony przez a^2 :

$\frac{a^2}{48} \lg^2\alpha = d^2 (\lg^2\alpha + \frac{1}{4})$, stad $a = 2\sqrt{3}d \frac{\sqrt{4\lg^2\alpha+1}}{\lg\alpha}$. Następnie wyznaczamy H oraz h : $H = 2d\sqrt{4\lg^2\alpha+1}$, $h = d \frac{4\lg^2\alpha+1}{\lg\alpha}$. Wyznaczenie objętości i pola powierzchni ostrosłupa pozostawiamy czytelnikowi.



500. Pole: $\frac{20\sqrt{39}}{13}$, objętość: $\frac{16}{\sqrt{39}}$.

Rozwiązanie.

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, stad $a = 4$. W trójkącie LCW : $\sin 2\alpha = \frac{|LC|}{|CW|} = \frac{2}{b}$, stad ① $b = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

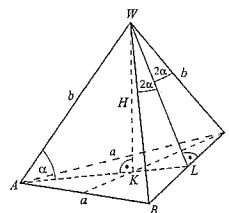
W trójkącie AKW : $\cos\alpha = \frac{|AK|}{|AW|} = \frac{4\sqrt{3}}{b}$, stad ② $b = \frac{4\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$. Z ① i ② do-

stajemy: $\frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$, a stad $2\sqrt{3} \sin 2\alpha = 3\cos\alpha$.

Ze wzoru na sinus sumy $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, a więc dane równanie przybiera postać $4\sqrt{3} \sin\alpha\cos\alpha = 3\cos\alpha$, stad $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Z jedynki trygonometrycznej $\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$, a stad $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Z równości ②: $b = \frac{16}{\sqrt{39}}$. Korzystając z tw. Pitagorasa obliczamy

wysokość ostrosłupa H (trójkąt AKW) oraz wysokość ściany bocznej h (trójkąt LCW): $H = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $h = \frac{10}{\sqrt{39}}$. Otrzymane wyniki pozwalają na obliczenie objętości i pola powierzchni ostrosłupa.



501.

Wskazówka. Uzasadnij, że jeśli krawędź czworoszczanu ma długość a , to długość tych odcinków jest równa $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

502.

Wskazówka. Niech AK i DL będą wysokościami czworoszczanu foremnego $ABCD$, S – punktem przecięcia wysokości czworoszczanu, zaś M – środkiem krawędzi BC . Skorzystaj z podobieństwa trójkątów LAS i KAM .

503. a) Objętość: $a^3\sqrt{6}$. b) Tangens: $-\frac{12\sqrt{6}}{19}$.

504. Pole powierzchni całkowitej: $nR^2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} + \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \lg(90^\circ - \frac{90^\circ}{n}) \right)$.

Rozwiązanie. *Szkic rozwiązania.* Promienie okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa poprowadzone do dwóch sąsiednich wierzchołków tworzą kąt o mierze $\frac{360^\circ}{n}$. Po znalezieniu długości a krawędzi podstawy ($2R \sin \frac{180^\circ}{n}$), można wyznaczyć sinus kąta płaskiego przy wierz-

chołku ($\sin \frac{180^\circ}{n}$). Stad wnioskujemy, że kąt ten ma miarę $\frac{180^\circ}{n}$. Następnie wyznaczamy długość wysokości h ściany bocznej poprowadzonej

do krawędzi podstawy ($R \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \lg(90^\circ - \frac{90^\circ}{n})$). Pole pow. całkowitej: $P = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} + n \cdot \frac{1}{2} 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot R \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \lg(90^\circ - \frac{90^\circ}{n})$.

505. $8\sqrt{3}$.

506. Pole: $\frac{1}{4}a^2\sqrt{4\lg^2\alpha+3}$. Tangens: $\frac{2\sqrt{3}}{3}\lg\alpha$.

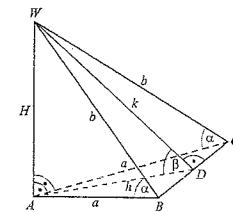
Rozwiązanie. Ściany ABW i ACW są trójkątami prostokątnymi, każda o polu $0,5aH$. Ściana BCW jest trójkątem równoramiennym o polu $0,5ak$. Ponieważ $k > H$, więc spośród ścian bocznych największe pole ma ściana BCW i pole tej ściany należy znaleźć.

W trójkącie ABW : $\lg\alpha = \frac{H}{a}$, stad $H = a \lg\alpha$. Odcinek AD jest wysokością trójkąta równobocz-

nego ABC , więc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Obliczamy wysokość k korzystając z tw. Pitagorasa (trójkąt ADW):

$k^2 = H^2 + h^2 = a^2 \lg^2\alpha + \frac{3a^2}{4} = \frac{4a^2 \lg^2\alpha + 3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (4\lg^2\alpha + 3)$, stad $k = \frac{a}{2} \sqrt{4\lg^2\alpha + 3}$.

Pole ściany BCW : $P = \frac{1}{2}ak = \frac{a^2}{4} \sqrt{4\lg^2\alpha + 3}$. $\lg\beta = \frac{H}{h} = \frac{a \lg\alpha}{a\sqrt{3}/2} = \frac{2a \lg\alpha}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \lg\alpha$.



507. $\frac{13}{6}$.

508. $\frac{a^2(\sin\alpha+1)}{\cos\alpha}$.

Rozwiązanie.

Każda ściana boczna ostrosłupa jest trójkątem prostokątnym. Pole powierzchni bocznej

ostrosłupa $P = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + 2 \cdot \frac{1}{2} ac = a(b+c)$. $b = a \lg\alpha$, $c = \frac{a}{\cos\alpha}$.

Zatem $P = a(a \lg\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}) = a^2 \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}$.

509. $\frac{b^3 \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}{3 \sin^2\alpha}$.

510. $\frac{b^2}{6} \sqrt{\frac{2a^2-b^2}{2}}$.

Rozwiązanie.

Każda ściana ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości b i ramionach

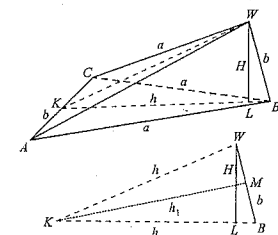
długości a . Wysokość podstawy ostrosłupa ma długość $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2}$,

więc pole podstawy P_p ostrosłupa jest równe: $P_p = \frac{1}{2}bh = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$. Aby obliczyć wy-

sokość ostrosłupa obliczamy najpierw wysokość h_1 trójkąta równoramiennego KBW :

$h_1 = \sqrt{h^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{2}}$. Porównując wzory na pole trójkąta KBW

dostajemy równość $\frac{1}{2}hH = \frac{1}{2}bh_1$, a stad $H = 2b \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{2(4a^2 - b^2)}}$. Obliczenie objętości ostrosłupa pozostawiamy czytelnikowi.



511.

Wskazówka. Uzasadnij, że spodek wysokości ostrosłupa jest punktem równooddalonym od wierzchołków podstawy.

512.

Wskazówka. Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem wspólnym symetrycznych wszystkich boków tego wielokąta.

513. $\frac{4}{3}\sqrt{11}$.

Rozwiązanie.

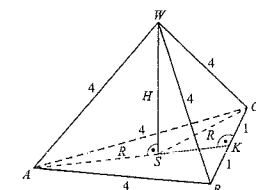
Przyjmujemy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach długości 4, 4, 2. Wobec tego wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości (równej 4). Na mocy tw. o ostrosłupach spodek wysokości ostrosłupa (punkt S) jest środkiem okręgu opisanego na jego

podstawie. Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC : $|AK| = \sqrt{15}$ oraz pole podstawy

ostrosłupa: $P_p = \sqrt{15}$. Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Korzystając z wzorów na pole trójkąta możemy zapisać równość $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 4}{4R}$, stad

$R = \frac{8}{\sqrt{15}}$. Wysokość ostrosłupa: $H = \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$, objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{4}{3}\sqrt{11}$.



$$514. \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\beta}.$$

$$515. \text{Objętość: } \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 \sin\alpha \sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \text{ Rozwiązanie istnieje dla } \alpha \in (0; \frac{2\pi}{3}).$$

$$516. \frac{2}{3} c^3 \sin\gamma \cos\gamma \operatorname{tg}\alpha.$$

Wskazówki. I. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa (dlaczego?). II. Gdzie znajduje się środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym?

$$517. \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \sqrt{1+\cos\alpha} \operatorname{tg}\beta.$$

$$518. \text{Pole powierzchni całkowitej: } (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)a^2. \text{ Objętość: } \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

$$519. \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2 \cos\beta}.$$

Wskazówka. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa (dlaczego?).

520.

Wskazówka. Uzasadnij, że czworokąt $KLMN$ jest rombem.

521.

Wskazówka. Miary tych kątów są równe miarom kątów pewnego trójkąta.

522.

Wskazówka. Sporządź taki rysunek ostrosłupa, aby podstawą była jedna z prostokątnych ścian. Wysokość podstawy poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, wysokość czwartej ściany i jedna z krawędzi bocznych tworzą trójkąt prostokątny.

$$523. \sqrt{3} \sqrt{3} \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

$$524. \frac{4-\sqrt{7}}{3} \text{ lub } \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

$$525. a) \frac{9}{2}\sqrt{2}; \quad b) 6(\sqrt{6}-1).$$

$$526. \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \left[= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: a – krawędź podstawy prostopadłości, x – boku rombu, p – dłuższa przekątna rombu, β – kąt, którego kosinus jest szukany.

I SPOSÓB. Ponieważ $EG \parallel BD$, więc $|\overline{EG}| = a\sqrt{2}$.

Z tw. kosinusów dla trójkąta AEG : $2a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos\alpha$, $a^2 = x^2(1 - \cos\alpha)$, stąd

$$x^2 = \frac{a^2}{1 - \cos\alpha}. \quad \text{Z tw. kosinusów dla trójkąta } AEF: p^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos(180^\circ - \alpha) =$$

$$= 2x^2 + 2x^2 \cos\alpha = 2x^2(1 + \cos\alpha) = \frac{2a^2}{1 - \cos\alpha}(1 + \cos\alpha), \text{ stąd } p = a\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

$$\cos\beta = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AF}|} = \frac{a\sqrt{2}}{p} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)^2}{1 - \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

II SPOSÓB. $\cos\beta = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AF}|} = \frac{a\sqrt{2}}{p}$. Długość krótszej przekątnej rombu jest równa długości przekątnej podstawy, więc w trójkącie AEH

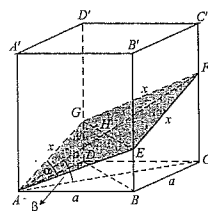
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|\overline{EH}|}{|\overline{AH}|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{p} = \cos\beta.$$

$$527. \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

$$528. \frac{S}{8 \cos\alpha} \sqrt{5 - 4 \cos^2\alpha}.$$

$$529. \text{Pole przekroju: } \frac{5\sqrt{5}}{8} a^2. \text{ Tangens: } 2\sqrt{31}.$$

Wskazówka. Wykorzystaj tw. Pitagorasa i oblicz kolejno: wysokość ściany bocznej h , wysokość otrzymanego przekroju h_1 , wysokość ostrosłupa H . Otrzymasz $h = \frac{3\sqrt{7}}{2} a$, $h_1 = \frac{5\sqrt{10}}{4} a$, $H = \frac{\sqrt{62}}{2} a$.



$$530. \frac{4}{3} \sqrt{p^3} \sin\alpha \sqrt{2 \cos\alpha}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie SCW (ponieważ K jest środkiem przeciwprostokątnej CS).

Wynika stąd, że $|\overline{CK}| = |\overline{SK}| = |\overline{CS}| = h$ oraz $\angle WCS = \alpha$. Ponadto $|\overline{CK}| = 0,5H$.

W trójkącie SLK : $\sin\alpha = \frac{|\overline{KL}|}{|\overline{SK}|} = \frac{0,5H}{h}$, stąd $h = \frac{H}{2 \sin\alpha}$. Pole trójkąta BKD jest dane

i równe P , więc $P = \frac{1}{2} a \sqrt{2} h = \frac{aH \sqrt{2}}{4 \sin\alpha}$, stąd $aH = 2\sqrt{2} P \sin\alpha$. W trójkącie SCW

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{SW}|}{|\overline{SC}|} = \frac{H}{a \sqrt{2}/2}$, stąd $H = \frac{a \sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha$. Podstawiając H do równania $aH = 2\sqrt{2} P \sin\alpha$ otrzymujemy $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2} P \sin\alpha$, stąd $a = 2\sqrt{P \cos\alpha}$.

Wysokość ostrosłupa wyznaczamy z równości $H = \sqrt{2P \cos\alpha} \operatorname{tg}\alpha$. Obliczenie objętości ostrosłupa jest teraz natychmiastowe.

$$531. \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos\beta (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2} \left[= \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right].$$

$$532. \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[= \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right].$$

$$533. \frac{5}{4} P.$$

Rozwiązanie.

W trójkącie ACW (patrz rys. 1): $SG \parallel AW$ i S jest środkiem AC . Wynika stąd, że $|\overline{SG}| = 0,5 \cdot |\overline{AW}| = 0,5b$. Zatem pole P trójkąta BGD jest równe $0,5a\sqrt{2} \cdot 0,5b$, stąd $ab = 2\sqrt{2}P$.

Uzasadnimy, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem (patrz rys. 2). Punkt K jest środkiem AD , L jest środkiem AB , M jest środkiem BW , N jest środkiem DW . Wynika stąd, że $|\overline{KL}| = |\overline{MM}| = 0,5 \cdot |\overline{BD}| = 0,5a\sqrt{2}$ oraz $|\overline{KM}| = |\overline{LM}| = 0,5 \cdot |\overline{AW}| = 0,5b$. Oznacza to, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Zauważmy, że $\angle NKL = \angle KLM$, a stąd wynika, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem.

Uzasadnimy, że $|\overline{TP}| = 0,25b$ (patrz rys. 2). Niech punkt R będzie środkiem odcinka CW . Zatem $TR \parallel SC$, a stąd wynika, że trójkąt TRW jest prostokątny. Ponieważ $TP \parallel AW$ (dlatego, że $UT \parallel AW$) więc $\angle PTR = \angle TRP$, a stąd $|\overline{TP}| = |\overline{RP}|$. Dalej wnioskujemy, że punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie TRW , a więc $|\overline{TP}| = |\overline{RP}| = |\overline{WP}| = 0,25b$.

Pamiętając, że $ab = 2\sqrt{2}P$ możemy teraz obliczyć pole przekroju $LMPNK$: $0,5a\sqrt{2} \cdot 0,5b + 0,5 \cdot 0,5a\sqrt{2} \cdot 0,25b = 0,3125ab\sqrt{2} = 1,25P$.

$$534. \frac{a^2 \sqrt{26}}{4}.$$

$$535. \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$536. \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Rozwiązanie.

Uzasadnimy, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem. Odcinek KL łączy środki boków w trójkącie ABC , zatem z tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta wynika, że $|\overline{KL}| = 0,5 \cdot |\overline{AB}| = 0,5a$. Analogicznie, rozpatrując kolejne trójkąty stwierdzamy, że $|\overline{LM}| = 0,5a$, $|\overline{LM}| = 0,5b$, $|\overline{KN}| = 0,5b$. Uzasadniliśmy więc, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, ale ponieważ miary sąsiadnych kątów tego czworokąta są równe (np. $\angle KLM = \angle LMN$), więc wynika stąd, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem.

Pole prostokąta $KLMN$ jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej ostrosłupa, zatem: $4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b = 3 \cdot \frac{1}{2} ah$, stąd $h = \frac{2}{3} b$. W trójkącie

APS $b^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$, $b^2 = (\frac{2}{3}b)^2 + (\frac{a}{2})^2$, stąd $a = \frac{2\sqrt{5}}{3} b$. $|\overline{PR}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{9} b$, więc $\cos\alpha = \frac{|\overline{PR}|}{h} = \frac{\sqrt{15}}{9} b \cdot \frac{3}{2b} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

$$537. \frac{a^2 \sqrt{11}}{8}.$$

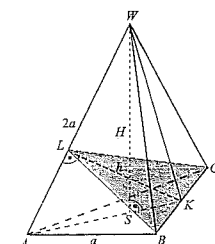
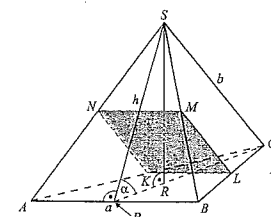
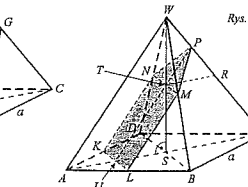
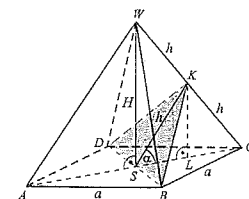
Rozwiązanie.

Obliczamy długość wysokości ostrosłupa. W trójkącie ASW $H = \sqrt{(2a)^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Obliczamy długość h wysokości trójkąta BCL , która jest także jedną z wysokości trójkąta AKW . Pole trójkąta AKW jest równe $\frac{1}{2} |\overline{AK}| \cdot |\overline{SW}|$, ale również $\frac{1}{2} |\overline{AW}| \cdot |\overline{KL}|$. Dostaje-

my więc równość $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 2ah$. Zatem $h = \frac{H\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{11}}{8}$.

Obliczamy pole P przekroju ostrosłupa (pole trójkąta BCL): $P = \frac{1}{2} ah = \frac{a^2 \sqrt{11}}{8}$.



$$538. \frac{\sqrt{2}a^3}{192} \text{ i } \frac{15\sqrt{2}a^3}{192}.$$

$$540. \text{ b) } 140 \text{ cm}^2; \text{ c) } 24\sqrt{7} \text{ cm}^3.$$

$$542. \text{ Objętość: } \frac{1}{4}\pi a^3, \text{ pole powierzchni: } \frac{3}{2}\pi a^2.$$

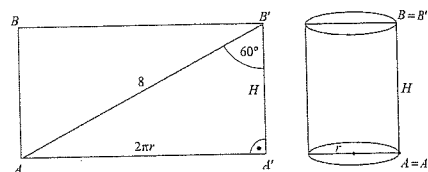
$$543. \frac{48}{\pi}.$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: H – wysokość walca, r – promień podstawy walca. Na rysunku obok pokazano powierzchnię boczną walca po rozwinięciu na płaszczyznę – prostokąt $AA'B'B$. Długość jednego boku tego prostokąta jest równa długości wysokości walca (inaczej: długości tworzącej walca), a długość drugiego boku jest równa obwodowi podstawy walca, czyli jest równa $2\pi r$.

W trójkącie $AA'B'$

$$\sin 60^\circ = \frac{2\pi r}{8}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi r}{8}, \quad \text{stad } r = \frac{2\sqrt{3}}{\pi};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{H}{8}, \quad \frac{1}{2} = \frac{H}{8}, \quad \text{stad } H = 4. \text{ Obliczamy objętość walca: } V = \pi r^2 H = \pi \cdot \frac{12}{\pi^2} \cdot 4 = \frac{48}{\pi}.$$



$$544. \text{ Pole: } \pi r^2 \frac{1+\cos \alpha}{\cos \alpha}. \text{ Objętość: } \frac{1}{3}\pi r^3 \tan \alpha.$$

$$545. \text{ a) } 2\sqrt{2}; \text{ b) } 72\pi.$$

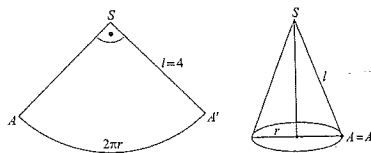
$$546. 12\sqrt{3}\pi.$$

$$547. 5\pi.$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: l – tworząca stożka, r – promień podstawy stożka. Na rysunku obok pokazano powierzchnię boczną stożka po rozwinięciu na płaszczyznę – wycinek $AA'S$. Długość promienia tego wycinka jest równa długości tworzącej stożka, a długość łuku, na którym oparty jest wycinek jest równa obwodowi podstawy stożka, czyli jest równa $2\pi r$.

Ponieważ kąt środkowy wycinka jest kątem prostym, więc długość łuku AA' jest równa $\frac{1}{4}$ obwodu koła o promieniu 4 (dany wycinek jest „ćwiartką” koła o promieniu 4). Zatem: $2\pi r = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 4)$, a stad $r = 1$. Obliczamy pole po-

wierzchni całkowitej P_C stożka: $P_C = \pi r^2 + \pi r l = \pi + 4\pi = 5\pi$.



$$548. \frac{a^3 \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \text{ (przyjeliśmy, że } \alpha \text{ jest miarą kąta wyrażoną w radianach).}$$

$$549. 2\sqrt{4}r.$$

$$550. \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień stożka, l – tworząca stożka, h – wysokość stożka, R – promień walca, H – wysokość (tworząca) walca.

Wiemy, że ① $l = H$, ② $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi R^2 H$, ③ $\pi r l = 2\pi R H$. Z ① i ③ mamy: $\pi r H = 2\pi R H$, stad $r = 2R$. Podstawiając do ② otrzymujemy

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 4R^2 h = \pi R^2 H, \text{ stad } h = \frac{3}{4}H. \text{ Ponieważ } l^2 = r^2 + h^2, \text{ więc } r^2 = l^2 - h^2 = H^2 - \left(\frac{3}{4}H\right)^2 = \frac{7}{16}H^2, \text{ stad } r = \frac{\sqrt{7}}{4}H.$$

Niech α będzie kątem nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy. Zatem $\cos \alpha = \frac{r}{l} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$551. 30^\circ.$$

Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień stożka, l – tworząca stożka, h – wysokość stożka, α – kąt między tworzącą, a wysokością stożka.

Przekrój osiowy stożka to trójkąt równoramienny o podstawie $2r$ i wysokości h . Pole przekroju osiowego stożka jest więc równe rh . Wiemy, że $rh \cdot \pi \sqrt{3} = \pi r^2 + \pi r l$, stad $* h\sqrt{3} = r + l$. $\frac{r}{l} = \sin \alpha$ natomiast $\frac{h}{l} = \cos \alpha$, stad $r = l \sin \alpha$, $h = l \cos \alpha$. Po podstawieniu do * i po podzieleniu

obu stron przez l dostajemy równanie trygonometryczne $\sqrt{3} \cos \alpha = \sin \alpha + 1$. Przekształcamy: $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2}$,

$\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$ (ze wzoru na sinus różnicy). Ponieważ α jest kątem ostrym, więc z ostatniej równości wynika, że $60^\circ - \alpha = 30^\circ$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

$$552. \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{1+\cos \alpha} \right)^3 - 1, \text{ gdzie } V_1 - \text{objętość stożka ściętego.}$$

$$553. \text{ Stosunek objętości: } 1:2. \text{ Stosunek pól: } (4\pi+1):(4\pi+4).$$

$$554. \text{ Pole: } 2\pi(a+b)(a+2c). \text{ Objętość: } \pi ab(a+2c).$$

$$555. 5\pi a^3.$$

$$556. \text{ Objętość: } 4\pi. \text{ Pole: } 2\pi(\sqrt{3}+3).$$

$$557. \text{ Objętość: } 32\pi. \text{ Pole: } 8\sqrt{3}(1+\sqrt{7})\pi.$$

Rozwiązanie.

Niech B oznacza bryłę rozpatrywaną w zadaniu, czyli bryłę powstałą z obrotu trójkąta KLM wokół prostej KM . Obliczamy objętość i pole powierzchni bryły B rozważając dwa stożki: S_1 – stożek o promieniu podstawy r i wierzchołku w punkcie K oraz S_2 – stożek o promieniu podstawy r i wierzchołku w punkcie M .

Objętość V_B bryły B jest równa różnicy objętości stożków S_1 i S_2 , czyli:

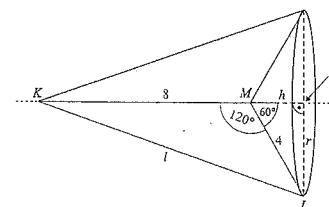
$$V_B = \frac{1}{3}\pi r^2(8+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8}{3}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{8}{3}\pi r^2. \text{ Zatem do oblicze-}$$

$$\text{nia objętości bryły } B \text{ potrzebna jest jedynie długość promienia } r. \text{ W trójkącie } MLN \sin 60^\circ = \frac{r}{4}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{4}, \quad \text{stad } r = 2\sqrt{3}, \text{ a więc } V_B = \frac{8}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 = 32\pi.$$

Pole powierzchni P_B bryły B jest równe sumie pól powierzchni bocznych stożków S_1 i S_2 , czyli $P_B = \pi r l + \pi r \cdot 4 = 2\pi\sqrt{3}(l+4)$.

Korzystając z tw. Pitagorasa obliczamy najpierw wysokość h , a następnie tworzącą l . W trójkącie MLN $h^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$, stad $h = 2$.

W trójkącie KLN $l^2 = (8+2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112 = 16 \cdot 7$, stad $l = 4\sqrt{7}$. Ostatecznie $P_B = 2\pi\sqrt{3}(4\sqrt{7}+4) = 8\sqrt{3}(1+\sqrt{7})\pi$.



$$558. 52\pi.$$

$$559. \frac{7}{5}.$$

$$560. \text{ Objętość: } \frac{800}{\sqrt{21}}\pi. \text{ Pole powierzchni: } \frac{360}{\sqrt{7}}\pi.$$

$$561. \frac{400\pi}{7} \text{ (gdy trójkąt } ABC \text{ jest ostrokątny)}, \frac{144\pi}{7} \text{ (gdy trójkąt } ABC \text{ jest rozwartokątny)}.$$

$$562. \frac{\frac{1}{3}\pi c^3 (\tan \beta - \tan \alpha) \tan \alpha \tan \beta}{(\tan \beta + \tan \alpha)^2} \left[= \frac{1}{3}\pi c^3 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} \left(1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha+\beta)} \right) \right].$$

$$563. 2\pi a^3 \frac{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{3 \sin^2(\beta+\gamma)}.$$

$$564. \frac{8\sqrt{10}\pi}{15}.$$

$$565. \text{ a) } 3,5\pi a^2; \text{ b) } 2\sqrt{3}\pi a^2; \text{ c) } 6\sqrt{3}\pi a^2.$$

$$566. \frac{7}{4}\pi.$$

$$567. \pi a^3 \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Rozwiązanie.

Objętość V bryły powstałej z obrotu rombu jest równa $V_1 - V_2 - V_3$, gdzie V_1, V_2, V_3 są objętościami stożków o promieniach równych odpowiednio $a+r, a, r$ i wysokościach równych odpowiednio $h+H, H, h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi(a+r)^2(h+H) - \frac{1}{3}\pi a^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi[(a+r)^2(h+H) - a^2 H - r^2 h] =$$

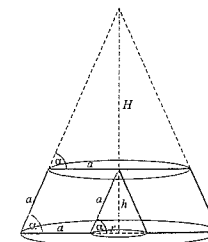
$$= \frac{1}{3}\pi[a^2 h + r^2 H + 2ar(h+H)].$$

Łatwo obliczamy r, h oraz H : $r = a \cos \alpha$, $h = a \sin \alpha$, $H = a \tan \alpha$. Wobec tego:

$$V = \frac{1}{3}\pi[a^3 \sin \alpha + a^3 \cos^2 \alpha \tan \alpha + 2a^3 \cos \alpha (\sin \alpha + \tan \alpha)] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 (\sin \alpha + \cos^2 \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 (\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha) = \frac{1}{3}\pi a^3 (3 \sin \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha) = \pi a^3 \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$



568. Objętość: 243π ; pole powierzchni całkowitej: $81\pi(1 + \sqrt{2})$.

569. $\frac{\pi(13-4\sqrt{3})}{3}$.

570. 2π .

571. $4\pi R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + 1) \quad [= \pi R^2 \sin 2\alpha (2 \sin \alpha + \sin 2\alpha)]$.

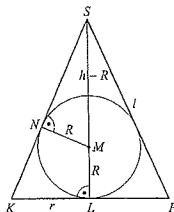
572. $\frac{1}{9}$.

573. 60° lub około 81° (sinus połowy tego kąta jest równy $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$).Wskazówki. I. Dwukrotnie zastosuj *nv. sinusów*. II. Skorzystaj ze wzoru $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

574.

Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień podstawy stożka, l – tworząca stożka, h – wysokość stożka, R – promień kuli wpisanej w stożek, V_S – objętość stożka, V_K – objętość kuli, P_P – pole powierzchni całkowitej stożka, P_K – pole powierzchni kuli.

$$V_S : V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 h : \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 h}{R^3}, \quad P_S : P_K = (\pi r^2 + \pi r l) : 4\pi R^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 + r l}{R^2}.$$

Należy udowodnić, że $V_S : V_K = P_S : P_K$, czyli, że $\frac{r^2 h}{R^3} = \frac{r^2 + r l}{R^2}$. Przekształcając ostatnią równośćstwierdzamy, że należy dowieść, że $\frac{r h}{R} = r + l$.Trójkąt KLS jest podobny do trójkąta MNS (cecha kk). Zatem $\frac{|KL|}{|KS|} = \frac{|MN|}{|MS|}$, czyli $\frac{r}{l} = \frac{R}{h-R}$. Przekształ-camy ostatnią równość: $r(h-R) = Rl$, $rh - rR = Rl$, $\frac{rh}{R} - r = l$, $\frac{rh}{R} = r + l$, co kończy dowód.

575. $\frac{1}{3}$.

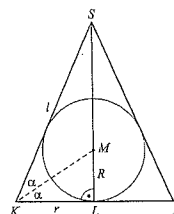
Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień podstawy stożka, l – tworząca stożka, h – wysokość stożka, R – promień kuli wpisanej w stożek, P_P – pole powierzchni całkowitej stożka, P_K – pole powierzchni kuli. Należy obliczyć $\cos 2\alpha$.

Wiemy, że $P_P = 2P_K$, $\pi r^2 + \pi r l = 2 \cdot 4\pi R^2$, $r^2 + r l = 8R^2$, $\textcircled{1} 1 + \frac{l}{r} = 8 \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2$.

W trójkącie KLS $\frac{r}{l} = \cos 2\alpha$, stąd $\textcircled{2} \frac{l}{r} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$. W trójkącie KLM $\textcircled{3} \frac{R}{r} = \tan \alpha$. Po podsta-wieniu $\textcircled{2}$ i $\textcircled{3}$ do równości $\textcircled{1}$ otrzymujemy równanie trygonometryczne $1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = 8 \tan^2 \alpha$.Przekształcamy: $\cos 2\alpha + 1 = 8 \tan^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha$, $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 = 8 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)$,

$$2 \cos^2 \alpha = 8 \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1). \text{ Niech } t = \cos^2 \alpha. \text{ Wtedy } 2t = 8 \cdot \frac{1-t}{t} (2t-1),$$

$$t^2 = 4(1-t)(2t-1), \quad 9t^2 - 12t + 4 = 0, \quad (3t-2)^2 = 0, \text{ stąd } t = \frac{2}{3}. \text{ Zatem } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2t - 1 = \frac{1}{3}.$$



576. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ lub $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Oznaczenia: r – promień podstawy stożka (wysokość walca), h – wysokość stożka, R – promień podstawy walca, V_S – objętość stożka, V_W – objętość walca.

$$V_S : V_W = \frac{1}{3} \pi r^2 h : \pi R^2 r = \frac{r h}{3 R^2}. \text{ Wiemy, że } \frac{r h}{3 R^2} = \frac{8}{3}, \text{ stąd } \textcircled{1} \frac{r}{R} \cdot \frac{h}{R} = 8. \text{ W trójkącie } ABD$$

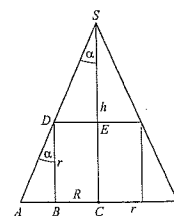
$$\tan \alpha = \frac{r-R}{r} = 1 - \frac{R}{r}, \text{ stąd } \frac{R}{r} = 1 - \tan \alpha, \text{ czyli } \textcircled{2} \frac{r}{R} = \frac{1}{1 - \tan \alpha}. \text{ W trójkącie } DES \quad \tan \alpha = \frac{R}{h-r},$$

$$\text{stąd } \frac{h-r}{R} = \frac{1}{\tan \alpha}, \text{ czyli } \frac{h}{R} - \frac{r}{R} = \frac{1}{\tan \alpha}. \text{ Podstawiając } \textcircled{2} \text{ otrzymujemy } \textcircled{3} \frac{h}{R} = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{1 - \tan \alpha}.$$

$$\text{Podstawiamy } \textcircled{2} \text{ i } \textcircled{3} \text{ do równości } \textcircled{1} \text{ otrzymując równanie } \textcircled{4} \frac{1}{1 - \tan \alpha} \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{1 - \tan \alpha} \right) = 8.$$

Mianowniki ułamków w równaniu $\textcircled{4}$ nie są równe zero, gdyż $0 < \tan \alpha < 1$ (nierówność $\tan \alpha > 0$ jest oczywista, ale również $\tan \alpha = \frac{r-R}{r} < \frac{r}{r} = 1$).

$$\text{Przekształcamy równanie } \textcircled{4}: \frac{1}{1 - \tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)} = 8, \quad \frac{1}{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)^2} = 8, \quad 8 \tan \alpha (1 - \tan \alpha)^2 = 1, \quad 8 \tan^3 \alpha - 16 \tan^2 \alpha + 8 \tan \alpha - 1 = 0.$$

Niech $t = \tan \alpha$. Wówczas $\textcircled{5} 8t^3 - 16t^2 + 8t - 1 = 0$. Jednym z rozwiązań równania $\textcircled{5}$ jest $t_1 = 0,5$, zatem dane równanie zapisujemy w postaci $(t - 0,5)(8t^2 - 12t + 2) = 0$. Pozostałe rozwiązania: $t_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $t_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$. $t = \tan \alpha < 1$, więc ostatecznie $\tan \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ lub $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

577. $\frac{4\pi H^2}{(1 + \tan \alpha)^2}$.

579. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

581. $\frac{a^3}{24} (1 + \sqrt{5})$.

583. $\frac{9H^2 R^3}{4(H + R\sqrt{3})^3}$.

585. $2l \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha} \quad \left[= 2l \frac{\sin \alpha}{2 + \sqrt{2} \tan \alpha} \right]$.

587. 0,000 018 mm.

589. Poziom wody podniesie się o 1,8 cm.

591. a) 23 464 l; b) 144,48 kg.

593. $642\pi \text{ cm}^3$.

595. $0,306 \text{ m}^3$.

597. a) $h = 2\sqrt{3} \text{ km} \approx 3,46 \text{ km}$; b) 45° ; c) $2\sqrt{6} \text{ km} (\approx 4,90 \text{ km})$.

598. a) 1824 m^2 ; b) 918 m^2 .

599. a) Krótsza lina: $350(\sqrt{3} - 1) \text{ m} (\approx 256,2 \text{ m})$; dłuższa lina: $350(3 - \sqrt{3}) \text{ m} (\approx 443,8 \text{ m})$; b) wysokość maszty: $525(\sqrt{3} - 1) \text{ m} (\approx 384,3 \text{ m})$.

600. a) Objętość cokołu: $7\pi \text{ m}^3 (\approx 22 \text{ m}^3)$; b) tak, masa cokołu: $18,9\pi \text{ t} < 60 \text{ t}$.

601. a) Pole powierzchni bocznej: $600\pi \text{ cm}^2$; b) wysokość: $10\sqrt{5} \text{ cm}$.

602. $48 384 \text{ m}^3$.

604. $10\sqrt{1 + \pi^2} \text{ cm} \approx 33 \text{ cm}$.

606. a) 3000 m^3 ; b) 420 m^2 .

608. a) Objętość: 2500 m^3 ; b) masa: $19 500 \text{ t}$.

578. $8R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha (\cos \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}) \quad \left[= 2R^2 \sin^2 2\alpha (1 + 2\sqrt{2 \tan^2 \alpha + 1}) \right]$.

580. $2\sqrt{3}r^3 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos 2\alpha} \quad \left[= \sqrt{3}r^3 \frac{\tan 2\alpha}{\tan^3 \alpha} \right]$.

582. $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha \sin^4 \beta \cos^2 \beta}{\pi}$.

584. $\frac{a^3 (2 + \tan \alpha)^3}{6 \tan^2 \alpha}$.

586. 27.

588. 168 dm^2 (wysokość akwarium: 60 cm).

590. 9 cm.

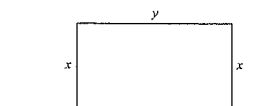
592. $103,5\pi \text{ kg} (\approx 325 \text{ kg})$.

594. a) 625 cm^3 ; b) $31,25 \text{ dkg}$.

596. a) $280 + 48\sqrt{5} \text{ m}^3 (\approx 387,3 \text{ m}^3)$; b) 35 paczek.

ZADANIA OPTIMALIZACYJNE

609. $20 \text{ m} \times 40 \text{ m}$.

Rozwiązanie. Pole powierzchni kąpieliska $P = xy$. Wiemy, że $2x + y = 80$, stąd mamy $y = 80 - 2x$. Możemy teraz wyrazić pole P za pomocą zmiennej x : $P(x) = x(80 - 2x)$, gdzie $x \in D = (0; 40)$.Funkcja $P(x) = -2x^2 + 80x$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $x_W = 20 \in D$. Jeśli $x = 20$, to $y = 80 - 2x = 40$. Zatem kąpielisko powinno mieć wymiary $20 \text{ m} \times 40 \text{ m}$.

610. 450 m^2 ($P(x) = -2x^2 + 60x$, $x \in (10; 30)$, x – długość boku prostokąta prostopadłego do dłuższej części muru).

611. $4 \text{ m} \times 6 \text{ m}$.

612. 441 cm^2 (ramkę należy zbudować z dwóch części o długości 21 cm i dwóch części o długości 29 cm).

613. 12 cm (bok kwadratu: 3 cm) i 16 cm (boki prostokąta: 2 cm i 6 cm).

Rozwiązanie. x – długość boku kwadratu, y , $3y$ – długości boków prostokąta.

Suma pól otrzymanych czworokątów $P = x^2 + 3y^2$. Wiemy, że $4x + 8y = 28$, stąd mamy $x = 7 - 2y$. Możemy teraz wyrazić pole P za pomocą zmiennej y : $P(y) = (7 - 2y)^2 + 3y^2$, gdzie $y \in D = (0; 3.5)$. Funkcja $P(y) = 7y^2 - 28y + 49$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $y = -\frac{-28}{2 \cdot 7} = 2 \in D$. Obwód prostokąta o bokach y i $3y$ jest równy $8y$, czyli 16. Zatem drut należy podzielić na części o długości 16 cm i 12 cm.

614. 40 cm i 32 cm.

615. Prostokąt jest kwadratem o boku 4 cm; pole figury: $8\pi + 16 \text{ cm}^2$ ($P(x) = \frac{\pi-2}{2}x^2 + 4(2-\pi)x + 16\pi$, $x \in (0; 8)$, x – długość jednego z boków prostokąta).

616. Długości boków trójkąta: 6 cm, 6 cm, $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm ($P(x) = \frac{1}{4}(12x - x^2)$, gdzie $x \in (0; 12)$, x – długość jednego z boków zawartych w ramionach kąta o mierze 30°).

Wskazówka. Po wyznaczeniu długości boków zawartych w ramionach kąta o mierze 30° – długość trzeciego boku można znaleźć obliczając długość jednej z wysokości, a następnie dwukrotnie korzystając z tw. Pitagorasa.

617. $x=2$, pole trójkąta: $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ($P_{MNP}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 - 12x + 16)$, $x \in (0; 4)$).

618. 15 cm.

Rozwiązanie. a , b – długości podstaw, c – długość ramienia trapezu.

Sinus kąta ostrego trapezu jest równy $\frac{3}{4}$, więc długości wysokości jest równa $\frac{3}{4}c$. Pole trapezu $P = 0,5(a+b) \cdot \frac{3}{4}c$.

Wiemy, że $a+b+2c=60$, stąd $a+b=60-2c$. Możemy teraz wyrazić pole P w zależności od długości ramienia:

$P(c) = (30-c) \cdot \frac{3}{4}c$, gdzie $c \in D = (0; 30)$. Funkcja $P(c) = -\frac{3}{4}c^2 + \frac{45}{2}c$ największą wartość przyjmuje dla argumentu $c_w = 15 \in D$.

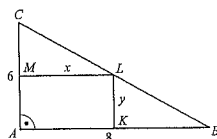
Zatem ramię trapezu o największym polu ma długość 15 cm.

619. Długości boków prostokąta: 3 i 4.

Rozwiązanie. Pole prostokąta $P = xy$. Szukamy zależności między x i y . Z podobieństwa

trójkątów ABC i KBL mamy $\frac{y}{8-x} = \frac{6}{8}$, stąd $y = 0,75(8-x)$. Możemy teraz wyrazić

pole P jako funkcję zmiennej x : $P(x) = 0,75x(8-x)$, gdzie $x \in D = (0; 8)$. Największą wartość funkcja P przyjmuje dla argumentu $x_w = 4 \in D$. Zatem jeden z boków prostokąta powinien mieć długość 4, a drugi $0,75(8-4)=3$.



620. 70 cm o 105 cm (Pole prostokąta (w m^2): $P(x) = 1,5x(1,4-x)$, gdzie x jest długością boku prostokąta równoległego do podstaw trapezu i $x \in (0; 1,4)$).

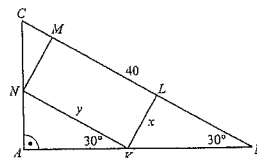
621. Długości boków prostokąta: 20 cm, $5\sqrt{3}$ cm.

Rozwiązanie. Z trójkąta ABC mamy $|AB| = 20\sqrt{3}$, z trójkąta KBL mamy $|KB| = 2x$,

z trójkąta AKN mamy $|AK| = \frac{y\sqrt{3}}{2}$. $2x + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$, stąd $x = \frac{\sqrt{3}(40-y)}{4}$. Pole

prostokąta: $P = xy = \frac{\sqrt{3}(40-y)y}{4}$. Funkcja $P(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-y^2 + 40y)$, gdzie $y \in (0; 40)$

największą wartość osiąga dla argumentu $y = 20 \in (0; 40)$. Zatem największe pole ma prostokąt o bokach $y = 20$ i $x = 5\sqrt{3}$.



622. a) $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$; b) $P_{\max}(1,5) = 1,5$.

Wskazówka. $P_{\Delta MNS} = P_{\Delta ABC} - (P_{\Delta MNC} + P_{\Delta MAS} + P_{\Delta BNS})$.

623. 2. 624. $\frac{9+8\sqrt{3}}{37}$.

625. Czworokąty o przekątnych równej długości i przecinających się pod kątem prostym.

Wskazówka. Wykorzystaj wzór na pole czworokąta: $P = 0,5pq \sin \alpha$, gdzie p , q – dług. przekątnych czworokąta, α – kąt między przekątnymi.

626. Długości boków prostokąta: 11 dm i 6 dm ($P(x) = 0,5 \cdot (23x - x^2)$, $x \in (3; 11)$, x – długość tego boku prostokąta, który zawarty jest w krawędzi AB).

Wskazówka. x – długość boku prostokąta równoległego do AB , y – długość boku prostokąta równoległego do AE .

Oblicz pole pięciokąta $ABCDE$ (94 dm^2). Wyraż pole pięciokąta $ABCDE$ jako sumę pól prostokąta o bokach długości x , y i wielokątów powstałych po wycięciu prostokąta $(2x+4y+48)$.

627. $C = (4, 0)$ ($s(x) = 2x^2 - 16x + 90$, $x \in \mathbb{R}$, x – odcięta punktu C).

628. $P = (10, 2)$ ($f(y) = -5y^2 + 20y$, $y \in (0; 4)$, y – rzędna szukanego punktu).

629. $P = (2, 2)$ ($d(x) = x^2 - 4x + 8$, $x \in (0; +\infty)$, x – odcięta punktu P).

630. $M = (-4, 2)$, pole: 8 ($P(x) = -0,5x^2 - 4x$, $x \in (-8; 0)$, x – odcięta punktu M).

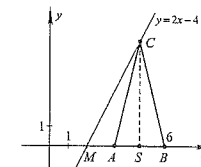
631. 8.

Rozwiązanie.

$S = (x, 0)$ – środek podstawy trójkąta, gdzie $x \in (4; 6)$. Wówczas $C = (x, 2x-4)$,

$|AB| = 2$, $|BS| = 2(6-x)$, $|CS| = 2x-4$.

Pole trójkąta $P = 0,5 \cdot 2(6-x)(2x-4)$. Funkcja $P(x) = (6-x)(2x-4)$, której dziedziną jest zbiór $D = (4; 6)$, największą wartość przyjmuje dla argumentu $x_w = 4 \in D$. Pole trójkąta T jest równe $P(4) = 8$.



632. Obwód trójkąta T : 12 (Pole trójkąta $P(x) = \frac{2}{3} \cdot (-2-x)(x+8)$, gdzie x jest odcięta wierzchołka kąta prostego i $x \in (-8; -2)$).

633. 8.

Rozwiązanie. $(x, 0)$ – jeden z wierzchołków prostokąta, leżący na dodatniej półosi OX . Pozostałe wierzchołki prostokąta mają wówczas współ-

rzędne: $(-x, 0)$ – drugi wierzchołek leżący na prostej o równaniu $y=0$, $(x, 3-x^2)$ i $(-x, 3-x^2)$ – wierzchołki prostokąta leżące na danej paraboli.

Boki równoległe do osi OY mają długość $3-x^2$, boki prostopadłe do osi OY mają długość $2x$. Zatem obwód prostokąta jest funkcją zmiennej x określoną wzorem $o(x) = 2(3-x^2) + 2 \cdot 2x$, gdzie $x \in D = (0; \sqrt{3})$. Funkcja $o(x) = -2x^2 + 4x + 6$ największą wartość przyjmuje dla argumentu $x_w = 1 \in D$, a wartość ta jest równa $o(1) = 8$. Zatem największą wartość obwodu prostokąta o danych własnościach wynosi 8.

634. $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(4, -3)$, $(2, -3)$.

635. $P = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Rozwiązanie. Każdy punkt należący do paraboli o równaniu $y = 1 - x^2$ ma współrzędne $(a, 1 - a^2)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Odległość punktu $(a, 1 - a^2)$ od prostej o równaniu $x + y - 2 = 0$ jest równa $\frac{|a + 1 - a^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|-(a^2 - a + 1)|}{\sqrt{2}} = \frac{|a^2 - a + 1|}{\sqrt{2}}$. Zauważmy, że trój-

mian $a^2 - a + 1$ przyjmuje tylko wartości dodatnie (współczynnik przy a^2 jest dodatni i $\Delta < 0$), więc $|a^2 - a + 1| = a^2 - a + 1$. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej a odległość punktu $(a, 1 - a^2)$ od danej prostej określona jest wzorem $d(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2 - a + 1)$. Funkcja kwadratowa d naj-

mniejszą wartość przyjmuje dla argumentu $a_w = \frac{1}{2}$, więc szukanym punktem jest punkt $P = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

636. a) $C = (-3, 10)$ lub $C = (5, 26)$; b) $C = (1, 2)$ ($P(x) = x^2 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, x – odcięta punktu C).

637. b) $P(t) = -0,5t^2 + 0,5t + 10$, $t \in (0; 4)$; c) Najmniejsze pole: 4, wierzchołki: $C = (0, 5)$, $D = (4, 0)$; największe pole: $10\frac{1}{8}$, wierzchołki: $C = (0, 1,5)$, $D = (0,5, 0)$.

638. Podstawa: $20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$, wysokość: 15 cm ($P(x) = 240x - 8x^2$, $x \in (0; 25)$, x – długość boku wyciętego kwadratu).

639. Prostopadłościan o podstawie $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ i wysokości 13 cm; objętość: 1950 cm^3 .

640. $V = \frac{\sqrt{3}}{128}d^3$ (Pole $P(a) = -6a^2\sqrt{3} + 3da$, gdzie a jest długością krawędzi podstawy graniastopu i $a \in (0; \frac{d}{2\sqrt{3}})$).

641. a) Krawędź podstawy: 4 cm, wysokość: 4 cm ($P(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}(8a - a^3)$, $a \in (0; 8)$, a – krawędź podstawy ostrosłupa); b) objętość: $\frac{64}{3} \text{ cm}^3$.

642. a) $\frac{1}{3}$. b) $14\sqrt{6}$.

643. $6\sqrt{2}$.

644. Kwadrat o boku 15 cm ($P(x) = 2\pi(-x^2 + 30x)$, $x \in (0; 30)$, x – długość jednego z boków prostokąta).

645. $250\pi \text{ cm}^3$.

646. Stożek o wysokości 1,5 dm i tworzącej 4,5 dm ($V(h) = 4\pi(3h - h^2)$, $h \in (0; 3)$, h – wysokość stożka).

Rozwiązanie. r – długość promienia podstawy, h – długość wysokości, $6 - h$ – długość tworzącej stożka.

Objętość stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Z tw. Pitagorasa $h^2 + r^2 = (6 - h)^2$. Stąd $r^2 = 36 - 12h$. Objętość stożka możemy więc wyrazić za pomocą długości

wysokości stożka: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - 12h)h$, gdzie $h \in D = (0; 3)$. Funkcja $V(h) = -4\pi h^2 + 12\pi h$ największą wartość przyjmuje dla argumentu $h_w = 1,5$. Zatem szukany stożkiem jest ten, którego wysokość ma długość 1,5 dm, a tworzącą długość 4,5 dm.

647. $486\pi \text{ cm}^3$ (Objętość $V(a) = 24\pi(9 - a)a$, gdzie a jest połową długości podstawy trójkąta i $a \in (0; 9)$).

648. 3π .

649. Długość promienia podstawy walca: $\frac{1}{4}a$.

Rozwiązanie. Pole powierzchni bocznej walca: $P = 2\pi rh$.

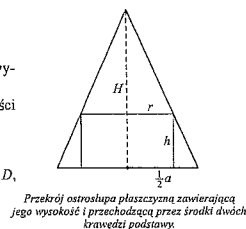
Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, otrzymujemy równość $\frac{h}{H} = \frac{0,5a - r}{0,5a}$, z której wy-

znaczamy $h = \frac{H}{a}(a - 2r)$. Możemy teraz wyrazić pole powierzchni bocznej walca jako funkcję długości

promienia podstawy: $P(r) = \frac{2\pi H}{a}r(a - 2r)$, gdzie $r \in D = (0; \frac{1}{2}a)$.

Funkcja kwadratowa $P(r) = \frac{2\pi H}{a}(-2r^2 + ar)$, największą wartość przyjmuje dla argumentu $a_w = \frac{1}{4}a \in D$,

zatem szukana długość promienia podstawy walca jest równa $\frac{1}{4}a$.



650. Długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $\frac{1}{2}a$.

651. Objętość prostopadłościanu: 225 (długość wysokości: $3\sqrt{3}$, długości krawędzi podstawy: 5 i $5\sqrt{3}$).

652. $10 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$.

653. Długości krawędzi podstawy: 15, 20, 25. Długość wysokości: 2,5. (Pole powierzchni graniastosłupa $P(x) = -18x^2 + 180x$, gdzie $3x$ jest długością krótszej przyprostokątnej podstawy graniastosłupa i $x \in (0; 6)$).

Wskazówka. Przeciwprostokątna dolnej podstawy graniastosłupa zawiera się w średnicy podstawy stożka.

654. Najmniejsza różnica: 2.

655. $12 + 20 + 24$.

656. 9600 ($a_1 = -3$).

657. Ciąg o ilorazie $-0,5$. Wzór na wyraz ogólny ciągu: $a_n = \frac{3}{(-2)^{n-1}}$.

658. 2,3 mm ($f(x) = 2(x - 2,5)^2 + 2(x - 2,25)^2 + (x - 2)^2 = 5x^2 - 23x + \frac{213}{8}$).

659. 700 krów, zysk: 1470 zł ($Z(n) = (3 - 0,003n)(400 + n) = 1200 + 1,8n - 0,003n^2$, $n \in \mathbb{N}_+$, $400 + n$ – liczba hodowanych krów).

660. a) $V(n) = n^2 - 20n + 230$; b) po upływie 10 min (130 l); c) w 29 min.

661. -1 ($f(a) = a^2 + 2a - 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$).

662. $p = -1$.

Rozwiązanie. Dla każdej wartości parametru p jednym z rozwiązań danego równania jest liczba -2 . Drugie rozwiązanie r jest największe wtedy i tylko wtedy, gdy suma liczb r oraz -2 jest największa. Suma ta jest równa $s(p) = -p^2 - 2p$ (skorzystaliśmy ze wzoru Viete'a), gdzie $p \in \mathbb{R}$. Funkcja s największą wartość przyjmuje dla argumentu $p_w = -1$. Zatem szukana wartością parametru p jest -1 .

663. Nie istnieje taka wartość parametru p (suma pierwiastków: $s(p) = -2p^3 + 4p$, gdzie $p \in (-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$).

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

664. Jest mniejsza o 40 %.

665. a) 380 razy; b) 0; c) 0.

Wskazówka. d) $119 = 7 \cdot 17$.

666. Jest mniejsza od 500 (równa jest 441).

Rozwiązanie. Łatwo uzasadnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $\binom{n}{n-1} = n$. Dana suma jest więc równa

$1 + 3 + 5 + \dots + 39 + 41$. Kolejne składniki sumy są kolejnymi wyrazami 21-wyrazowego ciągu arytmetycznego. Korzystając ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy $\frac{1+41}{2} \cdot 21 = 21^2 = 441$, więc dana liczba jest mniejsza od 500.

667. a) 32; b) 63.

668. $n = 3$ lub $n = 14$.

669. $n = 7$.

670. $n \in \{4, 5\}$.

672. Ciąg (a_n) jest rosnący.

673. W barze „Gdańskim” (w barze „Gdańskim”: 120 zestawów, w barze „Biedronka”: 112 zestawów).

674. a) 36 tras; b) 72 trasy.

675. a) 112; b) 48.

676. 32.

Rozwiązanie. $10010 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Każdy niepusty podzbiór P zbioru $A = \{2, 5, 7, 11, 13\}$ wyznacza dzielnik liczby 10010 – równy iloczynowi liczb należących do zbioru P . Dzielnikiem jest także 1. Liczba dzielników liczby 10010 jest równa liczbie podzbiorów zbioru A :

$$1 + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32.$$

677. a) 256; b) 1024.

678. Na czterdzieści sposobów.

679. a) 1440; b) 10080.

680. 240.

681. a) 60; b) 20.

682. 175 razy.

Rozwiązanie. Pierwsza cyfra kodu jest parzysta, więc syn pana Nowaka może ją wybrać na 5 sposobów (może wybrać jedną z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8). Suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6, więc drugą cyfrę może wybrać na 7 na sposobów (może wybrać jedną z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), a po wyborze drugiej cyfry – trzecią tylko na jeden sposób. Czwartą cyfrę (tak jak pierwszą) może wybrać na 5 sposobów. Korzystając z reguły mnożenia stwierdzamy, że syn będzie musiał wpisać kod co najwyżej 5 · 7 · 1 · 5 razy.

683. a) Nie można, ponieważ można utworzyć 9 240 000 numerów rejestracyjnych; b) 6 652 800 samochodów, o 28%.

684. a) 4!; b) 4 · 4!.

685. a) 288; b) 288.

Rozwiązanie. b) Panie mogły zająć miejsca w jednym z dwóch rzędów i mogły usiąść w jednym rzędzie na 4 · 3 · 2 (=24) sposoby. Po zajęciu miejsc przez panie, panowie mogą zająć miejsca na 3 · 2 (=6) sposobów. Zatem osoby mogły zająć miejsca tak, aby vis-à-vis każdego z panów siedziała pani, na 2 · 24 · 6 sposobów.

686. a) 243; b) 12.

Rozwiązanie. a) Każdą różę Ewa może włożyć do jednego z trzech wazonów, więc pięć róż może rozmieścić w swoich wazonach na 3 · 3 · 3 · 3 sposoby.

b) Do jednego z mniejszych wazonów Ewa może włożyć jedną z czterech róż (nie może włożyć doń różę czerwoną), do drugiego jedną z trzech pozostałych „nieczerwonych” róż, a każdą z trzech pozostałych róż do największego wazonu. Zatem Ewa może rozmieścić różę w opisany sposób na 4 · 3 · 1 · 1 · 1 sposobów.

687. a) 900; b) 90; c) 1710.

688. a) 40; b) 80.

689. a) 3^8 ; b) $2^4 \cdot 3^4$; c) 18.

Rozwiązanie. c) Suma wszystkich liczb zapisanych na kartkach jest równa 36, więc suma liczb znajdujących się w każdej szufladzie musi wynosić 12. Zauważmy, że kartka z liczbą 8 musi się znaleźć z kartką z liczbą 4 albo z kartkami z liczbami 1 i 3. Jeżeli liczby 8 i 4 będą w jednej szufladzie, to liczba 7 musi się znaleźć z liczbą 5 albo z liczbami 2 i 3. Jeżeli liczby 8, 1 i 3 będą w jednej szufladzie, to liczba 7 musi się znaleźć z liczbą 5. Wobec tego mamy trzy możliwości podziału kartek na trzy podzbiory w taki sposób, aby suma liczb zapisanych na kartkach należących do jednego podzbioru była równa 12: 1) $\{8, 4\}$, $\{7, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$; 2) $\{8, 4\}$, $\{7, 2, 3\}$, $\{1, 5, 6\}$; 3) $\{8, 1, 3\}$, $\{7, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$. Po dokonaniu podziału kartek na trzy podzbiory, można je umieścić w szufladach na 3! sposobów. Zatem kartki w żądany sposób można rozmieścić na 3 · 3! sposobów.

690. 12.

Rozwiązanie. n – liczba uczestników turnieju. Liczba rozegranych partii jest równa liczbie możliwych wyborów dwóch spośród n szachistów. Dwóch szachistów możemy wybrać na $\binom{n}{2}$ sposobów, zatem n jest rozwiązaniem równania $\binom{n}{2} = 66$, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1. Otrzymane równanie sprowadzamy do postaci $n^2 - n - 132 = 0$. Równanie $n^2 - n - 132 = 0$ spełniają liczby -11 i 12 . Zatem $n = 12$.

691. a) 24; b) 90; c) 96.

692. a) Dwadzieścia; b) czterdzieści dwa.

693. a) 125; b) 60; c) 10.

694. a) 280; b) 560.

Rozwiązanie. a) Wszystkie punkty należą do pięciu prostych równoległych do osi OY , prostych o równaniach: $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Do każdej z tych prostych należy osiem punktów opisanego zbioru. Trzy punkty można wybrać z każdej prostej na $\binom{8}{3}$ sposobów. Wobec tego

liczba możliwych wyborów trzech punktów należących do pewnej prostej równoległej do osi rzędnych jest równa $5 \cdot \binom{8}{3}$.

b) Do opisanego zbioru punktów należy 28 punktów o dodatnich współrzędnych (odcięta może być 1 lub 2, a rzędna dowolna liczba ze zbioru B). Wobec tego trzy spośród tych punktów można wybrać na $\binom{16}{3}$ sposobów.

695. 192.

696. a) 34650; b) 9450.

Rozwiązanie. a) Cztery osoby, które miały umyć okna, można było wybrać na $\binom{12}{4}$ sposobów. Czwórkę, która miała myć ławki, można było wybrać spośród pozostałych uczniów na $\binom{8}{4}$ sposobów. Pozostałe cztery osoby utworzyły wtedy grupę, która porządkowała bibliotekę.

Zatem uczniowie mogli dokonać podziału na trzy 4-osobowe grupy na $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$ sposobów. b) Do pracy razem z Martą i Wojtkiem można było dokooptować dwie osoby na $\binom{10}{2}$ sposobów. Cztery kolejne osoby, które były przydzielone do innej 4-osobowej grupy, można było wybrać na $\binom{8}{4}$ sposobów. Pozostałe cztery osoby utworzyły wtedy trzecią grupę. Marcie i Wojtkowi można było przydzielić do wykonania

jedną z trzech prac (mycie okien albo mycie ławek albo porządkowanie biblioteczki). Zatem szukana liczba podziałów jest równa $3 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4}$.

697. a) 462; b) 5775; c) 210; d) 1575; e) 4200.

Rozwiązanie. a) Przyjmijmy, że dziewczęta na treningu grają w koszykach z numerami od 1 do 12. Wybierając sześć dziewcząt z tej dwunastoosobowej grupy, otrzymamy podział na dwa 6-osobowe zespoły. Jeśli np. wybierzemy dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6, to drugi zespół będą tworzyły dziewczyny z numerami 7, 8, 9, 10, 11, 12. Zauważmy, że podział na takie same zespoły otrzymamy także wtedy, gdy wybierzemy dziewczyny z numerami 7, 8, 9, 10, 11, 12. Wyboru sześciu dziewcząt możemy dokonać na $\binom{12}{6}$ sposobów. Zatem liczba wszystkich

możliwych podziałów na dwa 6-osobowe zespoły jest równa $\binom{12}{6} : 2$. b) Przyjmijmy, że dziewczęta na treningu grają w koszykach

z numerami od 1 do 12. Aby otrzymać podział grupy na trzy 4-osobowe zespoły możemy wybrać najpierw 4 dziewczyny (można to uczynić na $\binom{12}{4}$ sposobów), a z pozostałych ośmiu ponownie wybrać 4 dziewczyny (można to uczynić na $\binom{8}{4}$ sposobów), dziewczyny, które nie zostały

wybrane utworzą trzeci zespół. Jeśli np. najpierw wybierzemy dziewczyny z numerami na koszykach 1, 2, 3, 4, następnie wybierzemy dziewczyny z numerami 5, 6, 7, 8, to trzeci zespół będą tworzyły dziewczyny z numerami 9, 10, 11, 12.

Zauważmy, że podział na takie same trzy zespoły powstana także wtedy, gdy wybierzemy najpierw dziewczyny z numerami na koszykach 5, 6, 7, 8, a następnie dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4 albo najpierw dziewczyny z numerami na koszykach 9, 10, 11, 12, a następnie dziewczyny z numerami 1, 2, 3, 4 itd. Kolejność wyboru zespołów nie ma tu znaczenia, zatem podziału na trzy 4-osobowe zespoły można dokonać na $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} : 3!$ sposobów. c) Do zespołu Krysi i Uli cztery siatkarki można dobrać na $\binom{10}{4}$ sposobów. Pozostałe sześć dziewcząt utworzy

drugi zespół. Zatem liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{4} (=210)$.

d) Do zespołu Krysi i Uli dwie siatkarki można dobrać na $\binom{10}{2}$ sposobów. Pozostałe osiem dziewcząt można podzielić na dwa czteroosobowe zespoły na $\binom{8}{4} : 2$ sposobów (patrz rozwiązanie punktu a). Zatem liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} : 2 (=1575)$.

e) Do zespołu Krysi trzy siatkarki można dobrać na $\binom{10}{3}$ sposobów. Gdy zespół Krysi jest już skompletowany, do zespołu Uli trzy dziewczyny możemy wybrać na $\binom{7}{3}$ sposobów. Pozostałe cztery dziewcząt utworzy trzeci zespół. Liczba szukanych podziałów jest równa $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3}$.

698. Na 35 sposobów.

699. a) 729; b) 90.

700. a) $\frac{1}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{4}{3} = 70$; b) $\frac{1}{6} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 105$.

701. a) 30240; b) 6720.

Rozwiązanie. b) Każda permutacja zbioru A jest ośmiowyrazowym ciągiem. Trzy miejsca w tym ciągu dla liczb 1, 2, 3 można wybrać na $\binom{8}{3}$ sposobów i każdy wybór trzech miejsc w sposób jednoznaczny określa którymi wyrazami ciągu są liczby 1, 2, 3. Po wybraniu miejsc dla liczb 1, 2, 3, pozostałe pięć liczb można spemutować na 5! sposobów. Zatem szukana liczba permutacji jest równa $\binom{8}{3} \cdot 5! (=6720)$.

702. a) 840; b) 1200.

703. 70 dróg.

Rozwiązanie. Zauważmy, że aby przejść z punktu (0, 0) do punktu (4, 4) należy wykonać 8 „kroków”: 4 w prawo i 4 do góry (kroki w prawo i do góry mogą być wykonane w dowolnej kolejności). Zatem liczba dróg prowadzących z punktu (0, 0) do punktu (4, 4) jest równa liczbie ośmiowyrazowych ciągów, którego cztery wyrazy są równe 0 (kroki w prawo) i cztery równe 1 (kroki do góry). Cztery miejsca w ciągu ośmiowyrazowym dla wyrazów 0 możemy wybrać na $\binom{8}{4}$ sposobów. Zatem liczba szukanych dróg równa jest $\binom{8}{4}$.

704. W siedemdziesięciu.

Rozwiązanie. Każde dwie przecinające się przekątne danego ośmiokąta są przekątnymi pewnego czworokąta, którego wierzchołkami są cztery wierzchołki ośmiokąta. Zatem liczba punktów, w których przecinają się przekątne, jest równa liczbie czworokątów, których wierzchołki są także wierzchołkami danego ośmiokąta. Liczba tych czworokątów jest równa liczbie czteroelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków danego wielokąta, czyli $\binom{8}{4}$.

705. a) $\frac{3}{10}$; b) 0,7.706. $\frac{7}{15}$.

707. 0,375.

708. a) 0,54; b) 0,58; c) 0,7; d) 0,3.

709. a) 0,25; b) 0,15.

710. a) Ω_n – zbiór uporządkowanych par (k, n) takich, że $k \in U_1$ i $n \in U_2$ lub krócej: $\Omega_n = \{(k, n) : k \in U_1 \text{ i } n \in U_2\}$, 0,3;
b) Ω_b – zbiór uporządkowanych par (k, n) takich, że $k, n \in U_2$ lub krócej: $\Omega_b = \{(k, n) : k, n \in U_2\}$, 0,25;
c) Ω_c – zbiór uporządkowanych par (k, n) takich, że $k, n \in U_1$ lub krócej: $\Omega_c = \{(k, n) : k, n \in U_1 \text{ i } k \neq n\}$, 0,3.
(poziom rozszerzony) Ω_e – zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru U_1 lub krócej: $\Omega_e = \{\{k, n\} : k, n \in U_1 \text{ i } k \neq n\}$, 0,3.

711. a) Ω – zbiór dwuwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 6\}$ (lub Ω – zbiór dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, \dots, 6\}$); b) $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)$;
c) $P(A) = \frac{7}{18}$, $P(B) = \frac{1}{4}$.

712. a) $\frac{5}{77}$; b) $\frac{8}{33}$.

Rozwiązanie. a) Niech K oznacza zbiór uczniów tej klasy. Korzystając z wykresu, obliczamy liczbę uczniów: $|K| = 2 + 6 + 8 + 4 + 2 = 22$. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór par (a, b) , gdzie $a, b \in K$ i $a \neq b$. Wobec tego $|\Omega| = 22 \cdot 21$.

Liczba uczniów, którzy uzyskali ocenę co najmniej bardzo dobrą, jest równa $4 + 2$. Zatem $|A| = 6 \cdot 5$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 5}{22 \cdot 21} = \frac{5}{77}$.

713. a) $\frac{435}{1891}$; b) $\frac{45}{1891}$; c) $\frac{120}{1891}$.714. $\frac{1}{6000}$.

715. $\frac{59}{68}$.

Rozwiązanie. Uczniowie przygotowali 52 losy. Pierwsza osoba kupująca los mogła wybrać jeden z pięćdziesięciu dwóch losów, druga jeden z pięćdziesięciu jeden, a trzecia jeden z pięćdziesięciu losów. $|\Omega| = 52 \cdot 51 \cdot 50$.

Zdarzenie A – co najmniej jedna spośród trzech pierwszych osób wylosowała los z wygrana. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A : A' – każda z trzech pierwszych osób kupiła pusty los. $|A'| = 27 \cdot 26 \cdot 25$. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 1 - \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{2 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 2} = \frac{59}{68}$.

716. W pierwszej loterii ($\frac{1}{20} > \frac{157}{3160}$).717. $\frac{5}{18}$.718. a) $\frac{4}{49}$, b) $\frac{23}{63}$.

Rozwiązanie. a) W obu koszykach znajduje się po 21 klocków, więc po jednym klocku z obu koszyków możemy wyjąć na 21·21 sposobów.

$|\Omega| = 21 \cdot 21$. $|A| = 6 \cdot 6$. Zatem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 6}{21 \cdot 21} = \frac{4}{49}$.

719. a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{14}$; b) $P(A \cup B) = \frac{17}{28}$.720. a) $P(A) = \frac{41}{66}$, b) $P(B) = \frac{4}{66}$.

Rozwiązanie. a) Ozn. $Z = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

! SPOSÓB. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór par (x, y) , gdzie $x, y \in Z$ i $x \neq y$. Wobec tego $|\Omega| = 12 \cdot 11$.

Jeśli $x < 0$, to zdarzenie elementarne (x, y) sprzyja zdarzeniu A wtedy, gdy $y \geq 0$. Takich par (x, y) jest 5 · 7.

Jeśli $x = 0$, to zdarzenie elementarne (x, y) sprzyja zdarzeniu A wtedy, gdy $y \in Z \setminus \{0\}$. Takich par (x, y) jest 1 · 11.

Jeśli $x > 0$, to zdarzenie elementarne (x, y) sprzyja zdarzeniu A wtedy, gdy $y \leq 0$. Takich par (x, y) jest 6 · 6.

Zatem wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających mamy $5 \cdot 7 + 1 \cdot 11 + 6 \cdot 6 = 82$, czyli $|A| = 82$. Zatem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{82}{12 \cdot 11} = \frac{41}{66}$.

!! SPOSÓB. (poziom rozszerzony) Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru Z .

Wtedy $|\Omega| = \binom{12}{2} = 66$. Iloczyn xy jest niedodatni wtedy i tylko wtedy, gdy liczby x i y są przeciwnych znaków lub jedna z nich jest równa 0.

Zatem $|A| = \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} + 1 \cdot \binom{11}{1} = 41$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{41}{66}$.

721. a) $P(A) = P(B) = \frac{60}{121}$, b) $P(A \cup B) = \frac{181}{242}$.722. $\frac{5}{54}$.723. a) $\frac{2}{5}$; b) 1; c) $\frac{1}{5}$; d) 0.

Rozwiązanie. Ω – zbiór pięciowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

a) Zdarzenie A – dziecko utworzyło parzystą. Zliczając wszystkie liczby parzyste, jakie mogło utworzyć dziecko, możemy przyjąć, że klocki były ustawiane od końca, tzn. pierwszy z ułożonych klocków dał cyfrę jedności liczby, drugi cyfrę dziesiątek itd. Wobec tego pierwszym klockiem mógł być ten z cyfrą 2 lub ten z cyfrą 4, ustawiając drugi klocek dziecko miało do wyboru 4 klocki, ustawiając trzeci – do wyboru miało 3 klocki, ustawiając czwarty – do wyboru miało 2 klocki, cyfra na ostatnim klocku stała się cyfrą dziesiątków tysięcy. Zatem $|A| = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{5}$.

724. a) $\frac{1}{50}$; b) $\frac{1}{30}$; c) $\frac{4}{125}$; d) $\frac{69}{2500}$.

Rozwiązanie. Ω – zbiór par (a, b) , gdzie $a, b \in \{1, 2, \dots, 50\}$. $|\Omega| = 50 \cdot 50 = 2500$.

c) C – zdarzenie polegające na wylosowaniu kul, których numery różnią się o 10.

Jest 40 takich wyników losowania, że numer kuli wylosowanej z pierwszej szuflady jest o 10 mniejszy od numeru kuli wylosowanej z drugiej szuflady i 40 takich wyników losowania, że numer kuli wylosowanej z pierwszej szuflady jest o 10 większy od numeru kuli wylosowanej z drugiej szuflady. Zatem $|C| = 80$. $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{80}{2500} = \frac{4}{125}$.

d) D – zdarzenie polegające na wylosowaniu kul z numerami, których suma jest podzielna przez 33.

Są 32 takie pary liczb, których suma jest równa 33: (1, 32), (2, 31), ..., (32, 1), jest 35 takich par liczb, których suma jest równa 66:

(16, 50), (17, 49), ..., (50, 16) i 2 takie pary, których suma wynosi 99: (49, 50), (50, 49). Zatem $|D| = 32 + 35 + 2 = 69$. $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{69}{2500}$.

725. a) $\frac{41}{81}$; b) $\frac{36}{81}$.726. $\frac{4}{9}$.727. $P(A) = \frac{242}{243}$, $P(B) = \frac{230}{243}$.

Rozwiązanie. $|\Omega| = 3^6$ (każdy pacjent mógł wybrać jednego z trzech lekarzy). a) Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A : A' – wszyscy pacjenci wybrali tego samego lekarza. $|A'| = 3$. Zatem $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{3^6} = 1 - \frac{1}{3^5} = \frac{242}{243}$.

728. a) $\frac{12}{13}$, b) $\frac{55}{78}$, c) $\frac{22}{25}$.

Rozwiązanie. a) $|\Omega| = 12 \cdot 13$. Zdarzenie A – wylosowano zawodników z różnymi numerami. $|A| = 12 \cdot 12$. $P(A) = \frac{12}{13}$.

b) $|\Omega| = \binom{12}{2} \cdot \binom{13}{2} = \binom{12}{2} \cdot 13 \cdot 6$. Zdarzenie A – wylosowano zawodników z różnymi numerami. $|A| = \binom{12}{2} \cdot \binom{11}{2} = \binom{12}{2} \cdot 11 \cdot 5$. $P(A) = \frac{55}{78}$.

c) $|\Omega| = \binom{25}{3} = 25 \cdot 24 \cdot 4$. Zdarzenie A – wylosowano zawodników z różnymi numerami. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A : A' – wylosowano zawodników, wśród których dwóch grało z tym samym numerem. $|A'| = 12 \cdot 23$ (można było wylosować jedną z dwunastu par zawodników z tym samym numerem na koszulce i jednego z 23 pozostałych piłkarzy). $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{12 \cdot 23}{25 \cdot 24 \cdot 4} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}$.

729. Gracz powinien wybrać dwie kostki czworosienne. Wówczas $P(A) = \frac{3}{16}$. W pozostałych przypadkach $P(A) = \frac{1}{6}$.

730. a) $\frac{13 \cdot 3^9}{4^{10}}$ ($\approx 0,24$); b) $\frac{31}{4^{10}} = 0,00003$.

Rozwiązanie. a) $|\Omega| = 4^{10}$.

Zdarzenie A – zdający prawidłowo odpowie co najwyżej na jedno pytanie, czyli udzieli tylko błędnych odpowiedzi lub odpowie prawidłowo tylko na jedno pytanie. Udzielił samych błędnych odpowiedzi można na 3^{10} sposobów (w każdym zadaniu są 3 błędne odpowiedzi), udzielił poprawnej odpowiedzi tylko na jedno pytanie można na $10 \cdot 3^9$ sposobów (pytanie, na które udzielona zostanie poprawna odpowiedź, można wybrać na 10 sposobów, w pozostałych dziewięciu pytaniach błędna odpowiedź można wybrać na 3 sposoby).

Zatem $|A| = 3^{10} + 10 \cdot 3^9 = 3 \cdot 3^9 + 10 \cdot 3^9 = 13 \cdot 3^9$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13 \cdot 3^9}{4^{10}}$ ($\approx 0,24$);

731. 0,3.

732. $\frac{3}{11}$.

Rozwiązanie. m – liczba wszystkich maturzystów, h, w, x – liczba maturzystów deklarujących chęć zdawania odpowiednio historii, wos-u, historii i wos-u, p – prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie zamierza zdawać ani historii, ani wos-u.

Liczba maturzystów zamierzających zdawać historię lub wos jest równa $h + w - x$. Wiemy, że $x = \frac{1}{10}(h + w - x)$, stąd $x = \frac{1}{11}(h + w)$. Zatem

liczba osób zamierzających zdawać historię lub wos jest równa $h + w - \frac{1}{11}(h + w) = \frac{10}{11}(h + w) = \frac{10}{11}(0,32m + 0,48m) = \frac{8}{11}m$.

Szukane prawdopodobieństwo: $p = 1 - \frac{\frac{8}{11}m}{m} = 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$.

733. $\frac{1}{48}$.734. a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{380}$.735. a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{14}{15}$.736. $\frac{6026}{161700}$.737. $P(A) = \frac{2}{15}$, $P(B) = \frac{9}{10}$.738. $P(A) = \frac{319}{324}$, $P(B) = \frac{25}{162}$.739. $\frac{149}{198}$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem czterowyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru Z . $|\Omega| = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97$. Zdarzenie A – co najmniej jedna liczba z drugiej pary jest parzysta. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A :

A' – obie liczby z drugiej pary są nieparzyste. $|A'| = 50 \cdot 49 \cdot 98 \cdot 97$. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}$.

740. $\frac{736}{3375}$.741. $P(A) = \frac{1}{90}$, $P(B) = \frac{28}{45}$.742. a) $\frac{3}{7}$; b) 1; c) 1; d) $\frac{2}{7}$.743. $\frac{9}{17}$.

744. a) $P(A) = \frac{1}{15}$; b) $P(B) = \frac{6}{15}$

745. $\frac{1}{15}$.

746. a) 6660 razy; b) 36 razy.

747. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{7}$.

748. $\frac{14}{33}$.

750. a) $P(A) = \frac{9}{35}$; b) $P(B) = \frac{31}{35}$.

751. $\frac{1}{3}$.

752. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{13}{60}$.

Rozwiązanie. b) Ω – zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru A . $|\Omega| = \binom{40}{2} = 20 \cdot 39$. Zdarzenie B – wylosowano dwie liczby, których iloczyn przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Iloczyn dwóch liczb naturalnych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, jeśli obie liczby przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 lub obie przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2. Do zbioru A należy 14 liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 i 13 liczb, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2. Zatem $|B| = \binom{14}{2} + \binom{13}{2} = 13 \cdot 7 + 13 \cdot 6 = 13 \cdot 13$. $P(B) = \frac{13 \cdot 13}{20 \cdot 39} = \frac{13}{60}$.

753. a) $P(A) = \frac{2765}{4096}$; b) $P(A) = \frac{2 \cdot 5^3 + 5^2 \cdot 6^2 + 6^3}{16^3} = \frac{683}{2048}$.

754. $\frac{2281}{11550}$.

Rozwiązanie. Z – zbiór utworzonych liczb trzycyfrowych. Za pomocą cyfr 0, 3, 4, 5, 6, 9 można utworzyć 5-5-4 liczb o różnych cyfrach.

Ω – zbiór 3-elementowych podzbiorów zbioru Z . $|\Omega| = \binom{100}{3} = 49 \cdot 33 \cdot 100$.

Do zbioru Z należy siedem liczb podzielnych przez 45: 360, 405, 450, 495, 540, 630, 945. Zdarzenie A – co najmniej jedna spośród wylosowanych liczb jest podzielna przez 45. Zdarzenie A' – wylosowano trzy liczby niepodzielne przez 45. $|A'| = \binom{93}{3} = 91 \cdot 46 \cdot 31$.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{91 \cdot 46 \cdot 31}{49 \cdot 33 \cdot 100} = 1 - \frac{13 \cdot 23 \cdot 31}{7 \cdot 33 \cdot 50} = 1 - \frac{9269}{11550} = \frac{2281}{11550}.$$

755. Dwadzieścia dziewięć.

Wskazówka. Do zbioru A należy $2n+2$ liczb parzystych i $2n+3$ liczb nieparzystych.

756. a) $\frac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}$; b) dla $n \geq 3$.

757. a) $\frac{(n-2)(n-1)}{3n^2}$; b) dla $n = 4$.

758. $\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Ω – zbiór par (p, d) , gdzie $p, d \in \{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$. $|\Omega| = (2n)^2$.

Zdarzenie A – iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2)$.

Wobec tego, zdarzenie elementarne (p, d) sprzyja zdarzeniu A wtedy i tylko wtedy, gdy liczba p jest większa od d , ale jest co najwyżej dwa razy większa od d . Obliczymy najpierw, ile jest takich zdarzeń elementarnych (p, d) , że $d \leq n$.

Jeśli $d \leq n$, to p może być dowolną liczbą należącą do zbioru $\{d+1, d+2, \dots, 2d\}$. Do zbioru $\{d+1, d+2, \dots, 2d\}$ należy d elementów, więc dla każdej liczby $d \leq n$ mamy d zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A . Zatem wszystkich szukanych par (p, d) , gdzie $d \leq n$, jest $1+2+\dots+n$.

Jeśli $n < d < 2n$, to p może być dowolną liczbą większą od d . Gdy $d=2n-1$, to $p=2n$ (mamy jedną parę (p, d)), gdy $d=2n-2$, to $p \in \{2n-1, 2n\}$ (mamy dwie pary (p, d)), ..., gdy $d=n+1$, to $p \in \{n+2, n+3, \dots, 2n-1, 2n\}$ (mamy $n-1$ par (p, d)). Zatem wszystkich szukanych par (p, d) , gdzie $n < d < 2n$, jest $1+2+\dots+(n-1)$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A możemy obliczyć, korzystając ze wzoru na sumę częściową ciągu arytmetycznego. $|A| = n^2$, więc $P(A) = 0,25$.

759. Czterech.

760. a) 11 cukierków miętowych; b) $\frac{7}{145}$.

Rozwiązanie. a) c – liczba wszystkich cukierków. A – zdarzenie polegające na wylosowaniu cukierka kawowego. $|\Omega| = c$. $|A| = 12$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{c} = 0,4$. Rozwiązaniem równania $\frac{12}{c} = 0,4$ jest liczba $c=30$. W torebce jest $30 - (7+12)$ cukierków miętowych.

b) B – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch cukierków o smaku owocowym. W torebce znajduje się 30 cukierków (patrz punkt a)).

$$|\Omega| = 30 \cdot 29. |B| = 7 \cdot 6. \text{ Zatem } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 6}{30 \cdot 29} = \frac{7}{145}.$$

761. 700 zł.

762. 25 osób.

763. 0,4.

Rozwiązanie. Zdarzenia A, B, C – wylosowano maturzystę z klasy odpowiednio IVA, IVB, IVC. $P(A), P(B), P(C)$ – prawdopodobieństwo wylosowania maturzysty z klasy odpowiednio IVA, IVB, IVC.

Co czwarty maturzysta z tej szkoły jest uczniem klasy IVA, więc $P(A) = 0,25$. Wiemy, że $P(A \cup B) + 0,15 = P(B \cup C)$.

Zdarzenia A i B są rozłączne i zdarzenia B i C są rozłączne, więc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ i $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Zatem $P(A) + P(B) + 0,15 = P(B) + P(C)$. Stąd $P(C) = P(A) + 0,15 = 0,25 + 0,15 = 0,4$.

764. a) 12,5%; b) 24.

765. 21 piątek.

766. $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

767. $n \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$.

Rozwiązanie. Ω – zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru $n+6$ -elementowego, gdzie $n \in \mathbb{N}$. $|\Omega| = \binom{n+6}{2} = \frac{(n+5)(n+6)}{2}$.

Zdarzenie A – wylosowano dwie kule białe.

Jeśli liczba kul białych jest równa 0 lub 1, to zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym, wtedy $P(A) = 0 < 0,5$. Zatem liczby 0 i 1 są szukanymi wartościami n .

Jeśli $n \geq 2$, to $|A| = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)n}{(n+5)(n+6)}$. Aby rozwiązać nierówność $\frac{(n-1)n}{(n+5)(n+6)} < 0,5$, mnożymy obie jej strony przez

$(n+5)(n+6)$ (możemy mnożyć przez $(n+5)(n+6)$, bo n jest liczbą naturalną, więc mnożymy przez liczbę dodatnią), a następnie sprowadzamy do postaci $n^2 - 13n - 30 < 0$. Nierówność $n^2 - 13n - 30 < 0$ spełniają liczby $n \in (-2; 15)$, biorąc pod uwagę, że $n \geq 2$ i $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy $n \in \{2, \dots, 14\}$. Ostatecznie: $n \in \{0, 1\}$ lub $n \in \{2, \dots, 14\}$, czyli $n \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$.

768. 3 kule białe i 6 kul czarnych.

769. 27.

770. $\frac{183}{272}$ (w urnie znajdują się 3 kule białe, 6 kul czarnych i 9 kul zielonych).

771. $n = 7$.

772. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{5}{36}$.

773. a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{7}$ ($a=-2, b=4$).

774. a) 0,6; b) 0,2.

775. a) 0,05; b) 0,05; c) 0,2.

776. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{2}{9}$ ($c=-1, d=4$).

777. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$.

778. $\frac{2}{3}$.

779. 0,25.

780. $\frac{1}{2}$.

781. a) $P(A) = \frac{1}{12}$; b) $P(B) = \frac{1}{27}$.

782. $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{30}$.

783. a) $\frac{1}{182}$; b) $\frac{1}{4368}$; c) $\frac{3}{52}$; d) $\frac{23}{364}$.

784. 0,1.

785. a) $P(D) = \frac{1}{125}$; b) $P(E) = \frac{12}{25}$; c) $P(F) = \frac{2}{25}$.

Rozwiązanie. Każdy z punktów A, B, C można połączyć na 5 sposobów, więc $|\Omega| = 5^3$.

a) Każdy z punktów A, B, C ma być połączony z punktem M , więc $|D| = 1$. $P(D) = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

c) Jeśli wybierzemy trzy punkty spośród punktów K, L, M, N, O , to punkty A, B, C możemy połączyć z wybranymi punktami tak, aby odcinki nie miały punktów wspólnych, tylko na jeden sposób. Trzy punkty spośród punktów K, L, M, N, O można wybrać na $\binom{5}{3} = 2 \cdot 5$ sposobów.

$$\text{Zatem } |F| = 2 \cdot 5. P(F) = \frac{5 \cdot 2}{5^3} = \frac{2}{25}.$$

786. a) $\frac{9}{11}$; b) $\frac{2}{11}$.

Rozwiązanie. a) Zdarzenie A – prosta poprowadzona przez wylosowane punkty zawiera przekątną wielokąta.

1 SPOSÓB. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór par (W_1, W_2) , gdzie W_1 i W_2 są różnymi wierzchołkami dwunastokąta. Wtedy $|\Omega| = 12 \cdot 11$ (mamy 12 możliwych wyborów pierwszego wierzchołka i 11 możliwych wyborów drugiego).

$|A| = 12 \cdot 9$ (mamy 12 możliwych wyborów pierwszego wierzchołka, wybierając drugi wierzchołek, nie można wybrać wierzchołka już wybranego i dwóch wierzchołków sąsiadnych). Zatem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12 \cdot 9}{12 \cdot 11} = \frac{9}{11}$.

II SPOSÓB. (poziom rozszerzony) Jeżeli przyjmiemy, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków dwunastokąta, to $|\Omega| = \binom{12}{2} = 66$. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A : $A' -$ prosta poprowadzona przez wylosowane punkty zawiera bok dwunastokąta. $|A'| = 12$. Zatem $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$.

787. Osiem.

Rozwiązanie. n – liczba wierzchołków wielokąta W .

Ω – zbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków wielokąta W . $|\Omega| = \binom{n}{2} = 0,5n(n-1)$. Zdarzenie A – wylosowane punkty są końcami przekątnej wielokąta W . Zdarzenie B – wylosowane punkty są końcami boku wielokąta W . Zauważmy, że zdarzenia A i B są przeciwnymi, więc $P(A) = 1 - P(B)$. Wiemy, że $P(A) = 1 - P(B) < 0,75$, stąd $0,25 < P(B)$. Zatem $\frac{1}{4} < P(B) < \frac{1}{3}$. $|B| = n$, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{n}{0,5n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$.

Jedyną liczbą naturalną spełniającą układ nierówności $\frac{1}{4} < \frac{2}{n-1} < \frac{1}{3}$ jest 8, więc wielokąt W ma osiem wierzchołków.

788. $\frac{4}{91}$.

789. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{1}{8}$.

790. $\frac{6}{55}$.

Rozwiązanie. Prostopadłościan ma 12 krawędzi.

I SPOSÓB. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór trzywyrazowych ciągów o różnych wyrazach należących do zbioru wszystkich krawędzi prostopadłościanu. Mamy 12 możliwości wyboru pierwszej krawędzi, 11 drugiej i 10 trzeciej, zatem $|\Omega| = 12 \cdot 11 \cdot 10$. Zdarzenie A – wybrane odcinki są krawędziami jednej ściany prostopadłościanu. Pierwszą krawędź można wybrać na 12 sposobów. Wybrany odcinek jest krawędzią dwóch ścian, więc aby drugi odcinek był krawędzią tej samej ściany, można go wybrać na 6 sposobów. Jeżeli mamy dwie krawędzie jednej ściany, to trzecią krawędź można wybrać na 2 sposoby. Zatem $|A| = 12 \cdot 6 \cdot 2$. $P(A) = \frac{12 \cdot 6 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6}{55}$.

II SPOSÓB. (poziom rozszerzony) Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór trzejelementowych podzbiorów zbioru wszystkich krawędzi prostopadłościanu. Wówczas $|\Omega| = \binom{12}{3} = 2 \cdot 11 \cdot 10$. Zdarzenie A – wybrane odcinki są krawędziami jednej ściany prostopadłościanu.

Trzy krawędzie jednej ściany można wybrać na $\binom{4}{3}$ sposobów, prostopadłościan ma 6 ścian, zatem $|A| = \binom{4}{3} \cdot 6 = 4 \cdot 6$. $P(A) = \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6}{55}$.

791. a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{1}{7}$.

792. $\frac{1}{7}$.

793. $\frac{29}{35}$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że zbiorem zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór czteroelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków sześcienu.

Zatem $|\Omega| = \binom{8}{4} = 5 \cdot 7 \cdot 2$. Zdarzenie A – nie istnieje prostokąt, którego wierzchołkami są wylosowane punkty.

Zdarzenie $A' -$ wylosowane punkty są wierzchołkami pewnego prostokąta. Wybierając cztery wierzchołki sześcienu otrzymamy wierzchołki pewnego prostokąta, jeśli będą to wierzchołki jednej ściany (6 prostokątów) lub wierzchołki prostokąta zawierającego przekątną przeciwległych ścian sześcienu (6 prostokątów). $|A'| = 12$. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{12}{5 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{29}{35}$.

794. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{6}$.

795. $P(A \cup B) = \frac{23}{30}$.

796. $P(A) = 0,8$.

797. $P(A') = 0,75$.

798. $P(A) = 0,75$, $P(B') = 0,45$.

799. $P(A \cup B) = 0,8$.

800. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $P(A) = P(B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2P(A) - P(A \cap B) = 2 \cdot [P(A \cap B) + P(A \setminus B)] - P(A \cap B) = P(A \cap B) + 2 \cdot P(A \setminus B).$$

$$\text{Z równości } \frac{2}{3} = P(A \cap B) + 2 \cdot \frac{1}{4} \text{ wyznaczamy } P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

801.

Rozwiązanie. Wiemy, że $A \cup B = \Omega$ i $P(B) = P(A')$. Mamy wykazać, że $A \cap B = \emptyset$. $A \cup B = \Omega$, więc $P(A \cup B) = 1$. $P(B) = P(A') = 1 - P(A)$. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń: $P(A \cup B) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 1 - P(A) - P(A \cap B)$. Stąd otrzymujemy $P(A \cap B) = 0$, a to oznacza, że $A \cap B = \emptyset$.

802. 0,14.

Rozwiązanie. Wiemy, że $P(A) = P(B)$, $P(A \cap B) = 0,23$, $P(A \cup B) = 0,51$. Mamy obliczyć $P(A \setminus B)$. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń: $0,51 = P(A) + P(A \cap B) - 0,23$. Stąd $P(A) = 0,37$. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,37 - 0,23 = 0,14$.

803. a) $P(A)$; b) $P(B) = 0,5$.

805. 0.

806. $P(A' \cup B) = \frac{5}{6}$.

807. $\frac{37}{60}$.

808. 1,2.

Wskazówka. $A' \cup B = \Omega \setminus (A \setminus B)$.

Wskazówka. $A' \cap B' = \Omega \setminus (A \cup B)$.

809.

Rozwiązanie. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) < \frac{4}{7} - P(A \cap B) < \frac{4}{7} - \frac{3}{8} = \frac{11}{56} < \frac{11}{55} = 0,2$.

810.

Rozwiązanie. $P(A) + P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$. Zatem $0,67 + 0,83 - P(A \cap B) \leq 1$. Stąd $P(A \cap B) \geq 0,5$.

STATYSTYKA

811. a) Od lewej: 3, 1, 9, 8, 4, 5; b) średnia: 3,8, mediana: 4; c) 13.

812. a) 1900 zł; b) 1350 zł; c) poniżej średniej; 93%.

813. a) 25; b) 1,8 spóźnienia; c) 13; d) 2 spóźnienia.

814. Język obcy: 25%, matematyka: $41\frac{2}{3}\%$, historia: $20\frac{3}{6}\%$, biologia: 12,5%.

815. 173,75 cm.

816. a) IIIA (średnia IIIA: 3,72, średnia IIIB: 3,56); b) IIIB (mediana IIIA: 3, mediana IIIB: 4).

817. Lepszy wynik uzyskał Tomek (Ania: 69 pkt., Tomek: 74,5 pkt.).

818. Odchylenie standardowe ocen Jarka: $\frac{\sqrt{7}}{4}$, Marka: $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

819. 3 (średnia ważona: 3,48).

820. a) 3,25; b) 4 (średnia ważona: $\frac{72}{19}$).

821. 114 m.

822. IIIA 30 uczniów, IIIB 34 uczniów.

823. 1,64 zł.

824. a) 10%; b) 8; c) 128.

825. 61,28 m².

826. 35,6 tys. km².

827. a) Łączna masa zwierząt jest równa 36 495 kg = 36,5 t > 32 t; b) co najmniej 10 wagonów.

828. Trzy „czwórki” lub dziewięć „czwórek”.

829. a) Brzozowiec: 84 ha, Lubatka: 720 ha, Mieginki: 270 ha; b) 4,67 ha.

830. a) 540 zł; b) 60 pracowników, 32 400 zł.

831. a) 1 395 zł; b) nie można – nie znamy płac poszczególnych pracowników; c) 1 400 zł.

832. Gatunek A, średnia: 2,18, gatunek B, średnia: 2.

833. a) W miastach: 1,0; na wsi: 1,3.

834. 1700 zł.

836. 41,5 q/ha.

837. 20,6.

838. a) 17%; b) 19%; c) żaden z pytaných uczniów nie dojeżdża do szkoły w czasie dłuższym niż 45 min. i nie dłuższym niż 60 min; d) 600 uczniów; e) 625 uczniów.

839. a) od góry: 4, 16, 13, 10, 7; c) średnia: 2, odchylenie standardowe: $\sqrt{\frac{7}{5}}$ ($\approx 1,2$).

840. a) 19° C; b) 26,25° C.

841. a) 3 dni; b) 81 pracowników.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

842.	c
843.	c
844.	c
845.	c
846.	b
847.	a
848.	d
849.	c
850.	d
851.	b
852.	c
853.	d
854.	d
855.	a
856.	c
857.	d
858.	b
859.	c
860.	b
861.	c
862.	a
863.	c
864.	c
865.	c
866.	c
867.	b
868.	a
869.	d
870.	b
871.	d
872.	b
873.	b
874.	d

875.	c
876.	c
877.	d
878.	d
879.	b
880.	c
881.	c
882.	b
883.	a
884.	b
885.	b
886.	c
887.	d
888.	b
889.	d
890.	a
891.	d
892.	c
893.	d
894.	d
895.	d
896.	d
897.	a
898.	c
899.	a
900.	c
901.	c
902.	c
903.	d
904.	c
905.	c
906.	a
907.	a

908.	a
909.	b
910.	c
911.	c
912.	d
913.	c
914.	c
915.	c
916.	b
917.	d
918.	c
919.	b
920.	b
921.	b
922.	c
923.	a
924.	b
925.	b
926.	b
927.	d
928.	a
929.	d
930.	c
931.	c
932.	a
933.	c
934.	b
935.	c
936.	c
937.	c
938.	a
939.	d
940.	c

941.	b
942.	b
943.	c
944.	c
945.	d
946.	c
947.	b
948.	a
949.	d
950.	c
951.	a
952.	b
953.	c
954.	b
955.	c
956.	d
957.	a
958.	c
959.	c
960.	d
961.	b
962.	b
963.	c
964.	c
965.	b
966.	d
967.	a
968.	d
969.	d
970.	c
971.	c

SPIS TREŚCI

1. CIĄGI	5
Różne sposoby określania ciągu	9
Ciąg arytmetyczny	10
Ciąg geometryczny	15
Ciąg arytmetyczny + ciąg geometryczny	17
Zadania różne	19
2. PLANIMETRIA	22
Trójkąty	29
Równoległoboki	35
Trapezy	36
Inne czworokąty	39
Okrąg, koło	41
Zadania inne	43
Zadania z kontekstem realistycznym	44
3. GEOMETRIA ANALITYCZNA	51
Prosta	56
Okrąg, koło	58
Trójkąt	60
Równoległoboki	63
prostokąt	63
romb	64
inne równoległoboki	64
Trapezy	65
Równania. Nierówności. Układy równań i nierówności	65
nierówności i układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi	65
różne równania, nierówności i układy nierówności z dwiema niewiadomymi	67
Zbiory punktów o danej własności	67
Przekształcenia geometryczne	68
4. STEREOMETRIA	69
Graniastosłupy	73
graniastosłupy prawidłowe	73
inne graniastosłupy	73
Ostrosłupy	74
ostrosłupy prawidłowe czworokątne	74
ostrosłupy prawidłowe trójkątne	75
inne ostrosłupy prawidłowe	76
inne ostrosłupy	76
Przekroje wielościanów	78
przekroje graniastosłupów	78
przekroje ostrosłupów prawidłowych czworokątnych	78
przekroje ostrosłupów prawidłowych trójkątnych	79
Wielościany – zadania inne	79
Bryły obrotowe	80
walec, stożek, kula	80
obrótanie wielokątów	81
Bryła wpisana w bryłę	82
bryły obrotowe	82
kula i ostrosłup prawidłowy	82
bryła wpisana w bryłę – zadania inne	83
Zadania z kontekstem realistycznym	83

5. ZADANIA OPTYMALIZACYJNE	87
Planimetria	87
Geometria analityczna	89
Stereometria	90
graniastosłupy	90
ostrosłupy	90
bryły obrotowe	91
bryła wpisana w bryłę	91
Inne zadania	92
6. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA	93
Kombinatoryka	97
silnia, symbol Newtona	97
zadania kombinatoryczne	97
Rachunek prawdopodobieństwa	101
zadania z danym prawdopodobieństwem	107
zadania z funkcjami	108
zadania z ciągami	109
zadania z figurami geometrycznymi	110
własności prawdopodobieństwa	111
7. STATYSTYKA	113
8. ZADANIA ZAMKNIĘTE	120
Równania i nierówności algebraiczne	120
Liczby rzeczywiste	121
Funkcje	121
Funkcja liniowa	122
Funkcja kwadratowa	123
Wielomiany	123
Proporcjonalność odwrotna	124
Funkcja wykładnicza	124
Funkcja logarytmiczna	125
Trygonometria	126
Ciągi	126
Planimetria	127
Geometria analityczna	128
Stereometria	129
Rachunek prawdopodobieństwa	130
9. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA	131
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań wprowadzających	131
Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania do zadań maturalnych	156
Odpowiedzi do zadań zamkniętych	208